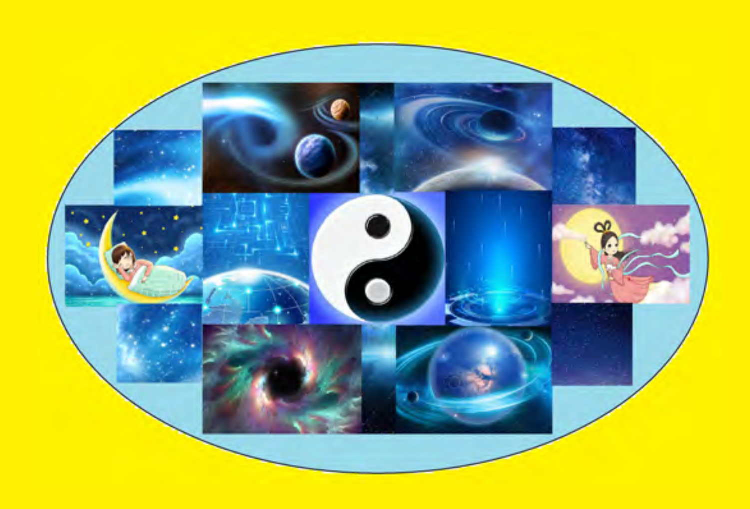


毛林繁 著

万物组合论

Linfan MAO

Combinatorial Theory on the Universe



Chinese Branch Xiquan House

2022

毛林繁

国际数学组合研究院(AMCA，美国) 院长、首席科学家
远翎数据复杂系统研究院（YLDACS，北京）院长
北京建筑大学兼职教授、研究生导师
Email: *maolinfan@163.com*

万物组合论

Combinatorial Theory on the Universe

Chinese Branch Xiquan House

2022

This book can be ordered in a paper bound reprint from:

GLOBAL KNOWLEDGE - Publishing House
848 Brickell Ave Ste 950 Miami
Florida 33131, United States
https://egk.ccgecon.us
info@egk.ccgecon.us

Peer Reviewers:

F.Smarandache, Department of Mathematics and Science of University of New Mexico, USA.
Q.Z.Ping, Academy of Internet Industry, Qinhua University, P. R. China.
Han Ren, Department of Mathematics of East China Normal University, China.
Junliang Cai, Department of Mathematics of Beijing Normal University, P. R. China.

Many books can be downloaded from the following **Digital Library of Science**:

http://fs.unm.edu/ScienceLibrary.htm

ISBN: 978-1-59973-740-9 **Price:** 80$

科学：局部与条件真实

（代　序）

科学引领人类活动，功用在于促进人类社会的物质文明和精神文明建设，改变人的生存能力，造福于人类自己。这样，相信科学，按科学规律办事是人行事的一项基本原则。但有多少人能正确理解这一原则则是个未知数，因为大多数人是站在人类自己的利益理解，将遵从这一原则简单地理解成能为人类带来收益而忽略了人类活动对自然的侵扰，这是对科学的一种狭隘理解，因为在人与自然这个二元系统中，自然对人的作用是即刻产生、即时发生、为今人所见，但人对自然的作用引发的自然对人类的反作用是一种延时作用，是人类活动对自然侵扰累积到一定量，"由量变到质变"形成灾害反作用于人类。例如，人类活动诱发的臭氧层破坏、气温上升、冰盖融化、极端天气、干旱，以及病毒变异等，同样有害于人类发展，只是这种累积效应不一定能为当代人所见。故此，在回答科学功用的同时，不能仅是站在人类自己利益这一端，不能仅看到科学在当下造福了人类而任其无节度地侵扰自然，而应将科学及其应用放到人与自然和谐共生这个原则下探讨其对人类的贡献与危害，因为科学造福于人类需先保证人类繁衍的可持续性，既能造福当代人，更要造福子孙万代，这是人类文明得以延续的基础或科学动因。

探讨科学的功用需要先回答认知中的一个基本问题，即科学是对事物真实的整体还是局部认知或条件真实呢？答案蕴含在"盲人摸象"这则寓言故事之中。故事中，为什么大象形状在盲人的感知中成了柱子、绳子、萝卜、蒲扇、墙或管子的样子，与常人眼中的大象形状差距这么大呢？因为盲人缺乏视力，是凭手触摸大象身体的部位在感知大象形状，触摸不同部位的感知结果必然不同，是盲人触摸大象身体不同部位的感知使然。同样，科学是人在对事物呈现规律的认知，与寓言中盲人的情形类似，是人在以已知特征局部认知未知事物，即科学认知并非是事物真实而是对事物规律的一种局部认知或条件真实，这种科学认知的局限性源于人的"六根"，即人的眼、耳、鼻、舌、身、意在感知事物中的局限性。与常人相比，盲人缺乏视觉，是以"五根"在感知事物，造成在对大象形状认知上的差异。那么，怎样解决人的认知局限性呢？答案是故事中那位觉者对盲人说的话，即"你们对大象的感知都正确！之所以你们认为的大象形状不同，是因为你们每个人摸到的大象身体部位不同。实际上，大象具有你们每个人所说的那些特征！"这位觉者是以人的"六根"界定在唤醒盲人对大象形状的认知，同样适用于人的"六根"对事物真实的界定，即把人对

事物的局部认知组合在一起形成对事物的整体认知。“万物组合”正是人类沿“盲人摸象”中那位觉者的指引，解决人的认知局限而把握事物整体规律的哲学观。这种认知的一般化称为Smarandache重叠空间或系统。例如，统一场论、规范场论、电弱理论和标准粒子模型等均是Smarandache重叠系统。更进一步，在Smarandache重叠空间或系统基础上考虑系统基元间的作用，形成对事物认知的一种组合模型，即空间拓扑结构，这也正是“万物组合”中“组合”一词的含义。例如，中医理论中人体十二经脉与五脏六腑，其上的气血运行与人体运行的对应关系等恰是这种空间拓扑结构的一个实例。

一般地，人类认知一件事物需由该事物的表象“果”刻画该事物的“因”，把握事物的因果关系。这当中，一种理想的方法是由事物表象分解事物为最小单元，称为基元，包括物质构成中的分子、原子、原子核、轻子和夸克，以及生物构成中的细胞和基因，再由基元行为把握事物行为，由事物表象“果”溯源基元的“因”，以实现对事物行为的整体把握，这就是由系统认知而来的万物组合思想。那么，是否对任一事物都可以这样认知呢？系统认知一件事物的因果关系是一种理想模式，难点在于怎样由事物表象确定基元，刻画基元间的作用。这当中，无论是确定基元、刻画基元行为还是基元间的作用，都可能成为把握事物真实的障碍。也正因为此，科学仍是对事物规律的局部认知而不是事物真实。与此同时，需要在人与自然和谐共生的原则下对科学及其应用进行评估，以检验其是否在促进人类文明而不是对人类的伤害或对自然的过度侵扰，因为对自然过度侵扰最终影响的仍是人类自己。

这样一来，以对事物定量认知为主线，以万物组合为认知理念，在人与自然和谐共生的原则下对人类认知中的数学科学及哲学进行系统回顾与反思就是一件有意义的事情。实际上，近十年来我本人最关注的正是数学科学与事物真实认知的关系问题，在一些国际学术会议上报告的题目大都与*Reality*这个词有关，因为这是科学需要解决的核心问题，需要回归万物组合的哲学思想，在事物内蕴的空间组合结构上拓展数学为“数学组合学”，以解决人类科学认知中的局限，逐步趋于对事物真实的把握。为此，本书在内容取舍上，除去一些理论推导外，兼顾了哲学与科普的内容。在表现形式上，部分地采用了父女对话方式，并配以一些生动图片以帮助读者理解，而那些含有理论推导的内容，包括本书最后两章对科学哲学的讨论是为那些有志于数学组合研究的人引路，旨在帮助其进一步研读有关文献后开展相关论题的研究，以推动人类文明进步。

下面概括地介绍一下本书各章主要内容。

第1章–第3章为科学认知的入门知识。这当中，第1章“幼儿问天”是以一个小学生的口吻提出宇宙的终极问题，即我们从哪里来，到哪里去，包括天体、地球、植物

和动物，旨在简要介绍科学对这类问题的假说或答案，但科学答案往往不能让一个小学生满意，因为他们不迷信权威，他们率真的求知欲望喜欢一再追问“为什么”，且常把一个成年人问的不知如何回答。他们这种率真的求学态度恰是从事科学研究的人应有的品质。本章同时介绍了宗教与中国文化传说中对这类终极问题的答案，并非是宣扬迷信而是从人的认知角度看，宗教与文化传说中的答案较之科学解释更形象，更便于小学生接受，这是需要关注的问题；第2章“人识万物”的核心在于阐释人对万物认知中的局限性，包括人类起源的进化论、宗教与神造人的传说，人的眼、耳、鼻、舌、皮和大脑构造对认知的影响，以及在认知中怎样实现的“无中生有”以遵从“适者生存”的人生法则，唯象认知在人类生存中的作用等，并以物理学中的双缝实验为例，概括人认知的局限性等；第3章“万物组合”以“盲人摸象”这则寓言故事为引子阐释系统认知的组合思想，以物理、化学和生物等认知事物的方法为例证，验证人在对事物认知中遵循的组合思想。同时，以组合计数为例，阐释事物的特征间是相互交织的，构成一种Smarandache重叠空间或系统，并介绍组合学中的两个计数原理，即容斥原理和鸽巢原理，以及鸽巢原理的一种推广，即对种群中的个体数量达到一定程度时，个体间具有某种关系的子结构存在问题，又称为Ramsey问题的肯定回答。

第4章–第6章是系统认知事物的基础。这当中，第4章“万物表征”介绍事物在参照系中的表征方法，包括确定一件事物空间位置及变化特征的参照系、爱因斯坦的相对性原理、向量代数、线性空间及生成基和运动物体表征的牛顿力学、n-体问题，以及牛顿万有引力定律在确定第一、第二、第三宇宙速度中的应用和爱因斯坦狭义相对论中的洛伦茨变换等。特别地，指出任一种坐标系都可成为刻画事物行为的参照系，即参照系均具有刻画事物特征的作用；第5章“系统识物”旨在阐释系统认知一件事物的理念和方法，包括系统特征、基元和结构的组合刻画、物理量纲及天体与微观粒子涉及的距离、质量、时间等测量方法，系统状态方程、解的存在性及求解方法等。特别地，讨论了系统稳定性及李雅普诺夫直接判准和线性系统判准、双曲型非线性系统稳定性判定方法等，介绍了与万物组合的认知思想相应的，在事物空间组合结构上推广经典数学的一种哲学思想，即数学组合化猜想；第6章“系统同步”旨在介绍自然界中一种有趣的同步现象，阐释判定与调控系统同步的方法。实际上，人类至今模拟动物行为造福于人类，如汽车、火车、轮船和飞机等机械运动都是基于系统基元的同步与调控。为此，这一章介绍了系统同步判定的一些主要方法，包括主函数法和连图判定准则，以及引入误差项将同步问题转化为系统稳定性判别的方法，并应用于系统同步调控，介绍了2-矩阵范数、李雅普诺夫指数等研究系统稳定性、系统同步时常用指标等内容。

第7章“矛盾系统”有别于常见的教科书，是采用万物组合思想阐释并刻画矛盾系统。这当中需要注意的问题在于矛盾是人的认知或老子说的“可名”过程中以局部认知替代事物真实造成的，并非事物本来面目，因为“天地视万物为刍狗”，万物在宇宙间是公平的，并在这种情形下遵从“逻辑一致”的认知原则。在这一点上，韩非子的矛盾寓言与薛定谔猫的生死态或量子坍缩在本质上是一致的，问题在于如何刻画薛定谔猫的生死态或矛盾。艾弗瑞特为解释薛定谔猫的生死引入的平行空间或2-叉树同时涵盖猫的生态与死态，是Smarandache矛盾系统或Smarandache重叠空间或系统的一种特殊情形。为此，本章介绍了Smarandache矛盾系统、Smarandache几何，以及Smarandache重叠空间或系统与Smarandache否定公理的关系。在此基础上，讨论了薛定谔猫的生死态或量子纠缠、量子隐形传态及Smarandache重叠空间或系统解纠缠在通讯领域的应用等。注意，老子的“名可名，非常名”在数学这种符号演绎系统上的表现是数学的局限性，包括数学抽象局限与数学演绎局限，在认知万物规律的中常见的是非均匀系统或不可解方程组，即方程组中的每个方程均存在解但方程间存在矛盾，导致整个方程组不可解的情形。值得注意的是，与经典数学中方程组的情形不同，非均匀系统的组合解一定存在，为刻画非均匀系统性质，包括非均匀系统的和稳定或积稳定提供了判定条件。

第8章“复杂网络”是研究社会群体现象的产物，即人的社会行为带有一定的随机性。当然，人有大脑，在行为上并非是一种完全的随机行为，认为人的社会行为可以由随机性刻画仅是一种假设。为此，本章介绍了一些常见的随机分布、大数定律和中心极限定理，以及对应的网络指标，并在此基础上详细介绍了Eröds和Rényi俩人于上世纪六十年代引入的完全随机模型及相关网络指标与性质。在这一领域，WS小世界网络是采用随机性模拟社会行为的一个突破，其随机性介于规则网络与完全随机模型之间。与此同时，BA无标度网络刻画的是互联网上新站点与既有站点的随机连接情形，并对应于资本引领的社会中“富者愈富、穷者愈穷”的社会现象，它的一种推广是局域世界网络。注意，疾病传播与人的社交圈有关，是在社群网络上进行的。为此，本章介绍了应用各种复杂网络模拟社群网络，分析疾病传播中的SI、SIS、SIR模型及其刻画的疾病传播规律。

第9章–第10章是采用整体观推广网络流为连续流，将其视为一种新的数学元构造数学系统，以作为万物组合下的事物模型。这当中，第9章“网络算术”开篇介绍了网络流中的一些优化问题及图上作业法，分析在万物组合下网络流模拟事物行为的可能性，并在网络组合结构不变的情形下，构建网络流上的运算系统。这时，网络流间的运算类似于向量运算，仅是需要保持组合结构不变，可以借鉴线性空间的做法引入度量，采用离散、连续两种模型模拟事物变化行为，即网络流序列和连

续演化模型，构建网络流的代数运算、微分和积分运算等数学体系，得到类似的网络流积分运算的牛顿-莱布尼茨定理等；第10章“组合真实”的核心是介绍在万物组合引领下模拟事物变化的数学模型，即连续流。这里，连续流是网络流的一般推广，即网络节点、边上的标号不再局限于实数而是采用Banach空间中的向量，同时在边端引入Banach空间上的算子作用于边上的流经向量，并要求其在节点上遵从流量守恒定律。为此，本章开篇介绍了Banach空间、Hilbert空间的性质及一些重要结论，以及量子力学中对量子行为的三个假设，应用图的并运算和Banach空间中元的Hadamard积，类似于网络流，将连续流视为一种数学元并在其上定义加法、减法、数乘和Hadamard积运算，构造连续流上的Banach空间和Hilbert空间，研究连续流的动力学行为和稳定性，由最小作用量原理得到连续流的Lagrange方程等。值得注意的是，泛函分析中的一些重要结论采用G-同构算子可在Banach流空间上进行推广。特别地，Banach流空间上Fréchet和Riesz表示定理仍成立，意味着量子力学中对量子行为的假设成立，即无论量子是否有内蕴结构，不影响量子力学中的结论。

第11章–第12章属于科学哲学的范畴，探讨在万物组合下科学应怎样推动人类文明进步。这当中，第11章“华人识物”旨在以中华文明为例，阐释中国古人怎样认知万物，怎样在“天人合一”，即“人与自然和谐共生”思想下形成中华文明，并与西方一些科学成就进行比较，特别是老子《道德经》中对宇宙创世和天、地、人三者间关系的阐释，与宇宙大爆炸说进行比较，指出西方科学是对万物法则“道”的局部认知而中国古人则是对事物行为的全生命周期认知等。同时，本章介绍了连续流的两个应用实例，一是中国古人在对万物认知的基础上创立的人体十二经脉学说与五脏六腑关系，并以阴阳平衡作为治病的机理；二是《易经》作为中华科学之魂与连续流的对应，指出《易经》是中国古人认知事理和物理的科学方法；第12章“科学哲学”旨在重申科学是对事物规律的一种局部认知或条件真实，应在人与自然和谐共生的思想下探讨科学怎样促进人类文明这一大问题。作为示例，本章以万有理论为例，概述了科学发展中的Smarandache重叠空间或系统的思想应用，指明在人与自然和谐共生的大前提下，人类应主动终结的那些违背这一前提的科学及其应用，以实现科学引导下的人类活动不侵扰自然这一人类生存与发展的原则。

我个人认为，人与自然和谐共生是二十一世纪科学发展推动人类文明进步中的一项人类生存法则。这当中，人类处在一个主动地位。为此，一是需要反思既往人类对自然过于侵扰的失“德”行为；二是研究与发展与自然共生的科学，改正、消除既往人类已对自然侵扰带来的危害；三是人类的自我检讨与约束，自觉与自然和谐共生。这样，也只有这样，人类追求的终极目标才有可能实现。

最后，我想在此对多年来一直鼓励和支持我的家人、朋友和同事表示诚挚的谢

意，没有家人的理解，没有朋友和同事对我的鼓励与支持，本书绝没有可能面市。在此，特别对那些帮助、支持过我的家人、朋友和同事表示衷心地感谢。他们中一些人的姓名需要在此特别地提及。首先，感谢Smarandache教授。多年来，Smarandache教授与我保持着对相关论题的学术讨论与交流，一直在鼓励、支持我的研究工作。同时，对D.Rabounski主编和Preze Mihn博士的鼓励与支持一并表示谢意，没有他们的鼓励与支持，我可能在多年前已放弃学术追求转而从事其他工作养家；其次，对多年来指导、帮助过我的老师、同学和朋友表示感谢，特别是田丰、刘彦佩、徐明曜等教授对我的指导，以及与A.Bhattacharyya 、P.S.K.Reddy、任韩、蔡俊亮、黄元秋、郝荣霞、刘国栋、陈益智、何卫力、魏二玲等教授真挚的学术讨论与交流，对我的系统研究有不少启迪；第三，对远瓴数据集团的支持表示感谢。虽然这是一家企业，但正是因为有这家企业的资助，才使我这两年可以沉下心来对本书相关论题进行系统梳理、总结与研究，完成本书的写作。

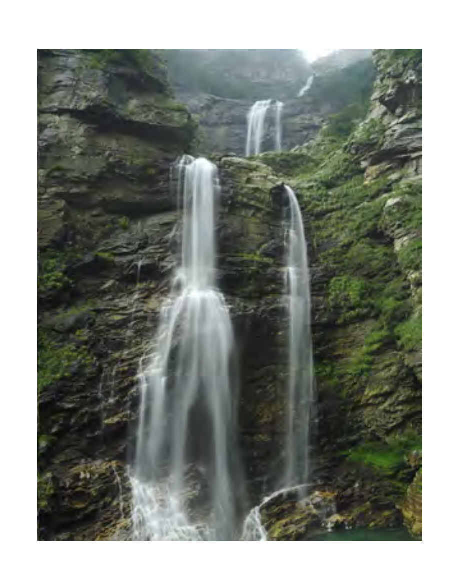
毛林繁

2022年7月25日于北京寓所

名人名言： 追求客观真理和知识是人的最高和永恒的目标。

— 阿尔伯特.爱因斯坦

目 录



飞流直下三千尺，疑是银河落九天。

— 唐.李白《望庐山瀑布》



第 1 章
幼儿问天

****

天地有大美而不言，
四时有明法而不议，
万物有成理而不说。
圣人者，原天地之美而达万物之理。

— 战国.庄周《庄子-知北游》

第1节 宇宙起源

宇宙，是人类所界定的所有时间、空间及其包含的内容物构成的统一体。这当中，“宇宙”的“宇”指天地方位，包括上、下、前、后、左、右和内容物，“宙”指古往今来，即过去、现在、未来和内容物。



浩瀚宇宙



宇宙大爆炸

图1.1

故此，“宇宙”作为一个组合体，在空间上可以无限扩张，在时间上可以无限延伸，即宇宙是处在运动中的宇宙而非静止不变。图1.1中，仅是展现了天文望远镜拍摄的宇宙一个局部区域，但已足以展现宇宙的浩瀚及构成的复杂。人类作为宇宙家族中的一员，无论老幼、肤色和文化差异，都想弄清宇宙的本原，提出宇宙极问以实现人类的无限繁衍，诸如宇宙是怎么来的，遵从什么样的运行规律，宇宙结局又是什么等极问。对此，不同的地域和文化给出了不同的回答。例如，中国人讲盘古开天地、伏羲一画开天，《圣经》上讲上帝六日创世，科学主流讲宇宙大爆炸学说等，无一不是在寻求对宇宙极问的答案。实际上，人类至今在对宇宙极问的认识上，仍犹如一个幼儿或儿童的认知，距得到这些问题的真实解答还很遥远。

欧阳博士是一位从事数学、物理和宇宙学研究且在国际上有一定影响的科学家，熟知中国文化，注重自然科学与人文科学的融合，习惯于从中国先哲们对宇宙认识中吸取养分，并应用于科学研究。欧阳博士有一个上小学六年级的女儿欧阳惠，小名惠子，正处在对宇宙万物充满好奇的“童心”年代。

下面，我们看一看父女俩人关于宇宙起源的对话。

1.1.**宇宙大爆炸说**. 有一天，在学校门口接女儿回家的路上，惠子问欧阳博士：“爸爸，您能告诉我宇宙是从哪里来的吗？”欧阳博士问：“怎么想起问这个问题，这个问题很复杂呢！”惠子说：“老师在课上说，宇宙是由一次大爆炸产生的。可是，我总觉

得有哪里不对!”欧阳博士接着问:“哪里不对呢?”惠子回答说:“这不就是说，宇宙是像过年放的鞭炮一样产生的吗。可鞭炮是纸里面包着火药，还要用火点着引线才能爆炸!宇宙大爆炸时的纸和炸药从哪里来的，又是谁点燃的引线，无法想象呢?”

对此，欧阳博士解释说，大爆炸是能量集聚到一定程度产生的，并由此引发由基本粒子组合各类物质。现代科学找到宇宙起源于大爆炸的证据，是源于在1929年天文学家埃德温.哈勃对遥远星系光线红移研究时的一个发现，即不管你往哪个方向看，远处的星系正在远离我们而去，近处的星系正在向我们靠近，也就是说，宇宙正在不断地膨胀。那么，把这一个现象逆推，就可以得出星体之间在很早以前靠得很近，甚至刚好在同一地点，暗示着存在一个叫做大爆炸的时刻。

但对能量需要聚集到什么程度能够产生宇宙大爆炸，为什么会出现大爆炸这一事件，特别是在靠近大爆炸时刻的最初几分、几秒钟到底发生了什么，在科学上并没有定论。对此，欧阳博士接着解释说，这正如是谁或是什么原因导致鞭炮引线被点燃一样，没有科学解释。惠子一听笑了，追问着:“爸爸，那发生宇宙大爆炸时，是空无一物还是像制作鞭炮那样，用纸包着炸药，还有引线?”欧阳博士回答说:“并非是空无一物，而是像一个点一样，但密度无限大。”惠子接着问:“那我们现在看到的天空中的星星、地球和人、山川和树木又是怎样产生的呢?”这就是传说中的“无中生有”啊，欧阳博士进一步向惠子解释说。科学界认为，万物是随着宇宙的演化进程，从爆炸最初几秒、几十秒、几十分钟、几十个小时，到几十年、几百年或几百亿年，大爆炸后的温度逐渐冷却下来，空间尺度一直在扩展，粒子间相互碰撞、结合，一步一步产生原子、分子，组合大分子和万物，形成了你、我、他和星体，以及山川、河流和树木。

惠子听后仍是一脸茫然，自语不能理解的，明明是没有，又怎么能生出有?难不成有一种无形的力量或手在不停地从其他地方往宇宙里添加星体、山川、河流和树木?她对欧阳博士说:“爸爸，我觉得宇宙大爆炸学说是错误的!”见状，欧阳博士解释说:“大爆炸学说仅是一种宇宙来源假设，不过近年人们对宇宙观测收集的一些数据表明，大爆炸说很可能是正确的。”



图1.2 孵化宇宙

见女儿不信，欧阳博士反问她:“那你觉得宇宙是怎样产生的呢?”听爸爸这样问她，惠子来了精神，回答说:“我觉得，宇宙应该是像母鸡下蛋那样下出来的!”欧阳博士一听，问:“你为什么这样认为呢?”惠子回答说:“因为鸡蛋可以孵出小鸡，一

点点长大!”欧阳博士问:“你能想象出那得多大一只母鸡吗,它又生活在哪里?”惠子想了想说:“想不出来。”欧阳博士进一步启发惠子说:“你可以这样想。首先,如果有这样一只母鸡,那它一定比宇宙还要大,因为它要生出宇宙,就像母鸡生鸡蛋,鸡蛋孵出小鸡长得与母鸡一样大类似,而宇宙还在膨胀;其次,我们不可能看到这只母鸡的外形,因为它比宇宙还要大,而人类至今连宇宙的外形都看不清楚。也就是说,这只母鸡生活在哪里,人类也不可能清楚,因为理论上人不可能离开宇宙。”

听完欧阳博士的分析,惠子说:“那这样一来,爸爸,我认为宇宙是母鸡下的蛋是不是错了?”欧阳博士回答说:“也不一定,只不过是人类目前还没有收集到相关证据,证明宇宙是一只类似于母鸡下的蛋。”他接着说:“你的这种看法,是认为宇宙及其起源是一种生物行为并按生物规律繁衍。作为宇宙中的生命体,像鸡蛋内蕴含的小鸡一样,人类无法跳出宇宙去观测宇宙,无法判断宇宙是一个生命体还是非生命体!”

讲到这里,欧阳博士向惠子问了一个问题:“你觉得宇宙外形应该是什么样子,是圆的还是方的,是像一棵树还是像一座山,是像一只兔子还是像一只老母鸡呢?”惠子说从来没有想过。欧阳博士说,有些科学家认为宇宙是椭圆形的。例如,美国国家航天局研制的威尔金森微波各向异性探测器(WMAP),探测的宇宙中大爆炸后残留的辐射热,于2003年公布的探测图1.3是椭圆的。

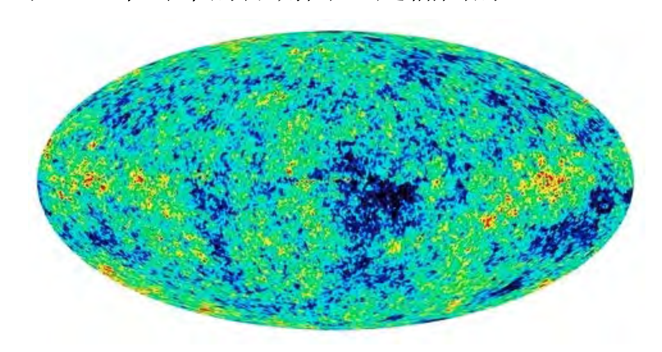


图1.3 WMAP探测图像

但这样一来,是不是可以认为宇宙的外形是椭圆的呢?当然不能。欧阳博士接着向惠子解释说:“理由与上面类似,因为人类根本无法跳出宇宙,证实宇宙外形是椭圆形的,或是像一只老母鸡还是像别的什么形状!”那么,WMAP这张图片外形又说明了什么呢?他向女儿解释说,这只能说明,WMAP在进行微波探测过程中,是在空中沿着椭圆的轨迹环绕地球,对距地球大约150万km范围内的数据进行近地探测,并非宇宙全貌。宇宙研究需要空间探测技术的发展,但人类是否能最终走到宇宙之外获知宇宙真相,包括外形,东西方文化的观点并不一致。这时,俩人已经走到了家里。他让惠子先洗一下手,说晚饭后再给她讲中国文化的“盘古开天地”和

《圣经》中的“上帝创世说”。

1.2. **盘古开天地说**. 晚饭后，欧阳博士在书房里给惠子讲中国文化中“盘古开天地”的传说，他告诉惠子，人类由自身演化，用拟人化的手法想象出了许多宇宙的创世学说。

例如，在中国传统文化中认为是盘古创造了宇宙万物。这里，盘古是中国人的“创世神”，如图1.4所示。据说，宇宙创世前没有天地之分，那时的天地混沌一团，没有白天与黑夜，分不清上下左右，也辨不出东南西北，世界就像是一个中间有核的浑圆体。人类的先祖“盘古”就在这样一个混沌世界的核心中，经过了一万八千年的孕育成为一个生命体。



图1.4 盘古画像

盘古在有知觉的那一刻，就如出生的“婴儿”一样，睁开眼四处观看，可四周还是处在“混沌”中，一片黑暗，他什么也看不见。急切之中，盘古拔下自己口中的一颗牙齿，把它变成一把威力无比的神斧，抡起来用力向四周劈砍。这时，只见浑圆体被劈开成了两个部分。一部分轻而清，往上方飘去，形成了天；另一部分重而浊，不断下降成了地。盘古就这样的头顶着天，脚踏着地，诞生于天地之间。

盘古在天地间不断长大，他的头在天上为神，脚在地上为圣。天每日升高一丈，地每日增厚一丈，盘古每日生长一丈，如此一日九变。这样，经过了一万八千年，天变得极高，地变得极厚，盘古的身体也变得极长。盘古就这样与天地共存了一百八十万年。据说，盘古倒下时，他的头化作了东岳泰山，脚化作了西岳华山，左臂化作了南岳衡山，右臂化作了北岳恒山，腹部化作了中岳嵩山。人间从此有了阳光雨露，大地有了江河湖海，万物滋生，人类开始在地球上繁衍。这就是中国文化“盘古开天地”或是“一画开天”传说，是中国先哲们画下的一幅宇宙创世图。

到了三国时期，吴国人徐整著的《三五历纪》对这段传说作了如下详细记载：

“天地浑沌如鸡子，盘古生其中。万八千岁，天地开辟，阳清为天，阴浊为地。盘古在其中，一日九变，神于天，圣于地。天日高一丈，地日厚一丈，盘古日长一丈，如此万八千岁。天数极高，地数极深，盘古极长。后乃有三皇。数起于一，立于三，成于五，盛于七，处于九，故天去地九万里。”

欧阳博士问惠子能否理解中国人的“盘古开天地”创世说，惠子说：“能理解，这要比宇宙大爆炸说直观、形象，类似于人的劳动创造。”欧阳博士又问她：“宇宙大爆炸说与盘古开天地说有什么异同吗？”惠子不解地问：“有什么不一样吗？”欧阳

博士解释说："可以这样比较一下。首先，宇宙创世前，大爆炸说认为世界是空无一物，万物高密度挤压近乎一个点，而盘古开天地说认为世界是混沌一体。这样一来，万物从何而来就不再是无中生有而是有物混成了，为万物的产生留下了伏笔，是不是这个道理？"惠子一听，说："对呀，爸爸！这样我就不用再疑惑山川或河流是从哪里来的了，是从混沌中的物那里来的！"

欧阳博士接着说："其次，两个学说都假设宇宙有一个起点。大爆炸说是假设宇宙起源于大爆炸那一刻，盘古开天地说是假设宇宙产生于盘古用斧子劈开混沌世界的那一刻，两者异曲同工，是不是这样？"惠子点点头："是这样！"

欧阳博士继续说："第三，两个学说都认为万物是在宇宙诞生后产生的。大爆炸说用爆炸产生的热量流向引出宇宙扩展、冷却，粒子之间碰撞与结合，产生原子、分子和万物。同样，盘古开天地说盘古用斧子劈开混沌，在'劈开'后，混沌中的轻清者往上飘形成天，重浊者下降成地，由混沌中的物形成天地，即宇宙。这样一来，自然就解释了万物源于最初的混沌世界。"听到这里，惠子产生一个疑问："爸爸，爆炸是里面的东西抛向四周，而劈是劈开，让混沌由一个整体分为两块，没说清万物是在宇宙各处产生呢。"欧阳博士解释说："这里，'混沌'一词强调是由清浊二者构成的混元体。至于它的形状，是像我们今天看到的西瓜一样是圆的，还是像一个土堆不得而知，因为它不是创世说的核心。同时，说盘古用斧子劈开混元体也没有说盘古是劈了一斧子还是几斧子，这也不是创世说的重点。盘古开天地的核心在于他用斧子劈开了混沌世界，使混沌世界不再混沌而成天地，进而生出万物。中国古人的这些观念，等你以后学习《易经》就能体会了。"

欧阳博士问惠子："比较了宇宙大爆炸说和中国人的盘古开天地说，对宇宙大爆炸说是不是有了些体会呢？"惠子点点头说："是的，爸爸！虽然我还是不大理解宇宙大爆炸说，好像又能领会一点它的实质，二者在讲宇宙来源上是一致的。不过我仍然有一个疑问，中国人为什么不自己研究盘古开天地说而是跟着外国人后面讲宇宙大爆炸说呢？"

欧阳博士想让女儿自己对宇宙起源有些领悟，启发说："你这个问题问的好！放学的路上，你说你觉得宇宙是母鸡下的蛋，把宇宙归于母鸡下的蛋，把宇宙来源归于一只大的不能再大的母鸡，但人类找不到这只母鸡。同样的，盘古用他的一颗牙齿为斧劈开混沌世界，那盘古自己应该有多大？不是和你说的那只母鸡类似，人类也无法找到吗！这只能是中国古代哲人的智慧，是神话而不是科学！人类科学的使命，在于研究和发现宇宙万物的真理并应用于人类实践。"

1.3.**上帝创世说**. 欧阳博士告诉惠子，这种拟人化或是神化的创世说在世界各民族都有，一些宗教还将神化创世说纳入教义。其中，《圣经》中记载的上帝六日创世

最为详细，其记载的造世过程如下：

说是有一日，耶和华对无边的混沌世界十分不满，轻轻地挥一挥手说："世间要有光"。于是，世间从此就有了光。耶和华把"光"称为"昼"，把"黑暗"称为"夜"。亮光隐去，黑暗重临；亮光升起，黑暗消失，从此，世间就有了昼与夜的交替。这是上帝创世的第一日。

第二日睁开眼，耶和华对眼前空洞的世界景象不满意，挥一挥手说："天上要布满星辰。"于是，宇宙间布满了数不清的大大小小各类星球。上帝将日、月星晨摆列在天空中，让它们各司其职，掌管着世界的昼夜和时节。



图1.5 耶和华创世图

第三日，耶和华看到陆地上还是混沌不分，闷闷不乐，说："水应聚集在一起，使旱地显露。"于是，水听命纷纷汇聚在一起，形成河流，旱地也一个个显露出来。耶和华称旱地为"陆"，聚水的地方为"海洋"。

耶和华说："陆地上要生出草木和各种蔬菜。"于是，大地生出了草木和瓜果蔬菜，显得一片生机盎然。

到了第四日，耶和华说："天上要有光体分管昼夜，要作记号，定节令、日子和年岁，还要发光普照大地。"于是，耶和华造了两个光体。给它们分工，让大的那个管昼，小的那个管夜。这样，就有了太阳和月亮。

第五日，耶和华说："水中要有生命，有无数的鱼、虫，天空中要有鸟，有无数的鸟。"于是，世间出现了各种各样的鱼和飞鸟。鱼自由自在地畅游在水中，鸟自由地翱翔在天空。耶和华又说："地上要有各种动物。"于是，大地上出现了各种野兽和昆虫，野兽在地上奔跑自如，昆虫飞舞在花草中。

到了第六日，耶和华看到阳光明媚，大地辽阔，世间一片姹紫嫣红，兽跳虫跃，鱼游鸟鸣，十分满意，于是说："我要照我样式造人，让人管理地上的万物和走兽。"于是，耶和华用地上的泥捏成一个泥人，朝泥人吹了一口气。不一会儿，人便在耶和华的手里诞生了。

《圣经》中记载，上帝用五日造出了宇宙万物，又在第六日按他自己的形象造出了人，看到宇宙万物井然有序，决定把第七日作为休息日，这也就是现如今"阳历"中"周日"，即休息日的来历。

给惠子介绍完《圣经》中“上帝六日创世”的记载，欧阳博士问她，上帝六日创世说与盘古开天地说相比，哪一个更形象，更便于小朋友理解，惠子回答说：“当然是上帝六日创世说了，盘古开天地说只是讲盘古用斧子劈开了混沌世界，可以繁衍出万物，但没说清楚万物从何而来，而上帝六日创世说则明确是上帝造出了万物，更好理解。”

欧阳博士觉得需要让女儿树立正确的哲学观，引导她说：“上帝在第六日按自己的形象造出了人，也就是说人与上帝长得一样。那么，上帝有多高呢？与你说的那只母鸡相比谁更大一点呢？”惠子回答：“应该是我那只母鸡更大一点吧，因为它生出了宇宙！”欧阳博士继续问：“好！那么，上帝和盘古比谁的力气更大一点呢？”惠子说：“盘古用一把斧子劈开了混沌世界，可上帝轻轻的挥一挥手就让世界产生昼夜、时节，造出了山川、树木和生命，感觉上帝比盘古的力气要大一些！”欧阳博士向女儿解释说：“这是宗教中讲的法力。宗教中认为上帝的法力无边。同样，你想想这样万能的上帝在宇宙中会有吗？”惠子听得有点糊涂了，说：“我想不出来，应该不会有吧？”欧阳博士肯定地说：“不会有！这样万能的上帝在宇宙中不会存在，与中国人讲的盘古，包括你说的老母鸡是一样的，是人在解释宇宙来源时大脑臆想的产物，只能供奉在人的心里。宗教中，上帝被敬称为神，有创世能力，因为人无法想象是什么愿因产生了宇宙，因为人自己在宇宙万物之中。”

欧阳博士对惠子说，上帝六日创世和盘古开天地的思想，都是因当时科学技术不发达，对宇宙万物的理解不到位而“自圆其说”式的盲目崇拜。随着科学技术的进步，人们意识到，无论是中国人的盘古开天地说，还是西方基督教的上帝六日创世说，需要从科学视角认识清传说中的盘古或上帝的本来面目，即宇宙之理。这可能很难，可能永远认知不到宇宙的真实面目，因为人处在宇宙中，可能永远脱离不了宇宙，但这是科学的终极目标，即认知宇宙，与宇宙共生。

第2节 星云漂移

天空中的星星，是指人站在地球上用肉眼可见的天体，一般分类为恒星、行星、卫星、矮行星、小天体。夏日的一天，欧阳博士带着家人去郊外一个山村度假。晚饭后，一家人来到山村的一条小溪边上纳凉。空气中散发的草香、花香迎面拂来，耳边听着溪水的流声、水中蛙声和树上的蝉鸣声，眼前还不时有萤火虫飞过。夜空中，月亮在蓝色的海洋中飘荡，无数的星星在眨着眼睛，像一颗颗宝石，好不惬意。

惠子在溪水边玩了一会儿，走上堤坝向空中望去，惊奇说：“爸爸，您看漫天的星星，好像是在向我示好呢！”看女儿正沐浴在大自然的海洋中，欧阳博士想启发她

对自然的认知，问她："你知道星星是怎么来的吗？"惠子回答说："您不是告诉过我，是上帝在创世的第二日说天上要布满星辰，挥了挥手就造出来了吗？"

的确，几天前欧阳博士给惠子讲过的宇宙来源中，宇宙大爆炸解释说是在大爆炸后大约10^9秒，随着大爆炸产生的热量扩散，温度逐渐降低，小分子开始合成大分子，开始形成宇宙中的星体、恒星、行星，但这种解释对一个小学生理解太难了，因为她们对物质构成或原子、分子的概念仅限于课本上的说教，没有在实验室体验过，反而是上帝六日创世说让女儿记忆犹新。欧阳博士反思着，在这种情形下应怎样引导女儿科学认知日、月、星、辰呢？



图1.6 坐地观星

第二天上午乘着休假，欧阳博士启发惠子正确理解自然，问她："如果没有上帝，宇宙中是不是就没有太阳、月亮和星星？"惠子回答说："是！没有上帝，不仅没有太阳、月亮和星星，连人都不会有！"欧阳博士继续引导："上帝长得是比人高还是别人矮呢？"惠子回答说："这一点，好像上帝六日创世说中没交待，只是人的形状是按上帝的样子造出来的。上帝能够造天、造地，造出山川、河流、动物、植物与人，与个子高矮没关系，是上帝有神力。"欧阳博士追问惠子："那你觉得上帝属于人类吗？"惠子肯定地回答："不属于，因为人是上帝造的，不是上帝生的，只是模样长得像上帝！"欧阳博士又问："上帝既然不属于人类，也不属于动物，上帝又何以能够施展神力在六日造出天地、星辰、山川、动物和人类呢？"惠子想了想如实说："不知道！这是不是就是法力？因为您上次说神的法力无边。"欧阳博士说："正确，这就是法力！你再想一想，既然上帝不属于人类，那上帝施展的法力源于何处呢？"见女儿还在疑惑，欧阳博士直接给出了答案："当然是源于自然，是自然的鬼斧神工！甚至，还可以直接说上帝就是自然，敬畏上帝法力与敬畏自然是一回事。科学的宗旨，在于探究宇宙的自然成因而不是盲目崇拜某个超人、神或是其拥有的法力。"

接着，欧阳博士给惠子讲述了宇宙星系的起源和有关传说。

2.1.**星系起源**. 人类是在星系产生并趋于稳定后出现的，想弄清楚星系的起源，这在某种意义上讲有难度，甚至可能是一件做不到的事情。对此，科学提出理论假说，经由试验、数据收集和理论推演，给出星系起源的科学解释，以还原星系产生过程，这是在自然力作用下物质的一种组合过程。

宇宙中，一个由引力吸引在一起，数目巨多的星球形成的绕转组合体称为星系，其直径可达1500-300000光年。一般地，星球绕转有两种形式，一种是众多质量小的星球绕一个质量大的中心星球转动；另一种是两颗或更多颗星球围绕共同质心相互转动，如图1.7所示。观察发现，宇宙中绝大多数星系属于前者。在星系之间，有着稀薄的一种叫等离子微粒，称为星系际介质。在人类可以观测的宇宙范围中，星系的总数大约超过1000亿个以上。人类借助天文望远镜，发现星系依看到的形状可以分为椭圆星系、漩涡星系和不规则星系三类。其中，椭圆星系有着椭圆形状的明亮外观，漩涡星系是圆盘的形状加上弯曲的旋涡臂，不规则星系受到邻近的其它星系影响，其外形没有统一的几何形状。



图1.7 星系

对宇宙星系的形成过程，有两种假说。一种是基于宇宙大爆炸假说，按爆炸后的时间进展，从粒子间的吸引与排斥给出星系形成过程；另一种假说认为宇宙中存在着大量的微尘，星系是由微尘一步一步形成。科学界比较接受的是宇宙大爆炸解释星系的形成。按照宇宙大爆炸理论，星系大概形成于大爆炸发生后十亿年。此时，宇宙中弥漫着大量的氢气和氦气，相互吸引集结成云团。这些云团在空中漂浮着，不断捕获其他物质而成为星团，与其他星团在空中发生碰撞，有的被其他星团吸入而消失，有的吸入其他星团而成为一个更大星团，有的被撞散、撞烂或者撞碎，空中漂浮着碰撞后剩下微尘或星块，经组合后形成新的星团。星团间不断的碰撞与重组，不断调整各自的运行轨道以避免碰撞，渐趋于稳定、相安无事而形成现如今人眼中的星系。当然，不管是哪一种，都是人类为解释星系形成过程而提出的假说。

欧阳博士讲到这里，惠子插话了:“这有点像小朋友玩泥巴的游戏。用力把几块小泥巴合成一大块大泥巴或是把一块泥巴分成几小块泥巴在地上摔着玩，星系是这样形成的啊!”欧阳博士接着说:“玩泥巴是小朋友手上用力，把几块小泥巴揉成一块大泥巴或是把一块大泥巴掰成几块小泥巴，即组合或是拆分。星系的形成要比玩

泥巴复杂，涉及星团间的引力和斥力。引力把粒子粘合在一起，斥力让粒子分离，有点像同性相斥和异性相吸。这样的长年累月，形成了今天人们看到的星系。”

2.2.**银河星系**. 银河系，在天空中像一条流淌在天上闪闪发光的河流，古时称为银河或天河，是包括太阳系所在的一个恒星系统，包括1500-4000亿颗恒星、星团、星云，以及各种类型的星际气体和尘埃，其可见总质量大约是是太阳的2100亿倍。在银河系里，大多数恒星都集中在一个扁球状的空间区域内，外形像是一块铁饼，扁球体中间突出部分称为“核球”，半径大约为7000光年，中部称为“银核”，四周叫“银盘”，银盘外有一个大的球状区域，那里的恒星稍少且密度小，直径约为7万光年，称为“银晕”，如图1.8所示的那样。



图1.8 银河系

银河系的银核，是其自转轴与银道面的交点中心凸出部分，呈现出很亮的球状，直径大约为2万光年，厚度约为1万光年.这个区域内，主要分布的是年龄大约在100亿年以上的红色恒星。银核与太阳系之间充斥有大量的星际尘埃。

银河系的银盘，是银河系的主要组成部分，包括主序星、巨星、新星、星云、半规则变星等。在人类可探测物质中，银河系中的物质有九成在银盘范围以内。银盘像一个薄透镜，以轴对称形式分布于银心周围，中心厚度约为1万光年，四周约两千光年，直径则近乎10万光年。观测发现，除1千秒差距范围内的银核绕银心轴作刚体定轴转动外，其他部分绕银心自转，且离银心越远转得越慢。银盘中的物质，主要以恒星形式存在，占银河系总质量不到10%的星际物质大部分散布在银盘内。星际物质组成中，除电离氢、分子氢及多种星际分子外，大约10%的是星际尘埃。

银晕弥散在银盘周围的一个球形区域内，直径大约为98000万光年，其分布的恒星密度较低，大多是一些老年恒星组成的球状星团。在银晕外，存在着一个巨大

的呈球状的射电辐射区，叫做银冕，看起来像是一顶帽子。

欧阳博士告诉惠子，人类对星系认识的早期，因缺乏现代观测仪器，大多是在肉眼观测基础上，赋予日、月、星、辰等星球、星系为神而崇拜或祭祀。例如，古希腊神话中称太阳神为赫利俄斯，后说太阳神由阿波罗向宙斯索要而代之，月亮女神塞勒涅，星辰之神阿斯特赖俄斯，流星女神阿斯忒里亚等。在中国上古神话中，除盘古开天地外，还有伏羲创世、女娲补天等神话，以及民间一些脍炙人口的美丽传说，对人们认知星系不无帮助。欧阳博士指着银河边上一颗很亮的星，它的旁边有四个小星，形状像是一把织布梭子，告诉惠子这颗星叫织女星。他又指着银河对面在东南方向的一颗亮星，它的两旁各有一颗小星，告诉惠子这颗星叫牛郎星，它边上的那两颗小星星代表着牛郎和织女的两个孩子。

[**牛郎织女传说**] 据说在中国东周早期，一座山里住着户人家，老人们都已经过世了，剩下兄弟俩，老大已娶媳妇，老二没成家，一直在放牛，村民都叫他牛郎。老大的媳妇心眼不好，对牛郎总是挑三拣四、指桑骂槐，有时还把牛郎赶出屋子，让他到牛棚里去住。

后来，牛郎的嫂子闹着要分家，牛郎提出只要老黄牛，把房子让给了老大一家，自己牵着老黄牛走到一个山坡前，用干草搭了个棚子住了下来。牛郎白天带着老黄牛开荒种地，晚上和老黄牛住在一起，有时还和老黄牛聊天，老黄牛仿佛能听懂他的话。有一天，老黄牛突然开口，告诉牛郎它是天上的金牛星下凡，说第二天傍晚时有七个仙女到山那边的湖里去洗澡，让牛郎把绿衣仙子的衣服给藏起来，这样她就飞不走了，就会成为牛郎的媳妇。

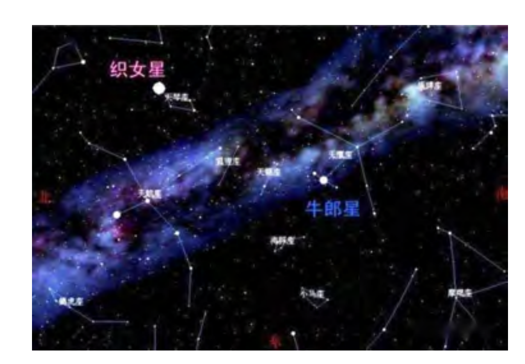


图1.9 **牛郎织女星**

第二天傍晚，牛郎真的看到一群仙子在湖里洗澡。按老黄牛的指引，他把其中一身绿衣服藏在草丛中。仙子们到了上天时间，可她们中的织女怎么找也找不到自己的外衣。姐妹们帮着找了一番没找到，又不敢耽搁太久，只好飞走了。这时，牛郎把衣服拿出来交给织女。两人在湖边坐下来交谈，织女得知牛郎的遭遇后很是同情，她见牛郎能吃苦、能干活、心眼好，便决定留在人间做牛郎的妻子，俩人男耕女织，生活甜蜜幸福。

几年后，俩人生下一男一女。老黄牛后来老了，临死前交代牛郎一定要留下它的皮，以便将来有急事可以披上救急。玉皇大帝查知织女没按时回天宫，派王母娘娘押解织女回天庭受审，牛郎着急可又追不上。他突然想起老黄牛临死前说的话，

便披上牛皮，挑着筐子，带着两个孩子去追王母娘娘。牛郎眼看就要追上织女了，这时，只见王母娘娘从头上拔下一根簪子，在身后一划，一条大河出现在牛郎的面前，这就是银河。牛郎再也飞不过去了，俩人只能各自在银河的一遍，隔河相望。

这就是中国传说中银河两边的织女星和牛郎星的来历。欧阳博士说，中国古人认为盘古开天地，天即天庭，地即大地，由玉皇大帝掌管着天庭和人间的一切，与古希腊神话中的宙斯很相像。故事中，王母娘娘用一根簪子，随手一划画出银河的传说，与《圣经》出埃及记中，摩西按耶和华的吩咐向红海伸出手杖一划露出河床通向彼岸很像。对此，《圣经》上是这样记载的，说只见大风吹来，红海的海水向两边分开、凝固，以色列人安全过海，摩西又伸出他的手杖，将凝固的海水复原，埃及追兵连同车马一下子被卷入水流汹涌的旋涡中，死伤无数。但神话也好，传说也罢，都是一些文人墨客对"法力"记载或创作的产物。欧阳博士问惠子："你觉得这种法力会在人间出现吗？"惠子回答："不会吧！"欧阳博士说："是的，即便出现，也是某种自然力量而非法力。宗教推崇法力是为约束教众，科学研究的法力即自然力，是为探求自然本真，这是二者本质上的不同。"

2.3.**太阳星系**. 太阳系，是银河系中被太阳引力约束在一起的天体系统，包括水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星等八大行星，以及大约173颗已知的卫星、5颗已辨认的矮行星、数以亿计的小天体和哈雷彗星。其中，太阳是位于太阳系中心的恒星，其他行星围绕着太阳运转，如图1.10所示。



图1.10 **太阳系**

太阳系八大行星差不多在同一平面近圆轨道上运行，朝同一方向绕着太阳公转。除金星以外，其他行星的自转和公转方向相同。科学界对太阳系的形成有于一种星云假说，认为太阳系是在大约46亿年前，由宇宙中一个巨大的分子云塌缩形成，这次分子云塔缩促成了数颗恒星和太阳的诞生。

太阳为地球带来温暖和光明，是地球上万物得以生长的源泉，位于距银河系中心大约2.6万光年、距银河边缘2.3万光年的位置，以220km/s的速度绕银心运动，约2.5亿年绕行一周，地球气候也因此发生2.5亿年的周期性变化。太阳的内部可以分为三层，即核心区、辐射层和对流层。核心区半径是太阳半径的1/4左右，质量约为太阳的一半以上。

太阳核心的温度极高，可以达到1500万℃。核心区的作用力也极大，可促使由氢聚变为氦的热核反应发生，从而释放出大量的能量。经过观测与研究，太阳核心区的能量通过辐射层和对流层中的物质传递，传送到太阳表面向四周辐射。经分析，太阳中心区物质的密度非常高，可达$160g/cm^3$,中心区处于高密度、高温和作用力状态，是太阳能量的发源地。

太阳中心区的能量主要靠辐射方式向外传递。对应的，太阳中心区之外紧邻辐射层，范围在从热核中心区顶部的0.25个太阳半径向外到0.71个太阳半径之间。在太阳的辐射层，温度、密度和作用力从内向外递减。经过估算，辐射层的体积占太阳体积的绝大部分。太阳内部能量向外传播方式，除辐射外还有对流，范围是从太阳0.71个太阳半径向外到达太阳表面。太阳这一层气体性质变化大，不稳定，形成明显的上下对流运动现象，是太阳内部结构的最外层。

以太阳为中心，按距离太阳的远近，从近到远依次为水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星。其中，水星离太阳最近，金星最明亮，地球最特别，其上有生命繁衍，火星是淡淡的红色，木星最大，土星有七个美丽的光环，天王星是蓝绿色，海王星是淡蓝色的气体行星。这当中，水星与地球相似，表面上也有高山、平原和峭壁，是太阳系中最小的行星；金星地表较地球相对平坦，约有60%的部分为平原，由一层厚厚的黄色大气掩盖，但没有与地球一样的蓝色海洋；地球拥有适合生命成长的海洋、山川、平原和气候，是人类在宇宙中已知的其上存在生命的唯一天体；火星是一颗沙漠行星，是太阳系中仅次于水星的第二小的行星，火星地表沙丘、砾石遍布，沙尘悬浮其中，常年有尘暴；木星是一个巨大的液态氢星体，其中心由硅酸盐和铁等物质组成，高层大气由体积约88-92%的氢和约8-12%的氦构成；土星也是一个气态巨行星，主要由氢组成，有少量的氦与微量元素，核心包括陨石和冰，外围则由金属氢和气体包裹；天王星主要由岩石与成分不同的水冰物质组成，其主要元素为83%的氢、15%的氦。人们对天王星构造的标准模型包括三个层面，即中心地带是岩石，中间部分是水、氨和其他挥发性物质组成的热且稠密的流体，最外层是氢、氦组成的外壳；海王星是介于地球和木星、土星间中等大小行星，内部结构与天王星相似，其大气层包括80%的氢、19%的氦和微量甲烷，其上有着风速高达2100km/h的强烈风暴。

欧阳博士告诉惠子，中国上古神话曾流传着太阳系中有十个太阳，先民们劳作苦不堪言，后羿用箭设下其中九个，才使中华子民得以繁衍。

[**后羿射日传说**] 中国先秦时期有一部重要的古籍《山海经》充满着神奇志怪，书中记载了上古时期的历史、地理、民族、宗教、神话、生物和医学等事项，作者不详，其中记载的带有神奇色彩的动物在今天大多已绝迹，但却为提升学生探索自然的兴趣提供了无限的想象空间。《山海经》大荒东经、大荒南经中讲到后羿箭杀神人“凿齿”的故事，讲上古时期帝俊与羲和生下十个儿子太阳，住在东方海外一个叫汤谷的地方。按照天规，这十个儿子中，每日轮流有一个儿子在空中照耀人间，为万物播撒阳光，其他九个儿子则在一颗扶桑树的枝条上睡觉。那时，虽然有十个太阳，但人们平日里只见到一个太阳。人们日出而做，日落而息。人和动物间以诚相见，万物感恩太阳给他们带来了时辰、光明和欢乐。

人们常说，十个手指还不是一边齐呢。有一天，顽皮的小弟想打破天帝定下的规矩，央求哥哥们陪同他一起出现在空中，认为这样更有趣。于是，当黎明来临，十个兄弟像十个火团，一起出现在了空中。这一下，大地上的万物就遭殃了。正所谓天上一日，地下一年。只见地上森林着火了，动物烧死了，河流、大海干涸了，鱼死了，农作物和果园枯萎了，食物断绝了。一些人出门觅食被太阳的高温活活烧死，另外一些人则成了野兽的食物。

后羿看到人们生活在十个太阳烘烤的苦难中，决心要帮人们脱离苦海，射掉那多余的九个太阳。据说，后羿拿起弓箭，翻过了九十九座高山，跨过了九十九条大河，穿越了九十九个峡谷来到东海边。他登上一座大山顶，拉开有万斤力的弓弩，搭上一只千斤重的利箭，瞄准天上的一颗最热的太阳一箭射去，把十兄弟中的大哥射了下来。后羿又拉开弓弩，搭上利箭向剩下的太阳射去。这次，一下子把十兄弟中的老二、老三射落下来，但后羿感觉天上的七个太阳还是很热，就又向空中的太阳射出了第三枝箭。这一次，一下把十兄弟中的老四、老五、老六和老七射了下来。就这样，后羿一枝一枝地把箭射向空中的太阳，射下来九个兄弟中箭后一个个落地，他们发出的光和热也随之消失了。

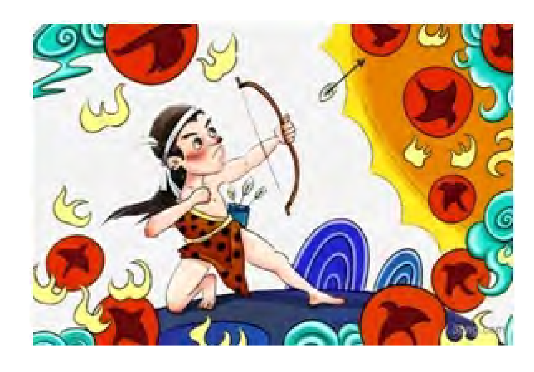


图1.11 后羿射日

这时，十兄弟中的小弟见状，知道是违背了天规，惹了大祸，怕受到天帝责罚，一下子躲进大海里去了。天上没有了太阳，大地一片昏暗。万物没有阳光哺育，毒蛇、猛兽四处横行。人们无法生活下去了，请求天帝把躲在海里的那个太阳叫出来

履行天职，以使万物繁衍。这时，天帝才知他的十个儿子违反天规，破坏了宇宙秩序，便下令，让天兵天将捉拿躲在深海中的那个小儿子，罚他每日到空中值日，不准休息。天帝这个最小的儿子接到判罚，深知自己罪孽深重，老老实实地按判罚行事，每日按时从东方的海平面升起，按时在西边落下，给人间施以阳光和温暖，哺育苍生。后羿因拯救了世间苍生，维护了天道，后被天帝赐封为一员天将。

欧阳博士对惠子说，后羿射日是一个在中国流传的神话，细节在流传下来的《山海经》中大多遗失，是西汉刘安所著的《淮南子.本经训》中的记载。至于太阳系形成过程中是否真的出现过十个太阳，以及那九个太阳是如何消失的，始终是个谜，只有待将来人们对太阳系起源有了进一步的认知才能辨明真伪。

第3节 地球奥秘

地球是人类的发源地，是人类已知生命的摇篮。太阳系中，地球距太阳的距离约15000万km，处在第三远的位置上。地球上，地表最高温度57.7 ^oC，最低温度-89.2 ^oC，拥有29.2% 的陆地，70.8%的水域，常年的光照、温度、湿度、气候、地理环境和水域、陆地等，为不同种类的生物提供了生存环境。

作为太阳系行星中的一员和人类生存的星球，地球的起源是人类最需要透彻了解的一个星球。人类在地球上生活，对地球的了解要比对其他星球详细得多。伟人毛泽东在《送瘟神》中曾写下著名的诗句“坐地日行八万里，巡天遥看一千河”，相对于其他星球，研究地球起源问题的资料记载也最丰富,历史记载中的许多现象都与地球的起源和形成过程有关。例如，地球内部构造和物质分布，地震、火山、海啸等自然灾害的成因等。



图1.12 地球

夏日的一个周末，欧阳博士带着一家人来到海边度假，让一望无际的海水放飞紧张工作的心情，享受着海浪拍洒在身上的快乐。晚饭后，惠子问欧阳博士：“爸爸，地球是怎么来的？”欧阳博士反问她：“你觉得地球是怎么来的呢？”惠子天真地回答：“学校课外活动上，好几个小朋友都说地球是其他星球上掉下来的一粒种子，经风吹日晒长大成地球的。”欧阳博士告诉她，虽然人类生存在地球上，但对地球是怎样形成的，并没有普遍认可的结论。人类对地球的形成有几种假说，并对收集的有关数据和资料进行了科学研究与探索。

3.1.**地球起源**. 地球起源与太阳系起源是同一个问题，主要有两种假说。一种是星云形成假说，认为太阳系是由一团旋转的高温气体逐渐冷却凝固而成。说是大约在50亿年以前，银河系中存在着一团由尘埃和氢气、氦气构成的自转、盘旋的混合火球，即太阳星云，在引力收缩过程中，不端抓取空中漂浮物，星云的温度和密度随其自转逐渐增加，且越是靠近自转轴越是如此。随着时间推移，星云中心火球成了最原始的太阳，其它的残留部分，绕着太阳形成一个包裹层，这个包层沿着太阳赤道方向渐渐扩展，与中心火球距离逐渐增加，形成一个星云盘。这个星云盘主要包括三类物质，即氢和氦约占总质量的98%，冰质物，主要是氧、碳、氮、氯、硫等元素的氢化物和镍、氩等约占1.5%，石质物，主要是钠、镁、氩、硅、钙、铁、镍的氧化物和金属，约占0.5%。随着星云盘中的尘层密度增大，太阳辐射的透明度逐渐降低，形成今天的太阳系；另一种是捕获形成假说。认为远古时代太阳系中只有太阳。大约在60亿-70 亿年前，当太阳穿过一个巨大的黑暗星云时，捕获了其中大量的陨石颗粒和尘埃。一部分被捕获的物质与太阳结合在一起，另一些被捕获物质则分别聚集在一起绕着太阳旋转，并在运行中不断吸取漂浮的陨石和尘埃，形成太阳系中的其他行星。

3.2.**地球结构**. 地球内部结构是一圈一圈的同心状圈层的组合结构。从地心到地表，依次称为地核、地幔和地壳，是由地核俘获熔融物质和少量塑性物质、固态物质、气体和液体，在自然作用下一步一步形成的，见图1.13。

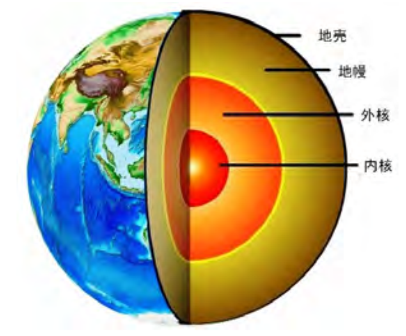


图1.13 地球结构

地核又称为铁镍核心，其物质组成以铁、镍为主，又分为内核和外核。地核的内核顶界面距地表约为5100km，外核的顶界面距地表约为2900km。一般认为，外地核可能由液态铁组成，内核被认为是由刚性很高的，在极高压下结晶的固体铁镍合金组成。推测认为，地核中心的压力可达350万个大气压，温度高达6000摄氏度。地核中心物质的特点是在高温、高压长期作用下具有可塑性，但对短期作用来比钢铁还坚硬。

地幔介于地表和地核之间中间，厚度将近2900km，主要是由致密的造岩物质构成，是地球内部体积和质量最大的一层。其中，靠近地壳部分主要是硅酸盐类物质，靠近地核部分则与地核的组成物质较接近，主要是铁和镍的金属氧化物。结构上，地幔可分为上地幔和下地幔。下地幔顶界面距地表约1000km，密度为$4.7g/cm^3$，上地幔顶界面距地表约33km，密度$3.4g/cm^3$。其中，上地幔顶部存在一个软流层，是

放射性物质集中的地方，整个地幔的温度很高，足以使岩石熔化，是地球岩浆发源地；下地幔温度、压力和密度均增大，物质呈可塑性固态。

地壳是临近地球表以下的固体外壳，平均厚度约为17km。地壳厚度并不均匀的，大陆部分平均厚为33km，高山、平原地区地壳的厚度可达60-70km，海洋部分地壳较薄，平均厚约为6km。一般地，海拔越高地壳越厚，海拔越低地壳越薄。地壳的物质组成中，除沉积岩外，大都是花岗岩和玄武岩。花岗岩大都分布在玄武岩之上，而且大都在大陆地壳。地壳上层为沉积岩和花岗岩层，主要由硅铝氧化物构成，下层为玄武岩或辉长岩类组成，主要由硅镁氧化物构成。海洋地壳中花岗岩极少，一般是在玄武岩上覆盖一层厚约0.4-0.8km的沉积岩。地壳温度随深度的增加而逐步升高。一般是深度每增加1km温度升高30 ^oC左右。

3.3.**地球漂移**. 欧阳博士问惠子说："你觉得地球是静止在空中的，还是不停地运动呢？" 惠子说："这个问题老师在自然课上讲过，地球是自己绕着地轴转，整体还要转着太阳转。"

欧阳博士肯定地说："正确！宇宙中的星体都是在不停地运动着的。除星球自己旋转外，太阳还有带着太阳系中的其他行星，绕着银河系的中心转，转一圈大约需要2.26亿年。银河系又属于一个更大的本星系群，其中有将近50多个星系。银河系作为一个整体，要绕着本星系群中的室女座旋转，转一圈的时间差不多需要1000亿年呢。" 惠子问："那为什么我感觉不到呢？"

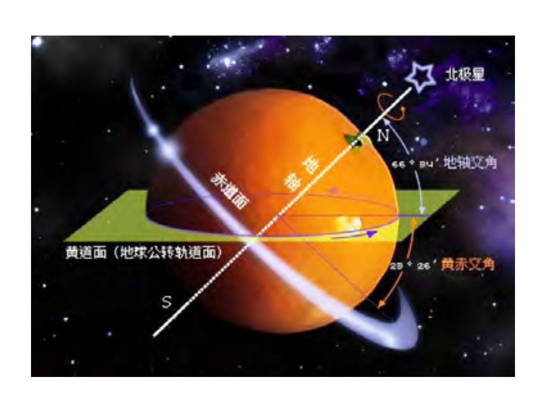


图1.14 **地球自转**

欧阳博士说："那是因人的眼睛看不了太远，没有相对物比较。同时，一个人的生命与太阳系、银河系公转2.26亿年、1000亿年相比，实在是很短暂，感觉不到差异的原因。"

这时，惠子忽然想起一个问题问欧阳博士："地球是漂浮在空中还是下面有个支点，支撑着它不下沉呢？" 欧阳博士回答说："是漂浮着的！" 惠子一听惊讶道："这样的话，那地球不就掉下去了吗？老师在课上讲牛顿在苹果树下看书，就让树上掉下来的苹果砸到头上。如果地球下面没支点，那地球不是要像苹果一样一直掉下去吗？还有，如果地球下面没有支点，在地球对面的人不就掉到太空里去了么？" 欧阳博士笑了笑说："这就是引力作用！你可以试着跳一下，是不是感觉有一只手拉着你，不让你跳起来呢？" 惠子在原地跳了一下说："真是这样！那引力是怎么产生的呢？" 欧阳博士回答说："引力的产生原因比较复杂。牛顿把引力称为万有引力，即

物体只要有质量，相互间就会存在有引力，计算公式为

$$\mathbf{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

这里，$G = 6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$为引力常数，$m_1$和$m_2$为两个物体的质量，$r$是它们之间的距离。对了，下午你在海边看到海水涨潮，你知道是什么原因吗？”

惠子摇了摇头说：“不知道，只是感觉海水上涨很快，一会儿就没过了海边上的礁石了！”欧阳博士从书包里拿出《自然哲学的数学原理》，翻开一段对女儿说：“这是牛顿的一本自然哲学的书，他是这样总结的，说是实验和天文学观测普遍显示，地球周围的一切天体被地球重力所吸引，并且其重力与它们各自含有的物质之量成比例，则月球同样按照物质之量被地球重力所吸引。另一方面，它也显示，我们的海洋被月球重力所吸引，并且一切行星相互被重力所吸引，彗星同样被太阳的重力所吸引。由于这个规则，我们必须普遍承认，一切物体，不论是什么，都被赋与了相互引力的原理，根据这个表象可以得出，一切物体间存在万有引力的论证。”



图1.15 苹果砸中牛顿

欧阳博士接着说，我们再来说说潮汐。潮汐是一种海水周期性涨落的现象。中国人一般把白天称为朝，夜晚称为夕。这样，海水白天和夜晚的涨落就称为“潮汐”。中国古人对产生潮汐的原因并不清楚。细心的人们发现潮汐与月亮有关。《山海经》大荒东经中曾提到东海边一坐山上有一头长得像牛的巨兽，青白的身子没有牛角，仅有一只蹄子。这只巨兽出入海水时，一定有大风大雨相伴随，发出的亮光如同太阳和月亮一般，间接提到潮汐与太阳和月球的关系。到了东汉时期，王充的《论衡》一书中则明确指出“涛之起也，随月升衰”，即依赖潮汐与月亮盈缺的关系，总结潮汐现象与月亮有关。拉普拉斯依据牛顿的万有引力定律，从数学上证明潮汐现象确实是由太阳和月亮但主要是月亮的引力造成的。生活在海边上的人，每天都可以看到海水有规律地升落两次。潮汐波是由东向西，沿周日运动的方向传播，一次潮汐涨落的时间为半个太阴日，即12小时25分。

太阳的引潮力虽然不大，但也影响潮汐的大小。有时，它与月球形成合力，有时又是斥力相互抵消。一般地，在新月或满月时，太阳和月球引力在同一方向上，相向或相反方向施加引力，产生高潮；在上弦时，月球引力与太阳引力对抗作用，产主低潮。一年中的春分和秋分时，如果地球、月球和太阳几乎在同一平面上，这时引潮力比其他月份大，形成一年中春季、秋季两次潮汐高潮。

这时，惠子问欧阳博士："按这种说法，有质量就有引力，为什么人和人之间感觉不到呢？电视剧中的男女主角的一见钟情是不是引力呢？"欧阳博士解释说："引力与物体的质量乘积成正比，与它们之间的距离成反比，具体的引力数值还要乘上一个万有引力常数G，这样算下来，两个人之间的引力是一个很小的数值，可以忽略不计。这也就是人和人之间感觉不到万有引力的原因。当然，对于星球之间，则需要考虑其间的引力作用，因为引力在一定程度上促使了他们之间作相对运动。至于电视剧中男女主角间产生的一见钟情，那不是万有引力的原因而是人与人之间的感情或者意念产生的。"

那么，为什么物体只要有质量就有引力呢？欧阳博士继续解释说，牛顿在提出万有引力定律时没有给出解释，而是到了二十世纪初，爱因斯坦提出了广义相对论，给出了一种与人们常识不一致的解释，即物质空间在质量的作用下是弯曲的，而不是人们通常认为的那样，也就是说，时空不是平直的，就像小朋友在滑车上，从高处自动下滑，好像是下面有一种牵引力一样，就连光线也不例外。爱因斯坦在1916年提出了检验广义相对论的实验，即水星轨道近日点的进动、光波在太阳附近的偏折和光波的重力红移等三个经典实验，都为人们证实。其中，光波在太阳附近的偏折的实验结果在当时被算作大新闻，并被刊登在各大报章的头版。这项实验于1919年由亚瑟.爱丁顿爵士等人合作进行，利用日全食观察太阳附近的星星，因为太阳光的原因，平日里无法对着太阳进行观测。观测同时在巴西塞阿腊及非洲西岸的圣多美和普林西比进行。这样，比较背景恒星在接近太阳时的位置可以测量光线的弯曲值，与爱因斯坦的计算值几乎一致，爱因斯坦及其广义相对论也因此而举世闻名。

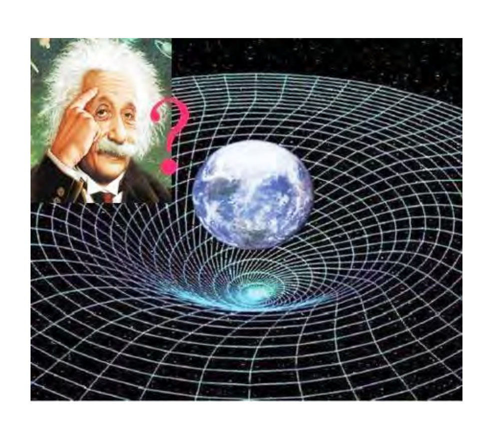


图1.16 弯曲时空

古希腊一位哲学家阿基米德曾断言："假如给我一个支点和一根足够长的杠杆，我就可以撬动地球。"欧阳博士问惠子："你能想象出这是多长、多强的一根杠杆吗？"惠子回答说："想不出来！"欧阳博士解释说："他的观点虽然在理论上成立但仍是荒谬的。请问人类在哪里可以找到这样一根杠杆，又在什么地方可以找到这样的支点呢？找不到！宇宙中不存在这样的杠杆，也没有这样的支点！"惠子反问说："这样的杠杆可能不存在，可支点不是在地球外的任意一个星球上都可以么？"欧阳博士告诉她，地球质量为$5.965 \times 10^{24} kg$，其他星球成为撬动地球支点，必须是一个致密星

球，其质量与地球相比充分大，因为只有这样，撬动地球时的反作用才不至于影响其运行轨道，否则将破坏宇宙运行秩序，给宇宙甚至人类带来毁灭性打击，而这样的星体在宇宙中并不存在。所以，尽管阿基米德的断言在理论上是成立的，但这是一个附条件的荒谬结论，人们只能借助于神力进行想象。这意味着一个科学结论不能脱离其成立条件而应用。与此相对应，万有引力理论奠定了人类理解宇宙的基础，是科学家贡献于人类发展的一个实实在在的理论，并非虚构。

第4节 植物遍地

植物是地球上行固着和自养生活的一种生命形态之一，包含树木、灌木、藤类、青草、蕨类、及绿藻、地衣等人类熟悉的，是由大地直接滋养的生物。初步估计，世界上现存大约有350000个植物种类，有287655个以上物种为人类所确认，有258650种植物开花，有大约16000种苔藓类、11000种蕨类和8000种绿藻类植物等，植物是动物生存的基础，如为人类提供食品、药品和蔬菜，净化生态环境，美化生活环境等，是与人类生活最近的一类宇宙衍生物。

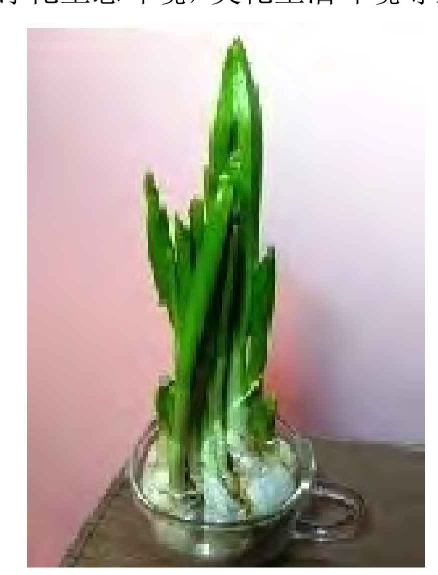


图1.17 惠子种蒜

有一天，惠子从阳台上捧回屋里一小碗绿葱葱的蒜苗，准备第二天到学校拿给小朋友们看。她告诉欧阳博士，这是她在妈妈指导下，把大蒜一瓣一瓣地放在碗里，每天浇两次水，浇了十多天的成果。看着女儿种蒜成功后的喜悦，欧阳博士想给惠子普及点植物知识，问她："你知道大蒜是怎么来的吗？"惠子回答说："是妈妈在菜市场买回来的。"欧阳博士又问："菜市场上的大蒜是怎么来的呢？"惠子回答："是农民伯伯把地里种的蒜拿出来卖的!"欧阳博士继续启发她问："农民伯伯种在地里的蒜是从哪里来的呢？"惠子想了想反问说："是不是他妈妈在菜市场给他买的？"欧阳博士告诉她，可能是他自己上一年留下的大蒜"种子"，也可能是他或他妈妈在市场上买的大蒜"种子"，种菜要有蔬菜种子，种玉米要有玉米种子，种树要有小树苗，小树苗是种子培育而成。这样看，无论是粮食还是瓜果蔬菜，都是由种子发芽后一步一步长大的。有的应季而生，很快长大，如蔬菜等应季食品，有的则要先开花后结果，经历"春播、夏长、秋收"三个季节，如核桃，在成长过程中，离不开阳光普照，离不开雨露滋润。

欧阳博士问惠子第一粒种子是怎么来的，惠子一脸茫然："不知道，是怎么来的呢？"欧阳博士告诉她，按达尔文的生物进化观点，即生物由低级向高级的趋势发展和进化看，植物的起源应当比动物早，比人类出现的还要早。

4.1.**生命起源**. 生命起源，即地球上的生命生于何时，产于何地，又是怎样产生的等对生命的极问，是一个千古未解之谜，出现过多种假说或神话。如上帝六日创世说和中国上古神话中的女娲化生万物的传说等，还有一种自生论，认为生物可以由非生物或是另一些截然不同的物质产生等，与神创论类似。到中国的春秋时代，老子在《道德经》里对万物起源的"道生一，一生二，二生三，三生万物"，抛开神创论，用万物的自然进化或演化规则，即"化生规"阐释物种起源。对应的，十九世纪达尔文由生物进化提出的进化论，为采用进化思想揭开生命起源带来了一丝曙光。

化学起源说是一种普遍接受的生命起源假说。这一假说认为，生命起源与宇宙的起源和演化密切相关，地球上的生命是在地球温度逐步下降以后，在宇宙漫长的演化过程中，由非生命物质经过复杂的化学过程一步一步地演化而成的，因为生命构成中的基本元素，如碳、氢、氧、氮、磷和硫等，均是来自宇宙大爆炸后元素的演化。这一演化过程揭示出物种起源的奥秘，即宇宙演化过程中，某些生物单分子，如氨基酸、嘌呤、嘧啶等，在大爆炸温度逐渐降低、冷却过程中，最初可能是形成于星际尘埃或凝聚的一些星云中，在行星表面一定的条件下，合成了象多肽、多聚核苷酸等生物高分子，再经由若干前生物演化，最终形成了地球上的原始生物系统，即具有原始细胞结构的生命，使地球具备了生物演化的基础，再经由单细胞到多细胞、简单生命到复杂生命的进化、变异与演化，形成了我们今天看到的复杂生命形态。欧阳博士告诉女儿，为证实第一粒种子是由非生命物质演化而来的,生物学家在实验室内进行了大量的模拟实验，在实验室里用一些简单分子合成生物大分子，以还原生物演化过程，即假设在地球早期含有大量的原始大气圈，如甲烷、氨气、水、氢气，以及海洋等，如果地球上的闪电作用于这些气体，就会聚合成出多种氨基酸，这些氨基酸在常温常压下，在局部浓缩后可以进一步演化成蛋白质和其他的多糖类，以及其他一些高分子脂类。这样，在一定的条件下就能够孕育出生命。当然，这些研究是基于人类自己对生命起源的假说，还原生命的起源。

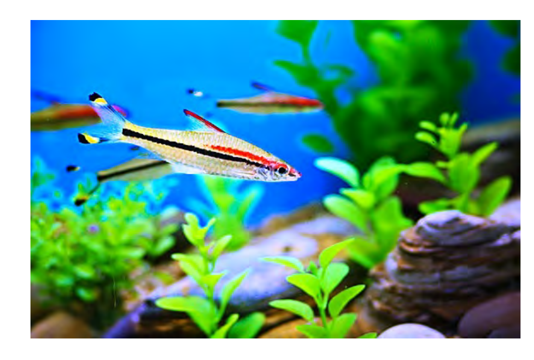


图1.18 海洋生物

欧阳博士对惠子总结说，在这种生命化学起源假说下，像大蒜等植物开始也只有一个细胞，即原核细胞，不能通过光合作用吸收养分，只能靠吸收环境中的营养

物质演化成自养植物，如蓝藻等，逐渐演化成由藻类和菌丝组成的地衣等低等植物、苔藓植物，再演化、进化为蕨类植物，出现了种子植物。那么，地球上的植物是怎样进化的呢？欧阳博士问惠子并解释着。

4.2.**植物进化与分类**. 地球上的植物，包含了树木、灌木、藤类、青草、蕨类及绿藻、地衣等熟悉的生物，数量估计在50万种以上。地球上最早出现的植物属于菌类和藻类，藻类一度非常繁盛。大约在4.38亿年前，绿藻植物摆脱了水域环境的束缚，登陆陆地，进化为裸蕨类植物和蕨类植物。大约3.6亿年前，裸蕨类植物、蕨类植物逐渐灭绝，植物进化为石松类、楔叶类、真蕨类和种子蕨类植物，开始形成一定规模的沼泽森林。大约2.48亿年前，地球早期出现的植物几乎灭绝，裸子植物兴起，一些植物摆脱了对水的依赖，森林开始形成。在大约1.4亿年前，被子植物从裸子植物中分化出来。进入新生代以后，被子植物在遗传、发育以及茎叶等结构上，尤其是在花这种繁殖器上表现出的进步，使它们能够在应对自然上，由遗传变异而适应环境条件的变化，分化出更多植物类型。

地球上常见的植物有八类，包括：①裸子植物，是古生物中的一种，几乎遍布于各大陆，有乔木、灌木、藤木等类型；②被子植物，是有花的植物，通过花蕊来繁殖后代，大约占据了植物种类的50%；③苔藓植物，是分布极广、非常耐候的一类植物，喜欢在潮湿环境中生长，在地球极地、热带等地都能见到，一般高度2cm-5cm，最高也就是30cm；④蕨类植物，是所有低洼地生长的木生植物的总称，其长相优美，观赏价值高，是花卉市场上的一种观叶植物；⑤藻类植物，是一种在光合作用下会产生能量的简单植物；⑥种子植物，是裸子植物和被子植物的统称，是植物界最高等、体内有维管组织、能产生种子并繁殖的一类植物。例如，松树、柏树、板栗树等；⑦地衣植物，是地球表面真菌与藻类共生产生的一类植物，对大气污染十分敏感，可作为大气污染的指示植物。按地衣的外形，有壳状、叶状、枝状地衣等类别，如雨后草地上的地卷属、石耳属和生在岩石或树皮上的梅衣属等；⑧菌类植物，是人们可以食用的大型真菌的总称，指大型真菌中能形成具有胶质或肉质的子实体或浚河组织，并能食用或药用的菌类，像灵芝、木耳、猴头菌、竹荪、香菇等。



图1.19 植物结构

4.3.**植物结构**. 植物作为地球上一种生命形式，结构上一般由根、茎、叶、花、果实和种子等六大器官组合而成。这当中，根是植物的营养器官，一般扎根于地表以

下，吸收土壤里面的水分和其他营养成分,溶解其中的离子，具有支持、贮存合成有机物质的作用。一般地，植物的根由薄壁、维管、保护、机械和分生等组织构成；茎是植物体的中轴部分，输导营养物质和水分以及支持叶、花和果实生存，有的还具有光合作用、贮藏营养物质和繁殖功能；叶是维持植物营养的器官，叶内含有叶绿素，可以与太阳发生光合作用,进行有机合成，为根系从外界吸收水和矿质营养提供源动力。

植物的花长在花托上，最外面是花瓣，中间包裹着雄蕊或雌蕊，是实现植物传宗接代的生殖器官。一般地，花香及其鲜艳的色彩是为吸引昆虫前来采粉，完成授粉，实现传宗接代。一些草类、树木的花颜色暗淡、没有香气，这类植物一般是靠风力完成授粉。


人工授粉


昆虫授粉


天然授粉

图1.20 植物授粉

植物的果实是传播种子的媒介，由花的雌蕊发育长成。大多数植物的果实里面包裹着植物的种子，有的有一籽，有的则有多粒。不同的果实成熟时，有的富含水分，有的则变干。一般地，那些含水的果实色泽鲜艳，吸引动物将其吃掉后将种子带往远方，在这些动物把种籽排出体外后会在大地上生根发芽；一些豆科植物，在果实成熟后会自动爆裂开，将种子散落到附近的地上伺机发芽；有一些植物的果实很轻，被风带到遥远的地方散落在地上；还有一些植物的果实表面带有毛刺，可以沾到动物身上，当其从动物身上脱落时在地上生根发芽，为植物的种族延续提供条件。就这样，植物和动物在长期生存和发展的过程中，形成了一种相互适应、相互依存的关系。一方面，植物滋养动物，动物有赖于植物而生存；另一方面，动物帮助植物传粉，帮助植物传播果实和种子，有利于植物繁殖，扩大植物的分布范围。

欧阳博士让惠子总结一下大蒜作为一种植物，它的种子和果实是什么。惠子想了想说：“我在小碗里种大蒜，用的是一瓣一瓣的蒜瓣，大蒜的种子应该是蒜瓣吧。可我种的大蒜还没有开花结果呢，大蒜的果实是什么我不知道。”欧阳博士告诉她：“大蒜的果实还是大蒜，由最初一个蒜瓣成长为一头大蒜，里面可能有好多个蒜瓣。”

4.4.**植物作用**. 植物参与自然循环的作用主要有两类。一类是光合作用，一类是呼吸作用。这里，植物的光合作用，指绿色植物吸收光能，把二氧化碳和水合成富

能的有机物，同时释放出氧气的过程，包括光能的吸收、传递和转换，把光能转换成电能，再把电能转变为化学能。植物的光合作用是地球上最普遍、规模最大的自然反应过程, 它在有机物合成、太阳能蓄积和空气净化等方面起着一种天然调节作用，是为人类农业生产和动物提供氧气的自然基础。

植物的呼吸作用，是植物体内新陈代谢的枢纽。植物通过呼吸作用分解物质，以提供体内的各种生命活动所需能量，合成重要的有机物。同时，增强植物的抗病能力，分为有氧呼吸和无氧呼吸两种。一般地，高等植物以有氧呼吸为主，但在缺氧条件和一些特殊组织中，植物也可进行无氧呼吸，以维持新陈代谢的正常进行。

植物的光合作用和呼吸作用，是维持生态平衡的自然机制。欧阳博士总结说，这主要变现在：①植物由光合作用把二氧化碳、水转化为氧和有机物，由呼吸作用将氧和有机物分解为二氧化碳和水，这种光合作用在自然界中起着无可替代的维持自然界碳-氧平衡的作用。同时，光合作用为人类与其他生物和平共处提供了物质保障；②植物在自然界物质循环中起着一定的调节作用。我们知道，自然界的物质处于不停的运动当中，而植物在物质运动当中起着一种重要的调节作用。例如，水是自然中维持生命的基础。自然界中，植物由蒸腾增加空气水分，从土壤中摄取所需水分，再以气体形式返回到环境中，自然的水循环处于相对平衡状态。同时，绿色植物在光合作用过程中，不断释放氧气以充实动物呼吸、燃烧等消耗而引起的氧气不足，维持自然中氧的平衡；③植物对环境的保护作用。人类活动对地球的环境污染，已严重威胁到人类的生存，二氧化硫、二氧化碳等有害气体与空气中水发生化学反应产生酸雨，超量排放会导致树木枯死、粮食减产和人类死亡疾病增加的恶果。而植物可以有效吸附空气中的灰尘，转化大气中有害物质，减少大气中的有毒物质含量，通过蒸腾作用增加空气湿度和降水，起到维持生态平衡的作用；④植物有保持水土的作用。植物的地上枝叶能有效减小雨水对土壤的冲击力，地下的根系能紧紧抓住土壤，防止其被雨水冲走、下渗等水土流失；⑤植物的杀毒抑菌作用。一些药用植物在其生理过程中释放出具有一定抑菌作用的挥发性物质，对清除空气中的细菌病毒，增强人体免疫力具有一定的作用；⑥美化生态环境，使人心情愉悦。绿色让人心平气和，红色、粉色让人喜悦、欢快。人的生存环境中，花草等植物是人身心健康的自然调节剂，对调节人的心情和精神、缓解紧张和焦躁、稳定情绪，让人心情愉悦有一定调节作用，这是人类美化生存环

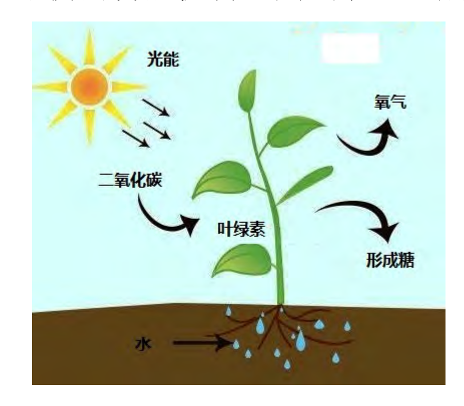


图1.21 光合作用

境的目的所在。

毋庸置疑，人与植物是一种共生关系。望着窗外又是中度污染的空气和不给力的阳光，欧阳博士问女儿是否明了空气污染的原因，惠子反问道:“爸爸，是不是绿色植物太少而人类产出的污染物又太多?”欧阳博士肯定了女儿的回答，说:“是这样的!维持空气清新的首要条件是人类排放的污染物为绿色植物所消纳。这些年，人类发展中，盲目地砍伐森林和树木，减少农田和水域，以及对居住环境中的地表进行硬化处理等，一定程度上阻碍了气体在空中与地下的自然循环。从这个意义上看，生态环境的保护首先是人类自己要减少污染物在自然界的排放，同时还要扩大森林和绿色植被的面积，维护自然界的生态平衡。”植物是地球上一种最常见、最普遍的生命形式，欧阳博士问惠子:“植物能否像动物那样，随意的在陆地上来回走动呢?”惠子睁大眼睛说:“不能吧，那样不是和动物一样了吗!”欧阳博士说:“正确!植物的最大特点在于固定在地球的某一个点上生长，不能离开那个固着点满处走动。不过正如人类对宇宙、星系和地球的认知一样，传说中也对一些特定植物赋予了一定的人格。你听说过人参系红绳的故事吗?”惠子说:“没听过，爸爸!您讲讲吧，一定很有意思!”

[**人参系红绳的故事**] 人参是一种名贵的中药材，被视为百草之王，虽不能包治百病，但长期食用确有补元气、提高自我免疫力和强身健体的功效。在一些武侠影视剧中，主人公受了重伤往往是喝一碗人参汤就功力如初，最后完胜群魔，彰显人间的正义。民间传说中，说人参有灵气，是成精的产物，发现人参后要用一根红绳绑住。否则，人参就会逃跑，把人参传得神乎其神。

据说在长白山中有一座道观，里面有一个老道士和一个道童。每天，道童除念经外还要上山砍柴、担水、打扫庙宇和做饭，侍候老道，老道士稍不顺意就要打罚这个道童。有一天，道童强忍着身上的伤痛去山上砍柴，边砍边抹着眼泪。这时，来了一个白胖的小娃娃，身上带着一条红布肚兜，招呼他说:“小哥哥，你哭啥呀?谁欺负你了?”道童把自己在道观中的遭遇，从头到尾说给小娃娃听。



图1.22 人参系红绳

小娃娃同情地看了看道童身上的伤疤说:“你等一下，我给你拿点药治伤。”不一会儿，小娃娃手里拿回一枚小红果放到道童手里，让他吞下，说我帮你砍柴，咱俩一起玩。说来也奇怪，吞服小红果后，道童身上一点也不感觉疼，而且有劲了。两

个人一起砍了一大捆柴，在一起高兴地玩了起来，直到快中午了，俩人才恋恋不舍的分开了，约好下午再一起玩。下午，道童一到砍柴的地方，就发现那个小孩又来了。两个人一起又砍了一大捆柴，唱着跳着，高兴的不得了。这样持续了一个多月。每一次，只要道童被老道打了，小孩就给道童一枚小红果子吃，道童的身体因此强健了很多，且面色红润，身上伤痕也都看不见了。

老道看在眼里，心里却一直纳闷。道童再上山砍柴时，老道便偷偷地跟在他后面发现了那个小孩。老道问道童那个小孩是哪来的，道童不说。老道将道童吊起来拷打，道童只好说了实话。第二天一早，老道拿出一个红线穗交给道童，让他与小孩分手时把上面的针别在小孩的肚兜上。道童不知道老道用意，趁着俩人砍完柴玩的时候，偷偷地把针别在了小孩的肚兜上。老道躲在边上，见状一把抢过线穗，把小孩五花大绑，拎着小孩一路小跑，回道观放在锅里，让道童赶快生火，要把小孩煮熟后享用。原来，老道知道那个小孩是千年修炼的人参精，吃了能成仙。

道童见老道把小孩捆起来要煮熟吃了，当然不干。他趁老道没主意，把水浇到砍回来的柴上。柴火在炉灶里怎么点也点不着，灶房里浓烟滚滚，老道呛得受不了，破口大骂地跑到灶房外。这时，道童趁机掀开锅盖，把小孩从锅里抱出来，解开捆绑的红绳，让小孩赶快跑。小孩知道，如果自己跑了，老道会责罚道童，说不定还有性命之忧。于是，小孩拉着道童的手说："小哥哥，你跟着这样的师父是学不到什么本事的，咱们还是一起走吧！"道童一想也是，便点头同意。小孩拽着道童嗖的一下就飞到了外面林子里，带道童云游四海去了，让老道吃人参的梦想泡汤。这正是，红绳系在人参上，道童解绳救参娃。

那么，人参真的有灵性吗？欧阳博士回答说，当然没有！人参系红绳的故事是民间一个传说，因为山里面的人参太少，挖参人偶然发现一棵人参，一看太小，想让它长几年再挖，不料想这当中人参让他人挖走了。几年后，这个人回到原地怎么也找不见那颗人参，编出人参不用红绳系住自己会跑的故事。实际上，挖参人给人参系一根红绳，是告知其他挖参人，这颗人参属于我的意思。

第5节 动物摇篮

地球上的生物，包括植物和动物构成一个生物圈，与环境间不断地进行着物质和能量交换，建立动态平衡关系。这当中，植物固着在地球上一个点自养，动物与植物相反，不固着在一个点，是异养生物。动物和植物在自然界中是相互依存、相互发展的。例如，动物帮助植物传播粉，使植物繁殖后代，如蜜蜂采蜜，鸟食草籽等，帮助植物传播果实和种子，扩大植物的分布范围等。同时，动物作为消费者，直

接或者间接地以植物为食，通过消化和吸收，将摄取的有机物质变成身体能够利用的物质，让这些物质在体内分解、消化和释放能量，产生二氧化碳、尿液、粪便等可为生产者利用的物质，促进生态系统循环，起着生态平衡的作用，即保持生态系统各种生物的数量和比例处在一个相对稳定状态。

有一天，惠子从外面抱回家一只小猫，说是几个同学在楼下废品堆里发现了一窝出生不久的小猫冲着她们喵喵地叫，很可爱的样子，便每人抱了一只回家养。



图1.23 猫抓老鼠

欧阳博士帮惠子给小猫洗完澡，用纸盒子给小猫搭了一个窝。看女儿拿着一块肉骨头逗猫欢快的样子，欧阳博士问她猫最喜欢吃什么，惠子回答说："老师讲过猫最喜欢吃鱼，可家里没有鱼啊。"欧阳博士又问："河里面有很多鱼，可猫为什么不自己到河里抓鱼呢？"惠子说："猫不会游泳，下河抓鱼不是会被淹死吗！对了，爸爸，猫为什么不学游泳呢？"欧阳博士回答说："猫不是不会游泳，猫情急之下也会游泳。猫是一种陆地动物，喜欢吃鱼。如果能随意出入水里面，鱼就没有活路了，其他生物也会把猫灭绝，这样，就打破了生态平衡，这就是自然的伟大，让猫和鱼的生存区域不同，让猫生活在陆地，让鱼生活在水里。那这样一来，猫是不是会饿死呢？"惠子一听说："不会啊，猫还喜欢吃老鼠，猫和老鼠都生活在陆地，它们是天敌。"欧阳博士继续问："猫为什么与老鼠是天敌呢？"惠子想了想说："课堂上老师没讲过，只是说猫见着老鼠就抓，说它们是天敌。"欧阳博士解释说："动物天敌是有客观原因的。猫行动敏捷，善跳跃，是一种夜行动物，但体内如果缺乏一种叫牛磺酸的物质，猫的夜间视觉会很弱而失去生存能力。老鼠体内恰恰含有丰富的牛磺酸。猫吃老鼠，一方面是因饥饿，另一方面是生存法则，猫的体内需要牛磺酸才能在自然界生存，这才是猫抓老鼠、吃老鼠的原因，这就是生态系统中的食物链。"

5.1.**动物食链**. 欧阳博士告诉惠子，生态系统中的食物链，是指各种生物为维持其自身的生命活动，必须以其他生物为食物的一种由食物联结起来的吃与被吃的关系链条。例如，在猫和老鼠的关系上，老鼠是猫的食物，即猫吃老鼠。那么，老鼠吃什么呢？老鼠是一种杂食动物，人能吃的食物它都能吃。这也是老鼠偷吃人们种植的高粱、玉米、稻谷、花生等农作物，以及加工后的食品的原因。

食物链是一种以生物种群为基本单位，联系着一个区域中的不同的物种间能量

和营养素在不同生物间的传递，即供养关系。例如，图1.24所示生物间的供养关系。根据不同生物种群在生态系统的能量和物质运动中所起的作用，一般分为生产者、消费者和分解者等三类。这里，食物链中的生产者主要是一些绿色植物，即那些能够通过自然界中的无机物制造营养物质的自养生物。一般地，生产者从自然环境中得到二氧化碳和水，在太阳光或化学能作用下合成那些以葡萄糖为主的碳水化合物，成为消费者和分解者获取生命能量的来源。注意，生产者是生态系统能量传输的基础，因为太阳光能只有通过生产者的合成，才能不断输入到生态系统中转化为生物能，成为其上的生物种群，即消费者和分解者生命活动中的可吸纳能源。

食物链中的消费者属于生态系统中的异养生物，即那些直接或间接以植物为食的动物，一般分为食草动物和食肉动物两大类。这当中，食草动物以一些植物为生，通过吞食植物而获取所需食物和能量。例如，昆虫、兔子、羊、野猪和大象等；食肉动物捕食动物，通过捕食食草或其他食肉动物而生存。例如，狐狸、黄鼠狼、老虎、狮子等。此外，自然界中还有一种特殊的消费者，即寄生物和杂食类消费者。这里，寄生物是指一种生物寄生在另一种生物上，后者给前者提供营养物质和居住场所。例如，细菌、病毒、真菌和寄生蠕虫等；杂食类消费者介于食草性动物和食肉性动物之间，既吃植物，又吃动物，如鲤鱼、熊等。这当中，人类是最高级的消费者，可以同时以动物和植物为生，获取营养和能量。

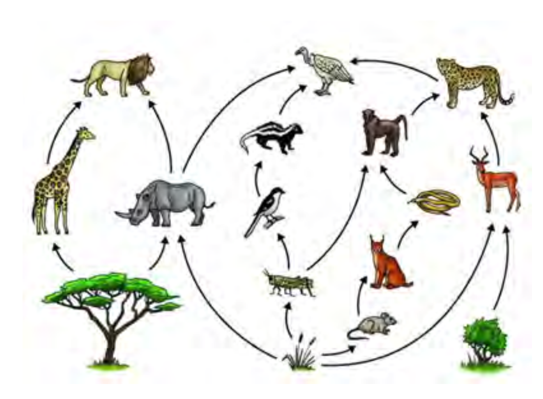


图1.24 食物链

食物链中的分解者又称为还原者，也属于异养生物，主要指细菌和真菌，也包括一些原生动物和以腐食性动物尸体为食的动物，如食枯木的甲虫、白蚁、蚯蚓和一些软体动物等。这类动物把动植物的残体，食用后分解为简单化合物，再分解为无机物排放于大自然，让生产者可以再次利用，形成自然界的生态循环。

生物生存的基本法则是物竞天择，这当中的“物竞”指生物的生存竞争，“天择”指自然选择。这一基本法则，是物种间和生物内部的相互竞争、物种与自然之间的抗争，能适应自然者被选择存留下来的一种自然法则。欧阳博士告诉女儿，这方面的一个有名的例子就是恐龙灭绝。

说是大约在两亿多年前，地球处在爬行动物统治时代，那时的地球空气温暖、潮湿，食物很容易找到，恐龙是那时的世界统治者。它的体格最大，又适宜生活在沼泽和浅水湖里。恐龙在地球上大约统治了1亿年时间，但后来不知是什么原因，恐

龙在距今大约6500万年前的某个时间在地球上突然灭绝了，只留下了大批的恐龙化石。



图1.25 恐龙

[**恐龙灭绝之谜**] 地球上曾有很多生物种类消失的现象，这是生物进化中的必然结果。例如，中国《山海经》中的许多珍禽异兽在今天已不复存在，但像恐龙这样一个曾经的地球统治家族为什么会突然消失，科学界对是什么原因导致了恐龙灭绝一直争论不休。有人说是地球在6500万年前发生了造山运动，平地上长出许多高山来，沼泽减少，气候不再那么湿润温暖，造成恐龙食物不足。同时，恐龙的呼吸器官不再适应环境变化导致其物种灭绝；有人说是宇宙超新星爆发，引发地球气候陡崖式的变化，恐龙不再适应地球环境；也有人说是由于海平面下降，新的陆地出现，恐龙迁移不适应新环境，最终导致灭绝；还有人说是地球气候陡然变化，气温大幅度下降造成大气含氧量下降，以及大陆漂移、地磁变化、物种老化等原因导致恐龙灭绝。

人们普遍接受的是陨石撞击地球导致恐龙灭绝。据说是在6500万年前一天，天空中突然出现一道刺眼的白光，一颗直径约10km的小行星从天而降，以每秒40km的速度撞进大海，在海底撞出一个巨大的深坑。接着，海水被迅速汽化，大量蒸汽向高空喷射，达数万米之高。随之而来的，是掀起至少5km高的海啸以极快的速度向四周扩散，漫过陆地上的制高点，引发德干高原强烈的火山喷发，使地球板块的运动方向发生了改变。随后的数月甚至数年，陨石撞击地球引发的海啸和火山灰充满天空，气温骤降，气候已不再满足恐龙生存。大雨、山洪引发的泥石流将恐龙卷走，埋葬于泥土，生物史上的恐龙时代就这样悲壮地结束了。

5.2.**动物分类**. 地球上有多少种动物呢？欧阳博士接着说，动物一般分为无脊椎动物和脊椎动物两大类，已鉴别出46900种脊椎动物，包括鲸鱼、鲨鱼等鱼类动物，蛇、蜥蜴等爬行类动物，家禽、鸟类动物，以及牛、猪、羊狗等哺乳类动物等；无脊椎动物是比较低等的动物类群，在种类、数量上，无脊椎动物都远超过脊椎动物，占90%以上，包括海洋中的水母、章鱼，以及陆地上的昆虫、寄生虫，如蚂蚁等。

脊椎动物按其适应的生活环境，可分为水生动物和陆生动物两大类，还有可以同时在水域、陆地生活的动物，称为两栖动物，如鳄鱼、青蛙等。注意，如果把近地空也看作动物的一个生活环境，动物实际上有三个栖息地，即水域、陆地和空中。其中，鱼类生活在水域，四足类动物、人生活在陆地为一栖动物，鳄鱼、青蛙等可以同时在水域和陆地栖息，鸟类、蜜蜂等飞行昆虫可以在陆地和空中栖息，称为两栖

动物。地球上至今没有发现三栖动物。有人认为蜻蜓是三栖动物，因为蜻蜓的幼虫产于水中，成年后可以在陆地和空中生活。但实际上，蜻蜓仍属于两栖动物。欧阳博士告诉女儿，三栖动物仅出现在人类的上古神话或是传说中，比如中国人普遍认可的龙，它可以同时生活在水域、陆地和空中。

[**龙的传说**] 中国人所说的龙，是一种能兴云雨、利万物且变化无常，能缩小变为蚕蚁，伸展能遮住天，时而显露于云端，时而隐入深渊的神异生物。正因为此，中国人称自己为“龙的传人”。关于龙的记载，在中国古代经典著作中几乎每一本书都有，关于龙的传说和神话也不胜枚举。例如，《山海经》海外南经中有“南方祝融，兽身人面，乘两龙”和海外西经中夏后启“乘两龙，云盖三层”的记载等。

在龙的民间传说中，大都把当地的山峰、湖畔、峡谷等拟人化为龙，有义龙为善，有恶龙为祸。这当中，以“二龙戏珠”的故事流传最为广泛。相传在天池山中有一个深潭，有两条青龙在此修炼，它们依农时行风播雨，让当地百姓们过着衣食无忧的日子。这两条龙也备受人们喜爱。

据说，天池是天宫中的仙女洗澡的地方。每当天高云淡、月洁风清时，仙女们就到天池里洗澡嬉戏。有一次，仙女门在天池中洗得正在兴头上，忽然游来一个浑身长毛的怪物，对池水中裸身仙女进行调戏，吓得仙女们高呼求救。两条青龙听到仙女们的呼救声，立马披甲持械奔向天池，见是一只熊怪在调戏仙女，二龙齐心奋战将这只熊怪打败。



图1.26 二龙戏珠

仙女们回宫后，把青龙搭救的事告诉给了王母娘娘。王母娘娘为奖励青龙的义举，从宝葫芦里取出一颗珠子给青龙，让它们早日修炼成仙。可是，金珠只有一颗，两只青龙谁也不想独吞下去。结果你让我，我让你的，一颗金珠在两只青龙之间蹿上跳下，金光闪闪。这件事惊动了玉皇大帝，派太白金星前往查看。太白金星视察后，把两条青龙潜心修炼、心地善良和讲义气的品德，如实向玉帝作了汇报。玉帝听后很感动，又取出一颗金珠给青龙送去。这样，两只青龙各吞下一颗金珠，成为掌管百姓疾苦的天神。

欧阳博士告诉惠子，地球上出现过恐龙，因为有恐龙化石为证。虽然中国人自己说是“龙的传人”，但龙仅是在一些文字记载中出现过多次，在自然界中是否真实的存在过，人们尚没有找到相关物证。司马迁的《史记》中“老子韩非列传”篇有一段记载孔子问礼于老子后回答门人的话，说：“鸟，吾知其能飞；鱼，吾知其能游；兽，吾知其能走。走者可以为罔，游者可以为纶，飞者可以为矢。至于龙，吾不能知，

其乘风云而上天。吾今日见老子，其犹龙邪!”意思是:“鸟，我知道它能飞；鱼，我知道它能游；兽，我知道它能跑。会跑的可以用网捕，会游的可以用线钓，会飞的可以用箭射。至于龙，就不是我等能知晓的了，因为龙乘风驾云、遨游天空。我今天见到的老子就如同龙一样的感觉!”这段话如果真是孔子的话，龙在那时就应存在。否则，孔子的门人可能就无法理解孔子的回答了。

5.3.**动物体系统**. 猫身上有四支爪子，有嘴巴、鼻子、耳朵和眼睛，一般动物身上是否也有这些器官呢？惠子问。欧阳博士回答说，类似地，动物身上也都有这些器官，其功能也类似，比如嘴巴是进食器官，眼睛是视觉器官等。经由动物解剖实验，人们知道动物器官的组合结构。

一般地，动物由皮肤系统、骨骼系统、肌肉系统、消化系统、呼吸系统、循环系统、排泄系统、神经系统、内分泌系统和生殖系统等10大系统组合而成，在动物体内起着不同的功用。这当中，①皮肤系统，对外界有感觉、调节、抵御和保护作用，由汗腺呼吸、吸收、排泄体内代谢废弃物；②骨骼系统的功能，是支撑动物体形，提供肌肉连接面，协助肌肉运动，为内部软组织结构提供保护，一些骨骼还有在骨髓内产生血液细胞的能力；③肌肉作用主要有二。一是静止作用，使身体保持一定姿势，取得相对平衡，如站立等静动作，二是运动作用，使身体完成各种动作，如奔跑等运动动作；④消化系统起食物分解、能量转化和提供身体所需营养的功能。大多数动物有一个胃，但也有多个胃的动物。例如，骆驼有三个胃室，鹿和牛有四个胃室等；⑤呼吸系统的主要作用是为有氧呼吸提供身体所需氧气，维持生命活动的正常进行；⑥循环系统保证动物的血液循环，即血液由左心室经主动脉、分支流向全身毛细血管网，再流经大、小静脉汇集成上、下腔静脉，最后回流到右心室。同时，血液由右心室射出，经动物肺动脉、各级分支，经动物肺泡壁毛细血管网，经肺静脉回流到左心房。大多数动物血液的颜色是红色的，但也有其他颜色。例如，虾、蜘蛛的血液是青色的；⑦排泄系统的功能，是将动物体在新陈代谢过程中或是摄取食物时产生的体不能再利用甚至是有毒的废物排出外，调节体内水、盐代谢和酸碱平衡，维持动物体内环境的相对稳定；⑧神经系统是动物体内对生理功能活动的调节主导系统，一是控制与调节各器官、系统的活动，二是经由神经系统的分析与综合，对环境变化作反应与适应；⑨内分泌系统是动物神经系统以外的另一重要的机能调节系统，作用在于

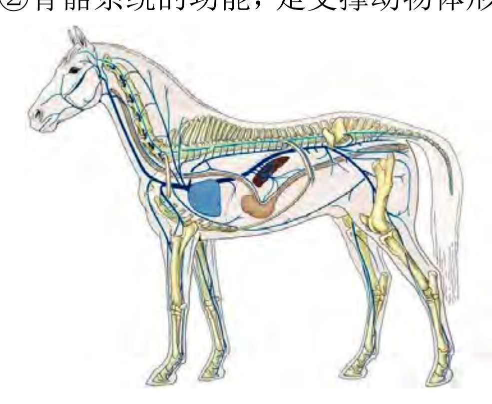


图1.27 马解剖图

维持内环境的酸碱平衡和温度稳定、调节新陈代谢、保证生长发育和功能活动，以及生命延续和繁衍；⑩生殖系统的功能是分泌性激素，产生生殖细胞，繁殖后代和种族延续，分为卵生、胎生和卵胎生三种。这里，卵生指动物产下卵后经过孵化变成动物，其营养来自卵本身，胎生指人或某些动物的幼体在母体内发育到一定阶段以后才脱离母体的这种生殖方式。例如，鸟类、家禽类为卵生，牛、羊、猪为胎生。即便是胎生动物，还分为一胎生一个和一胎生多个，如猫、老鼠就是一胎生多个；卵胎生动物介于卵生和胎生之间，是受精卵在母体内发育成个体后才产出母体，所需营养依靠卵自身所贮存的卵黄等营养物，如蝮蛇和孔雀鱼等就是卵胎生动物。

动物行为是单独的还是像人类一样的社会化生活呢？欧阳博士告诉惠子，动物分为单独行为和社会行为两种。有些动物喜欢独居，一生独来独往，如像蜗牛、海龟等，仅是在生殖季节找一个临时性伴侣，生殖后各奔东西。但有些动物，像蜜蜂、蚂蚁等生下来就是在一个拥挤喧闹的群体里，行为上相互影响、相互作用，表现为一种社会行为。一般地，动物在食物链中的等级越低越喜欢群居。群居性的动物遵从协同作战、共同捕猎，以发挥社群的群体优势。与此同时，群居也让动物在食物、空间乃至配偶资源分配上产生竞争，易出现纠纷与争斗。为保证种群的延续、壮大和趋利避害，不同的动物种群都有自己的一套行为准则，以约束个体行为。

5.4.**动物社会**. 动物的社会行为，一般包括优势等级序列、通讯行为、求偶行为、利他行为和亲杀行为等。这当中，优势等级序列是动物社群中的一种等级制度，是动物凭自身的实力，通过社群约定俗成的规则竞争取得相应地位，简单说就是从大到小，从强到弱进行排序。例如，猴王是在猴群打斗中胜出的那一只猴子，其他猴子只能为其马首是瞻；通讯行为指动物间通过身体触觉、视觉或气味等交互信息，表示友谊或是主权等，例如，小狗在室外到处撒尿就是在宣示领地主权，是为领地占领的需要；求偶行为是动物间一种种族延续的行为，功能在于吸引异性、能量释放和生殖，延续种族；利他行为，指个体为群体利益或者其他个体利益牺牲自己的利益，甚至是生命。例如，雄性蜘蛛在交配后会主动让雌性蜘蛛吃掉，奉献自己的身体作为母蜘蛛的营养物质等；亲杀行为是一种典型的利己行为。例如，狮王争霸中胜利的一方会咬死正在哺乳的小狮子，虎鲨一次产一百多个卵，可孵出来的小鲨鱼只有一条，原因是其他卵都被这一条幼崽吃掉了。

欧阳博士告诉惠子，动物社会也有严格的角色分工和社会秩序，以使种群发展符合自然法则，但人们对动物行为的了解不多，仅是在力所能及范围内对一些动物进行观察与研究，知晓一些动物的社会属性，如蜜蜂和蚂蚁等。

[**蚂蚁社群**] 蚂蚁是一种社会性的杂食昆虫，在$15-40\ ^oC$可正常生长，最佳生长温度为$25-35\ ^oC$，冬季低于$10\ ^oC$进入冬眠。大多数种类的蚂蚁喜欢筑巢于地下，

挖有隧道、小室和住所，将掘出的土、草根、叶片等堆积于入口形成小丘状，还有一些蚂蚁用植物的叶片、茎、柄等筑成纸样巢，挂在树上或岩石间起保护作用。

蚂蚁社群是一个母系氏群，由一个蚁后，数个雄蚁、工蚁和兵蚁组成，不同角色有着明确的职责分工。其中，蚁后是有生殖能力的雌性蚂蚁，在群体中体型最大，有腹部大、生殖器发达、触角短、胸足小，有翅、脱翅或无翅等特点，负责统治整个蚁群、产卵和繁殖后代。同时，为防止工蚁具有生殖能力而剥夺其统治权，蚁后会不断地分泌一种气味阻止蚁窝中工蚁的生殖器发育；雄蚁的职责是与蚁后交配产卵，有发达的外生殖器，具有头圆小、上颚不发达、触角细长等特点；工蚁是蚁群中没有生殖能力的雌性蚂蚁，职责是建造和扩大巢穴、采集食物、伺喂幼蚁及蚁后等，特点是无翅、个体小、复眼小、上颚、触角和三对胸足都很发达，善于奔走，数量在蚁窝中最多；兵蚁担负着抵御外侵和保卫，其特点是头大、上颚发达，可以粉碎坚硬食物，是战时的武器。一般是由蚁后组建，通过婚飞方式的两性相识为起点。双方一见钟情，在飞行中或飞行后交尾。雄蚁寿命不长，交尾后不久即死亡。蚁后脱掉翅膀，在地下选择适宜的场所筑巢产卵。蚁卵发育成熟，幼虫孵化出来，蚁后便开始忙碌，由它嘴对嘴地给幼虫喂食，直到幼蚁长大为成蚁，可独立生活。待第一批工蚁长成后，由这些工蚁挖开通往外界的洞口，寻找食物，扩大巢穴面积，为蚁群中的成员提供住房。这时，蚁后开始坐享清福，成为家族统帅，但它还要继续交配产生受精卵，以维系蚁群繁衍，寿命可长达15年左右。

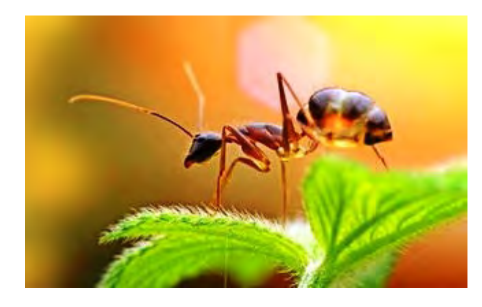


图1.28 蚂蚁社会

欧阳博士总结说，人类的早期社会也是母系氏族社会，是一种以种群生存和繁衍为目标，进行社会分工和秩序构建的社会，与今天人们在自然界中观察到的蚂蚁或蜜蜂社会很像。但人与动物的最大区别，在于人类活动是在对自然认知的基础上寻求人类自身的可持续发展，是一种主观行为。为此，需要在遵从自然规律的基础上，对自然不侵扰或是把侵扰降低到最小，因为人类对自然的侵扰累积到一定程度将由“量变”产生“质变”，影响宇宙秩序，进而影响人类自身的生存与发展。

第6节 注释与评论

6.1. 探索未知事物是每个人的心理诉求，但随一个人年龄的增长，这种诉求发展类似于抛物线，会逐渐减弱而回归到只关心身边的事情，这是正常的，因为随一个人年龄的增长和知识的不断丰富，人在处事时的安全感逐渐增强。人的这种诉求尤其体现在求学时代，以小学、中学时期最为渴望，诸如宇宙起源、我们从哪里来

到哪里去等宇宙极问，但这类问题即便是对成年人也没有确定性答案。以宇宙起源为例，宇宙起源于大爆炸仅是一种还原宇宙起源的科学假说。类似地，还有盘古开天地、上帝创世说等传说或神创，见文献[MaL]、[Mao2]和[Mao48]、[Xie]和《圣经》等，都是人在对事物认知中为内心寻找的一个宁静港湾。对小学生求知而言，宇宙大爆炸说是难以理解的，尤其是夸克、轻子等基本粒子与相互作用，只能比拟为生活中的一个鞭炮点燃后的爆炸，毫无童趣可言，但盘古开天地与神创说以人为创世主体，无论是盘古举板斧劈开混沌世界还是耶和华挥手产生万物，对小学生，甚至成年人都较之宇宙大爆炸说形象而乐于接受，因为小学生在对世界的认知上犹如一张白纸，所理解的世界与成人不同。他们不迷信书本，更不迷信权威，喜欢用已知去理解未知并一再追问为什么，这正是一个科学工作者需要拥有的探索热情。

6.2. 人在地球上观天识物，是以人的视角在认知万物。这样，认为地球是宇宙中心，人是宇宙主宰进而以上天、上帝之子统治社会迷惑民众就是一种必然的政治手段。牛顿与爱因斯坦等人对人认知万物的最大贡献，在于打破了宇宙的神创说，不迷信而客观地还原宇宙万物的面目。牛顿的《自然哲学的数学原理》[New1]、[New2]采用逻辑推理，由机械运动的一组公理、定律和引力成功解释了地面运动和天象，包括水星、金星、火星、木星、土星及卫星、月球的观测数值和运动规律，统一了地面和天体运动；爱因斯坦的广义相对论[Ein1]、[Ein2]实质是客观事物不以人的意志为转移或佛家中的“缘起性空”等哲学思想在人认知客观事物上的体现。广义相对论应用于引力场得出的物质场在引力作用下是一种弯曲空间，就连光线也不例外的结论，极大地冲击了人对万物的认知直觉，形成了局部认知与事物真实的反差。

6.3. 人对植物和动物的认知仍处在初级阶段，除人类数千年来由观察与实验形成的五谷栽培、牲畜饲养等经验外，仍有大量的未知事项需要探索。例如，植物在食物链中一般处在底层，但在适者生存的法则中，其生存理念、相互交流、生物钟、与其他生物共生等在文献《植物在想什么》[Tas]中进行了有益的研究与归纳，值得进一步研究与探索；人们从解剖和细胞、基因等出发对动物生存与行为进行了认知，如文献[Jin]、[Yan]和[Sha]，但仍局限在一些小动物或那些可为人近距离观察的种群。即便是对人类自己也仍存在着大量的未解之谜。例如，人体患病的机理及其传播或感染机制、人的意识行为等。在这一点上，中国古哲学引导下的中医经典，如《皇帝内经.素问》和《皇帝内经.灵枢经》等对人体和动物体有较完整的认知，见文献[Ren1]、[Ren2]和[Zha]等，需要当代人对其进一步发扬光大。

第 2 章
人识万物

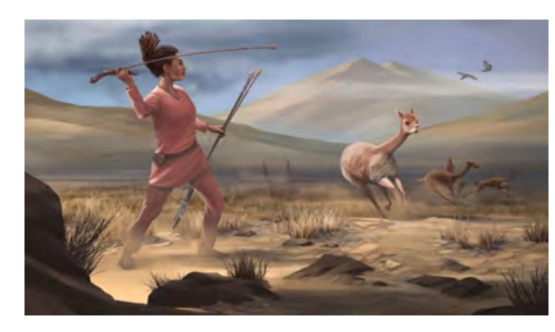
****

知之为知之，不知为不知，是知也。

— 春秋战国.孔子《论语.为政》

第1节 人类溯源

万物是人类自己的认知，不代表其他生物认知，也不一定是宇宙万物的本来面目。有人说，人是万物之灵，这句话出自《尚书.泰誓》中的“惟天地万物父母,惟人万物之灵”一句。这里,“万物”指宇宙中的所有生物、非生物，即客观存在；“灵”指聪明、灵巧和智慧。注意，任何生物均有一定的智慧，以应对自然环境的变化。例如，含羞草上长着很多的薄壁细胞，人一碰到它就会出现生理反应，导致它的叶片合拢。有一些动物的触觉、嗅觉和听觉远超人类。例如，下雨前的燕子低飞，地震前大量的鱼在水中跳跃、打漩、狂游等都是动物适应自然生存的进化结果，是动物对环境变化的感知，而人类对风、雨、雪、寒潮、地震、海啸等自然环境变化，大多数人在爆发前则几乎感知不到，那为什么还说人是万物之灵呢？这句话的本意，是说人具有其他动物所没有的智慧，具有主观能动性的观察、识别、分析、学习和创造能力，可以驾驭其他动物服务于人类社会。



(a) 古人狩猎　　(b) 豹子捕鹿

图2.1 人与动物

然而，与宇宙起源类似，对人类溯源也有一些极问，诸如人作为万物之灵是从哪里来的，是由猴子等生物进化来的，是外星人在地球上抛下的种子，还是外星人在地球上禁锢的罪犯？还有太阳能终将耗尽，人作为万物之灵会与其他生物一起毁灭吗等，人们至今无法给出答案，仅能提出一些假说。按假设的人类发源地，这些假说分为两类，一类是人类起源于地球本体，一类是人类发源于宇宙中地球外的其他星系。

1.1.生物进化说. 生物进化说认为人类发源于地球本体。有一天晚饭前，欧阳博士见女儿没在家，到小区里找她回家吃饭，发现惠子一个人坐在小区垃圾桶前望着垃圾桶发呆，走上前问她:“你在垃圾桶边上干什么呢？多脏啊，快回家吃饭吧!”惠

子回头见是父亲喊她，便走过来问欧阳博士："爸爸，我是从哪里来的呀？"欧阳博士告诉她是爸爸和妈妈一起生的她，惠子不信。欧阳博士反问她："你觉得你是从哪里来的呢？"惠子回答说："课堂上有同学说人是鱼变的，也有同学说人是猴子变的，妈妈说我是您们从垃圾桶里捡来的。我相信妈妈的话，想再捡一个弟弟。可这么多天了，垃圾桶里也没出现过一个小弟弟，您说怪不怪？"欧阳博士又问她："你怎么觉得妈妈的话是对的呢？"惠子回答说："妈妈从来不骗我！我养过鱼，去动物园看过猴子，没有一点迹象能看出我是鱼或猴子变的，我不相信！"欧阳博士说："你是爸爸和妈妈生的，不是垃圾桶里捡来的。"惠子一听问："我是您们生的，是怎么生的？"欧阳博士知道，这是大多数中国父母教育子女时最不愿意回答的一个问题，便隐晦的告诉女儿，是爸爸和妈妈在一起才有了她。可刚开始她太小了，需要先在妈妈的肚子里住上十个月，长大一点了就从妈妈的肚子里出来了，不是垃圾桶里捡来的。

欧阳博士见女儿仍是一脸疑惑，赶紧岔开这个话题，问女儿一个简单问题："$1+1$为什么在数学上等于2而不等于3 呢？"惠子一听回答说："老师教我们$1+1=2$，我们都背过！"欧阳博士解释说，数学上，$1+1=2$ 是因为数起源于数（shǔ），一个一个地数，这样就有了$1,2,3,4,5,\cdots$这些自然数。这样，按数数的规则，$1+1$等于1 后面的那个自然数2，就有$1+1=2$而不能是$1+1=3$。然而，生物学遵循的规律不是数而是男女在一起可以生出一个小孩来，这时是不是1（父）+1（母）= 3（父、母和孩子）呢？惠子听欧阳博士解释后问："爸爸，上次我们发现的小猫有4 个，那不是就有$1+1=6$了？"欧阳博士回答说："是这样的，不过这里的$1+1=3$，$1+1=6$都不是数学规律而是生物规律。在自然数系里，$1+1$一定是2!"这时，俩人已经回到家里，欧阳博士让女儿先洗手，告诉她晚饭后给她讲人类的起源。

晚饭后，欧阳博士给女儿讲生物进化论，说科学家从人类学、考古学、历史学、生物学，甚至化学等角度研究人类的起源，形成多种人类起源学说，但至今没有一种令人信服的解释。相对比较客观的一种观点认为人类是地球生物进化过程中，一种和人类相似的生物，即猿基因的变异结果，因为地球上猿和人的基因最接近。

生物进化说认为，生物进化遵循从低级到高级、从简单到复杂的规律；认为人是由已经灭绝的古猿进化而来，即类人猿因生存需要到地面活动，逐渐学会了两脚直立行走, 解放前肢进化为手,学会使用石块或木棒等自然工具，发展到用手制造工具。对应的，大脑得到进化，出现了人类特征。再进化，即出现猿人、直立人、智人，最后成为现代人，如图2.2中所示。这当中，直立人习惯上称为直立猿人，生活在距今大约170万年或150万年前至二、三十万年前，其脑容量为775～1400毫升，头骨很厚，眉嵴突出，颅骨低平，具有猿的特征但腿骨似人，已可以直立行走；智人分为早期智人和晚期智人。早期智人的体质和形态已接近现代人，但仍保留一些原

始特征，如脑容量大约为1300～1750毫升，脑组织较直立猿人复杂，眉嵴比现代人发达，前额低斜，颌部较突出，颏部不明显等特征；晚期智人又称为新人,出现在距今大约4万年前，其体质形态与现代人类已无多大差别，头骨前额升高，眉嵴几乎消失,颌部退缩,下颏明显。晚期智人形成现代人，一般分为三大人种，即蒙古利亚人种、高加索人种和尼格罗人种。

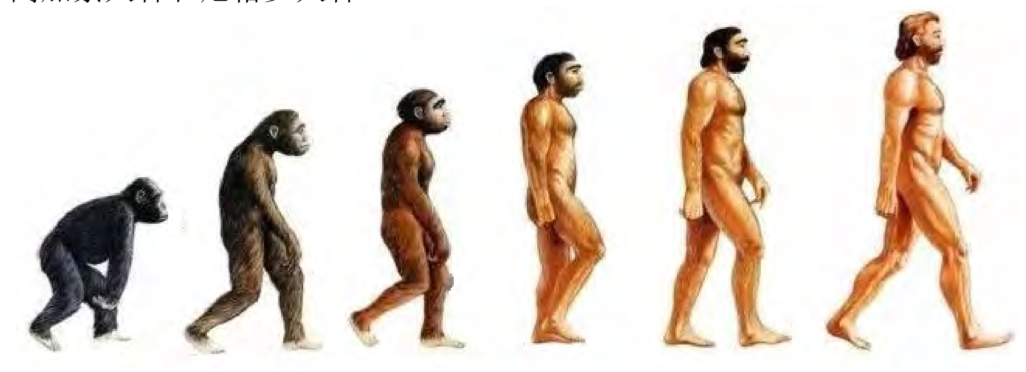


图2.2 人类进化过程

惠子听到这里说:“爸爸，说人是猿变的，可我去动物园好多次了，为什么那里的长臂猿没有一点进化为人的迹象呢？”欧阳博士解释说，据发现的类人猿化石估算，类人猿进化为人至少用了120万年，是一个渐变的漫长过程，不大可能在几年或几十年内观察到其进化发生的细微变化。惠子对欧阳博士的解释不理解，说如果生物进化说是正确的，现如今世界上就应该还有直立人和智人，可现如今根本找不到直立人和智人，难不成人类的出现也与宇宙大爆炸说一样，是所有类人猿在地球上一下子就都变成了直立人，又一下子都变成了智人，最后都成为了现代人，造成直立人和智人都灭绝了，生物种群进化不是应当一步一步地进行，不应该是一个种群进化而原来的种群就消失了啊！对此，欧阳博士说，生物进化，包括基因变异，是现代人依据考古发现和生物科学研究提出的人类起源假说，它能解释考古和生物种群中的一些疑惑，还原人类起源。故此，说人是由猴子或是鱼进化来的都符合生物进化的观点，因为海洋生物比陆地生物出现的早。但生物进化也仅是一种学说，是否人类真是这样起源的不得而知。也正是基于这样的原因，不同地域和文化，包括宗教、神话中都对人类的起源提出过有别于生物进化的假说。

1.2.神造人说. 神造人说认为地球上存在一位或多位造物主“神”，是神如小孩“过家家”似的造出了人。例如，中国上古神话和基督教《圣经》中说人是神由泥土捏成的，埃及神话说人是神呼唤出来的，日耳曼神话认为人是植物变的，澳大利亚神话说人是蜥蜴变的，希腊神话说某族人是天鹅变的、某族人是牛变的等。在所有神造人的神话里，最引人入胜的是中国神话中的女娲造人和《圣经》中记载的上帝

造人说。

[**女娲造人**] 女娲是中国上古神话中的一位女帝王，长得人面蛇身，每天显现七十种变化。《山海经》大荒西经中有“有神十人，名曰女娲之肠，化为神，处栗广之野，横道而处”的记载，其中的“女娲之肠”有人认为应当是“女娲之腹”，进而引出女娲造人的神话。到了东汉时期，泰山太守应劭编的《通俗演义》中有这样一段：“俗说开天辟地，未有公民，女娲抟黄土做人。剧务，力不暇供，乃引绳于泥中，举以为人。故赋有者，黄土人；贫贱者，引絙人也”，演绎出女娲造人的过程。

说是盘古开天地后只有天、地和盘古自己，没有其他人。盘古死后，又不知经过多少年诞生了女娲。有一天，她在水面上照见自己，心想要是天地间有几个与自己一样的，彼此说说话该多好！便不自觉地抓起地上的黄土，和上水，照自己的样子捏出一个小泥人，放在地上，对着小泥人吹了一口气。这时，只见小泥人立马便成一个人。女娲就这样一个接一个地造人，感到有些吃力了，心想怎样才能更快地在天地间造出更多人以填补辽阔的大地呢？她在山崖边顺手摘下几根藤条拧成一根绳子，在和了水的泥浆里搅了几下一甩，立马在地上洒落许多泥点，经风一吹，一个一个地都变成了人。女娲不停地挥动绳子，洒落在地上的泥点人也不断增多，人也不断地增多，人类就这样在地上出现了。女娲这样造人给人分成了赋有和贫贱。说女娲手捏黄土，对捏出的小人吹了一口气的人是赋有的人，而那些女娲甩绳子溅落在地上的泥点变成的人是贫贱的人。这就在源头上解释清楚了为什么人世间有富人和穷人，是因为女娲造人时的心态不同，富人是女娲一个一个亲手捏的，还对他们一个一个地吹了一口气形成的；穷人则是女娲甩绳子落在地上的泥点批量或是女娲没尽心产生的，为宿命论找一种理由。

女娲造人的神话中，没有讲清为什么人有性别不同，虽有贵贱，但女娲造出的人可能都是男人或都是女人，无法在宇宙中繁衍。这一点，在上帝造人的神话中就比较清晰。

[**亚当夏娃偷食禁果**] 欧阳博士说，上一次讲《圣经》里的上帝造人，说是上帝在第六日类似于中国神话中的女娲，用泥土按上帝的模样捏了一个人，对它吹了口气，就成为活生生的男人，取名亚当。但孤独一人不能繁衍子孙万代，上帝决心为亚当造一个配偶，便在亚当沉睡时从他肋下取了一根肋骨，用这根肋骨造成了一个女人，取名叫夏娃。这里，亚当是“尘土”的意思，意味着人从尘土中来，夏娃是“肋骨”的意



图2.3 亚当夏娃偷食禁果

思，他们是传说中的人类始祖。同时，上帝为亚当和夏娃在东方的伊甸造了一个乐园，那里的地上撒满金子、珍珠和玛瑙，地上到处长着奇花异卉和树木，树上的果子可以作为食物。上帝让亚当和夏娃住在伊甸园中并看守这个园子，吩咐他们说："园中树上的果子你们可以吃，但智慧树上的果子不可吃，吃了必死。"亚当和夏娃赤裸着身子在园中生活着。

园内动物中，蛇是最邪恶的。蛇问夏娃，问她是否想吃什么果子就吃什么。夏娃说："是的，除了智慧树上的果子，我们想吃什么就吃什么。上帝说，智慧树上的果子我们吃了会死。"蛇说："上帝骗你们的。你们吃智慧树上的果子会辨别善恶，就与上帝是一样了。"夏娃望着智慧树上水灵灵的果子，那果子会使她变得聪明。最后，她实在是忍受不了，就摘下一颗自己吃了，又摘了一颗递给亚当吃了。这时，他们有了智慧和廉耻，意识到男女裸体的羞耻，忙摘下一些无花果叶盖住身体。

天黑后，上帝来到园中看不见他们两个，问亚当在何处，为什么要藏起来。亚当说他听到上帝的声音很害怕。上帝问他是不是偷吃了禁果。亚当承认后说是夏娃让他吃的，夏娃说是蛇诱惑她吃的，说吃了有智慧。这样，上帝对蛇处罚，砍去它的脚，罚它终身用肚子行走，终生吃土；上帝把亚当和夏娃赶出伊甸园，让他们在尘世里繁衍子孙，说从今往后，女人怀胎和分娩时要有痛苦，男人则要汗流满面才得糊口，直到他归了尘土。

欧阳博士启发女儿说，在中国神话中的女娲造人和西方基督教中的上帝造人故事中，都是按着女娲或上帝自己的模样捏出一个泥人，再冲着泥人吹一口气而成，由此可推出，女娲和上帝的样子与人相似。欧阳博士问："小朋友能不能理解女娲、上帝造人的神话？"惠子回答说："能，我们可以学着做呢！"

第二天放学后，惠子在小区草地里挖了些土，带回家用水和好，照着葫芦娃和樱桃小丸子的样子捏了两个泥娃娃，并对他们吹气。可无论惠子怎么吹气，泥娃娃还是泥娃娃。等到欧阳博士回家，惠子一脸沮丧地说："女娲、上帝造人是骗人的！您看我捏的这两个泥娃娃，怎么吹它们也还是泥娃娃，变不成人呢！"欧阳博士笑着说："那是因为你没有女娲、上帝那样的神力，无论你怎么对它吹气，它也活不过来。所以，女娲或上帝造人只能是神话。"欧阳博士告诉女儿，宇宙中如果真的存在女娲或上帝造人的神力，这种神力也只能是一种自然力。他接着问女儿："这样一来，你觉得生物进化说是不是相对可信呢？"惠子回答说："是这样的！因为我用实验已经证明了女娲、上帝造人不可信。"欧阳博士说，接下来再给她讲一下人类起源的第二类假说，即起源于地球外的其他星系。

1.3.地外生命诞生说. 人类是起源于地球本体还是发源于宇宙中的其他星系并没有普遍认可的结论。科学主流界以地球生物演化为基础提出生物进化说，宗教或

神话说以神具有神力为基础提出神造人说等，都不能解释人们对生命提出的所有问题，进而在一些科幻作品中出现地外生命诞生的假说。

第1类. 生命初元诞生在地球外，人类是其在地球进化产物。

这种假说认为太阳系在形成前，宇宙中已拥有一些最为古老的生命初元，它们在当时是一些微小且脆弱的单细胞。这样，通过彗星、小行星或者其它太空碎片在星际旅行中携带，大部分的生命初元在长时间的星际旅行中死亡，但有一部分幸运的生命体，误打误撞地被带到了适合生命成长的地球上。这些生命初元经过数亿年与地球环境的融合和进化，形成了一种异于地球其他生命的基因，即人类。这种观点的证据，据说是在地球上发现了一些生命化石，经过测算其出现时间，大约是在65亿年前而地球仅存在了45亿年。

第2类. 人类是高等级文明禁锢在地球上的生物。

这类假说的实质，是认为宇宙中存在不同文明等级的生物。其中，一级人类文明为初级文明，能突破自己星球的引力束缚进入太空；二级文明能利用恒星能作为太空探索能量来源，与其他同文明等级星外文明接触；三级文明为星系文明，能开启时空穿梭进行星际旅行；四级文明为超星系文明，能进行维度空间穿梭，不再受制于生命本体；五级文明为空间文明，能生存在多维空间，利用不同维度空间制造自己所需的资源；六级文明为宇宙文明，可以实现宇宙间旅行，不再受限宇宙规则；七级文明为终级文明，是宇宙的创造者和宇宙规则的缔造者。在宇宙文明等级中，人类是相对于地球上生物的文明程度而言为“*万物之灵*”，但在宇宙文明等级中最低，说仅是0.75，还达不到一级文明程度。

在这种情形下，一些人提出，人类诞生在宇宙中的其他星球，是人类触犯了天规而被高等级文明囚禁在地球上的，类似于中国汉代到明朝将一些被贬贤相、名臣和学士，如北宋文学家苏东坡、明朝名臣海瑞等流放到海南岛一样。在高度文明的生物看来，人类还处在一级文明的发展阶段，在进化到二级文明之前须禁锢在地球上，把地球作为囚禁人类的监狱，地外文明掌控着地球。一些人认为，2013年俄罗斯上空发生的陨石撞击地球事件是这一观点的证据。据报道，2013年的一天，一颗直径约17km，重量近7×10^6kg的小行星，以18km/s的速度向俄罗斯的车里雅宾斯克市飞来，其在天空中留下了10km长的燃烧痕迹，但直到进入大气层后才被卫星发现，可能对地球造成的伤害已是不可挽回。幸运的是这颗小行星在正要撞向地球的时候，被其后飞



图2.4 地外文明

来的不明物体击中，在距离地面约30km处爆炸，大部分碎片落入了附近的切巴尔库尔湖，整个过程只用了短短的几秒钟，让观看到的人惊讶。据估算，让小行星解体的不明物的飞行速度达36km/s，而当时的人类科技根本做不到这一点。

欧阳博士对女儿说，人类起源是个极其复杂的问题，我们可能永远也弄不清人类的起源，即第一个人是怎样产生的。无论是生物进化、神造还是人类来源于宇宙其他星球，人类能够确认的是我们自己是人类繁衍的结果，即父母按1+1结合而来，如你看到的猫生小猫一样，绝不是黄土捏出来或垃圾桶里捡来的。

第2节 万物人知

现代解剖学证实，人体与一般陆地动物组织结构类似，是由皮肤、骨骼、肌肉、消化、呼吸、循环、排泄、神经、内分泌和生殖等10个系统组合而成。这当中，有的是为人体生存需要，有的提供了人对客观存在的认知功能。

人对万物的认知经过实践检验，上升为知识或理论，形成科学。注意，无论是事物的外观、色彩、声音、动静还是酸、甜、苦、辣、咸等五味，是由人自己的感官确定，按人类社会共同遵循的认知标准而言一致。但是，人类的认知是否是事物的本来面目则不得而知，这在老子的《道德经》中阐释的“道可道，非常道；名可名，非常名”、释迦牟尼在《金刚经》中告诉须菩提的要无“我相、人相、众生相、寿者相”和观世音《心经》中的“色即是空，空即是色”等论述中已有答案，即人类认知不一定是事物的本真。同时，其他动物对同一个事物与人的认知是否一致也不得而知，这在庄子与惠施的“鱼乐之辩”中表现得淋漓尽致。

[**鱼乐之辩**]《庄子》的秋水篇中有这样一段记载，说庄子和惠施在濠水岸边上散步。庄子随口说：“河里这些鱼儿游动得从容自在，它们真是快乐啊!”一旁的惠施反问：“你不是鱼，怎么会知道鱼的快乐呢？”庄子回答说：“你不是我，怎么知道我不知道鱼的快乐？”惠施又问：“我不是你，自然不了解你；但你也不是鱼，也不应该知道鱼的快乐啊!”庄子安闲的回答说：“我请求你回到谈话的开头。刚才你明明是在问我‘你是怎么知道鱼是快乐的？’既然你问我鱼为什么是快乐的，这就说明你事先已经承认我是知道鱼是快乐的，而现在你又问我怎么知道鱼是快乐的。那么我来告诉你，我是在濠水的岸边知道鱼是快乐的!”

这当中，惠施是从人的认知上说，人和鱼是两种不同的生物，两者的喜怒哀乐是否一致，无从知晓；庄周是从艺术上说，人乐鱼即乐，是在根据相对主义玩弄诡辩艺术。那么，庄子真的可以感知鱼的快乐吗？答案是否定的！庄子感到鱼在水中游动的快乐，是庄子自己的一种主观认知，是一种由我及物,人乐鱼亦乐的“移情”

行为。

欧阳博士告诉惠子，随着科学技术的进步，人类感知万物已经由最初的直接感知发展到现如今的间接感知，即借助于科学仪器或设施进行万物感知。这在一定上程度上扩展了人的感知范围，提升了感知宇宙万物的能力。

2.1.直接感知. 人的直接感知即是由人的六根，即眼、耳、鼻、舌、身、意对万物进行感知、条件反射。注意，人的直接感知有一定的局限，并非万物的所有信号都能为人直接感知。那么，人的感知器官有哪些，正常人又在多大范围内能够感知呢？我们依次讨论如下：

（1）眼睛. 人的眼睛是人用以观察、感知外界物体的大小、明暗、颜色和动静，以获取机体生存信息的一个视觉器官。据统计，人类获得的外界信息中，至少有80%以上是经由人的视觉获得的。从而，视觉是一个人最重要的感知。

人眼有三层外套，由三个透明的结构组合包覆著组成。最外层由角膜和巩膜组成，中间层由脉络膜、睫状体和虹膜组成。角膜段的半径大约为8mm，巩膜的半径大约是12mm；内层是视网膜，如同从眼膜曲率镜看见的视网膜血管，它从脉络膜的血管获得循环。在这三层外套内，是房水、玻璃体和柔韧的晶状体。其中，房水是一种清澈的液体，包含在晶状体暴露的区域，以及角膜和虹膜中间的眼前房；晶状体是一种由透明的细纤维组成的睫状体悬吊韧带悬吊著；玻璃体、眼后房是比眼前房大的一种清澈胶状物，分布在晶状体后面和其余地区，包覆在巩膜、小带和晶状体的周围。

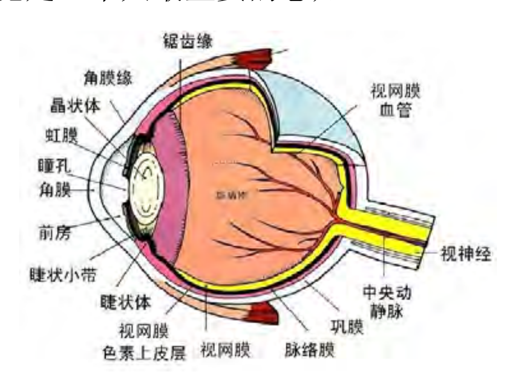


图2.5 人眼结构

眼睛是伴随着人的成长逐渐长成的。婴儿出生时，眼睛尺寸约为16mm至17mm，在3岁时长至22.5mm至23mm，13岁时已与成人眼睛几乎一样，尺寸约为24mm，体积大约是6.5ml，重量约为7.5g。

人眼的视野大约是向外95^o、向内60^o、向上60^o、向下75^o。视神经的缺陷或是盲点位于颞部12 - 15°、水平向下1.5^{o}处，大约是7.5^o 高和5.5^{o}宽。人眼的正常分辨率约为1/2000至1/5000，由眼睛接受外界环境中一定波长范围内的电磁波刺激，与中枢部分进行编码、分析后获得主观感觉。人的眼睛包括感光细胞的视网膜和折光系统两部分，适宜的电磁波刺激波长为$370-740nm$，即可见光部分，大约150种颜色，经视神经传入到大脑视觉中枢，可以看清视觉范围内的发光或反光物的轮廓、形状、大小、颜色、远近和表面细节等。一般地，明视距离为$10cm-4km$以外的景物不易

看到；当景物在距离大于500m处时存在模糊的形象，缩短到$250-270m$时能看清景物的轮廓，进一步辨析则需要缩短距离。

（2）耳朵. 耳朵是人的听觉器官，由外耳、中耳和内耳三部分组成。内耳是人的听觉和位觉感受器；外耳包括耳廓和外耳道两部分，外耳道的皮肤上生有耳毛和一些腺体，其分泌物和耳毛对外界灰尘等有一定的阻挡作用。

外耳包括耳廓、外耳道、鼓膜三部分。这当中，耳廓和外耳道的机能是收集声波，鼓膜是一种椭圆形半透明的薄膜，分隔外耳和中耳，且能随声波振动，如实地把声波刺激传导到中耳；中耳包括鼓室、咽鼓管等。其中，咽鼓管是中耳与鼻咽部的通道，中耳与外界的空气压力经由咽鼓管取得平衡。鼓室位于鼓膜和内耳之间，是一个含有气体的小腔，鼓室内有听小骨、韧带等。鼓室内的空气与外界空气相通，使鼓膜内、外的气压维持平衡。这样，鼓膜才能很好地振动。一般地，当声波振动鼓膜时，听小骨的连串运动使镫骨底在前庭窗上来回摆动，进而将声波的振动传入内耳；内耳又叫迷路，包括前庭、半规管和耳蜗三部分，是由结构复杂的弯曲管道组成的。其中，耳蜗是听觉感受器的所在处。

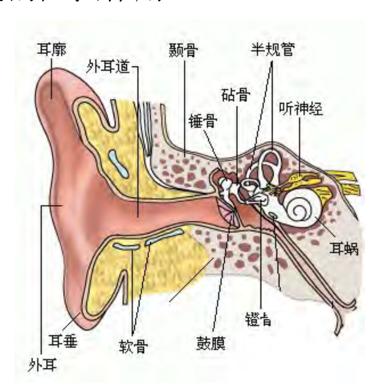


图2.6 耳朵结构

那么听觉是怎样形成的呢？听觉是由人的耳朵、听神经和听觉中枢共同完成的。声波通过外耳道、鼓膜和听小骨传到内耳，使内耳的感音器官兴奋，将声波变为神经冲动，再经由听神经传入人的中枢产生听觉。人的听觉不算太灵敏，正常能听见的频率范围为20Hz到20000Hz。相同强度的声音如果频率不同，人们听到的响度是不一样的。人耳听声音最敏感的频率在3000-4000Hz。此外，耳朵还是人体一个主要的平衡器官。耳朵如果出现了问题，就会出现平衡障碍，导致眩晕、走不稳或躺在床上有水中漂浮感觉等。

（3）鼻子. 鼻子是人呼吸道的起始部分，是气体进出的门户。同时，鼻子又是人的嗅觉器官。其中，鼻子的嗅神经由鼻腔嗅区粘膜内的嗅细胞神经纤维集合而成。鼻子由外鼻、鼻腔、鼻窦三部分组合而构成。外鼻位于人的面部中央；鼻腔位于两侧面颅之间的腔隙，其上、后、旁由左右成对的鼻窦环绕，与颅前凹、颅中凹、口腔和眼眶毗邻，由一层薄骨板相互隔开；鼻窦开口于鼻腔，两者粘膜可互相移动连为一整体。

外鼻由骨、软骨构成支架，外覆软组织和皮肤，有鼻根、鼻尖、鼻梁、鼻翼、鼻前孔、鼻小柱等部分组成；软骨支架由鼻骨、额骨鼻突、上颌骨额突组成。鼻尖、鼻

翼及鼻前庭皮肤较厚，与皮下组织及软骨膜粘连紧密，富有皮脂腺、汗腺；鼻腔位于两侧面颅之间的腔隙，以骨性鼻腔和软骨为基础，由鼻中隔分为左、右两腔，经鼻孔通外界，经鼻后孔通咽腔。每侧鼻腔可分为鼻前庭和固有鼻腔两个部分。鼻腔对冷空气具有明显的加温作用，当0℃的冷空气经由鼻、咽进入人体肺部时，温度经调节后可升至36℃，与人体正常体温基本接近。鼻子的嗅神经由鼻腔嗅区粘膜内的嗅细胞神经纤维集合而成，能够嗅出香、酸和臭等气味；鼻窦由骨性鼻旁窦表面衬以粘膜构成。这当中，粘膜通过各窦开口与鼻腔粘膜相续，是鼻腔周围颅骨与面骨内的含气空腔，对发音有共鸣作用，协助调节吸入空气的温度和湿度。

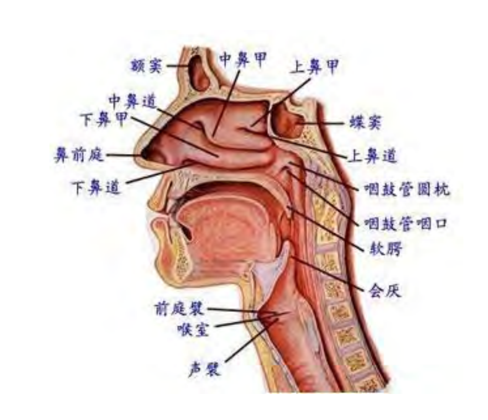


图2.7 鼻子结构

鼻子的功能主要体现在八个方面：①呼吸功能。空气经过鼻子让人感知空气的存在的；②嗅觉功能。这种功能让人感知气味；③清洁功能。这项功能有一定的过滤作用，让呼吸的空气变得清洁进入肺部；④加温加湿功能。这项功能可以把寒冷的空气加温，把干燥的空气加湿，适应人体需要；⑤共鸣作用。这项功能使每个人发出的声音多彩、清晰、圆润而富有个性；⑥保护头颅。鼻腔和鼻窦的空腔结构可以减少外来撞击对人脑的影响；⑦反射作用。鼻子的反射作用使鼻子具有周期性变化的特点，有助于解除身体疲劳；⑧排泄泪液作用。眼睛内侧有一个小孔通向鼻部，称为鼻泪管，它可以排泄多余的泪液。

（4）舌头. 舌头是人的发音器官，是帮助发声、交流的器官之一。但更重要的在于，舌头是人的味觉器官，是感知食物的酸、甜、苦、辣、咸、麻等味道的主要器官。人的视觉、听觉和味觉让人感知万物，但也易于形成人们对不同事物的喜好与偏见。《道德经》第十二章说，五色令人目盲，五音令人耳聋，五味令人口爽，这当中，“盲、聋、爽”三个字，即是对人类对事物认知偏见的概括。

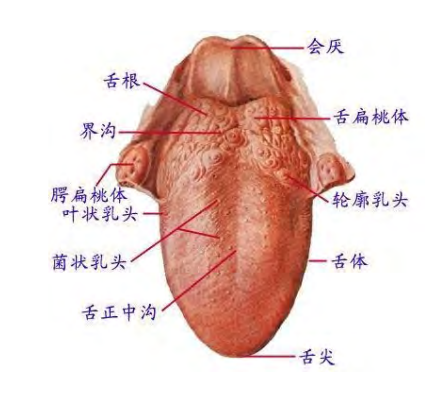


图2.8 舌头结构

人的舌头从口咽到尖端的平均长度为10cm，由骨骼肌组成，分舌根、舌背和舌尖等三部分，舌根、舌背与口腔底相连，仅舌尖游离。舌的背面有许多细小的丝状、

菌状、轮廓和叶状乳头。其中，除丝状乳头外，其他三种均有味觉感受器，构成人的味蕾，由其支持细胞和味蕾细胞组成，味孔伸向舌表面，可感受口腔内食物的味觉，且不同部位的味蕾感知的味道不尽相同。人分辨苦味的本领最高，其次为酸味，再次为咸味，而甜味则是最差的。其中，舌尖两侧对甜、咸敏感，舌头中部周围对辣味敏感，舌头两侧对酸最敏感；舌边前部对咸敏感，后部对酸敏感；舌根对苦味感受性强。

（5）皮肤. 人体皮肤覆盖全身，重量占人体重的5%～15%，面积为$1.5m^2 \sim 2m^2$，厚度为0.5～4mm，是一个人感知气候环境，特别是冷暖、干燥或潮湿、防散热、储备人体能量的组织，由表皮、真皮和皮下组织构成，并含有汗腺、皮脂腺、指甲、趾甲等附属器官和血管、淋巴管、神经、肌肉等组成，具有保持着人体内环境的稳定，参与人体的代谢过程等功能。

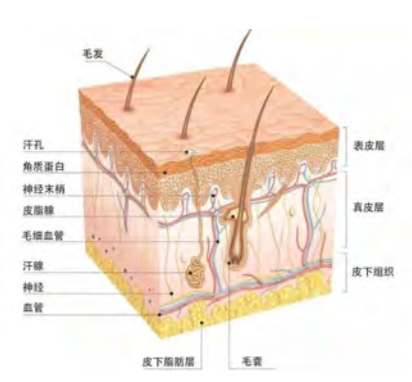


图2.9 皮肤结构

表皮是皮肤最外面的一层，平均厚度约0.2mm，由外向内可分为角质层、透明层、颗粒层、棘细胞层和基底层；真皮由纤维、基质、细胞构成，接近表皮的是乳头层，其下是网状层，两者间无严格界限。其中，纤维层由有胶原纤维、弹力纤维、网状纤维等三种纤维组成；基质是一种无定形、均匀的胶样物质，充塞于纤维束间、细胞间；细胞主要有包括成纤维细胞、组织细胞和肥大细胞三种。皮下组织在真皮的下部，有防散热、储备能量和抵御外来机械性冲击等作用，由疏松结缔组织和脂肪小叶组成，其下紧临肌膜；附属器官包括大小汗腺、皮脂腺、毛发、指（趾）甲、血管、淋巴管和神经等。



图2.10 人脑功能分布

（6）大脑. 一个正常人的大脑具有记忆、调节和信息输送功能，是人产生意识的源头，是人体对环境信息收集、分析和应对等决策的中枢神经系统，控制着一个人的精神、视觉、听觉、体觉和思维等功能。人脑的主要成分是水，可以占到80%左右，颜色为淡粉色。人的大脑由端脑和间脑构成。其中，端脑出发的嗅神经，间脑出发的视神经。端脑分为左、右大脑半球，是中枢神经系统的最高级部分；将两个半球隔开的是大脑纵隔的沟壑；大脑半球有各自侧脑室的腔隙；侧脑室与间脑的第三脑室、小

脑和延脑及脑桥之间的第四脑室之间有孔道连通；脑室中脉络丛产生脑脊液在各脑室与蛛网膜下腔之间循环运转；间脑由丘脑与下丘脑构成。这当中，丘脑与大脑皮质、脑干、小脑、脊髓等联络，完成感知中的中继、控制，下丘脑与保持人体恒常性、控制自律神经系统、感情等关联。

大脑断面分为灰质与白质两部分。这当中，灰质是覆盖在脑半球表面的大脑皮层，是神经元胞体集中的地方。脑半球内侧面的古皮层分化相对简单，一般只有分子层、锥体细胞层和多形细胞层。大脑半球外侧的新皮层分化程度较高，有分子层、外颗粒层、外锥体细胞层、内颗粒层、内锥体细胞层和多形细胞层；大脑皮层的深面为白质，再往内有灰质核。这些核靠近脑底称为基底神经节，主要为纹状体。

多年来，脑科学一直是科学研究中的一个重要领域，人们寄希望于弄清楚人的记忆、储存、运算、判断、决策和行动，即意识过程研究，进行人工智能模拟与实践，以应对自然变化，服务于人类社会的发展。实际上，电脑的记忆、储存、运算等就是人脑的初步模拟，智能机器人在电脑基础上，模拟了人的判断、决策和行动。当然，无论是电脑还是智能机器人，都是在人们设定模式和行动指令下的模拟，还不一定能取代人脑。

2.2.间接感知. 间接感知是人借助于仪器、仪表或设施对宇宙万物数据或信息的收集，由人对收集到的数据或信息进行分析和归纳，进而形成人对宇宙万物的感知。这当中，以扩展人视觉、听觉的居多，味觉等本就是人自身的体验。

（1）显微镜. 人眼的正常分辨率约为1/2000至1/5000，最小可视距离约为10cm。所以，对太小的物体或微生物，人眼不能直接观察其行为。为此，人们依据光学原理发明了早期的光学显微镜，到了二十世纪，电子显微镜、荧光显微镜、超分辨率显微镜和X射线显微镜等陆续被研发推出，扩展了人们观察不同种类的微观事物。

电子显微镜的工作原理与光学显微镜类似，是用电子代替光，用电磁铁代替玻璃透镜，可获得更高的分辨率。这样能产生出可见、清晰的小细胞器图像，在医学上提高病毒的识别能力，更有效地检测病原体。



图2.11 电子显微镜

荧光显微镜以紫外线为光源，大多采用200W的超压汞灯照射观测物，把滤光立方体转台置于物镜上方，配有照相机进行拍照，用于生物学中细胞内物质吸收、运输、化学物质的分布和定位等研究；超分辨率显微镜是在荧光显微镜的进一步发展，图像分辨率可达20nm，可以从分子水平上直接观察DNA和蛋白质分子的结构等；X射

线显微镜采用X射线为光源，用于观察肉眼无法分辨的微观结构与图形，它的成像原理与光学显微镜基本一致。

显微镜一般只能用于大分子结构观测。在原子构成中，质子、中子在尺寸上是原子的1×10^{-5}，电子的尺寸更小，是原子的1×10^{-9}，不采用显微镜而需要专门建设威尔逊云室、气泡室、盖革-弥勒计数器等观察粒子的运动轨迹。

（2）望远镜. 望远镜利用透镜或反射镜，以及其他光学器件放大远处物体的张角，把物镜收集到的比瞳孔直径粗得多的光束送入人眼，使人眼能看清角距更小的细节或是原来看不到的暗弱物体，是扩展人的视野和视距的一种光学仪器，包括民用、军用望远镜，空间探索使用的哈勃空间望远镜、双子望远镜、太阳望远镜和射电望远镜等。其中，哈勃空间望远镜是人类第一座太空望远镜，总长度超过13m，在离地面约600km的轨道上运行。

一个望远镜，主要由放大倍数、视界、出瞳直径、分辨率、黄昏系数、有效口径、集光力等的技术指标衡量。这里，放大倍数指物镜焦距与目镜焦距之比，衡量望远镜视角的放大程度；视场角指1000m处望远镜可视的景物范围。例如，某望远镜标注的视界为114m/1000m，意思是观察者用望远镜可观察到1000m处126m范围的视场；出瞳直径是粗略描述成像亮度的参数，越大越能带来清晰的图像；分辨率指屏幕图像的精密度，指显示器显示的像素；黄昏系数用望远镜的倍率和口径的乘积求开平方，反映在暗光条件下的观察效能；物镜的直径没有被框子和光阑挡住的部分叫物镜的有效口径；物镜的有效面积相对于瞳孔面积的倍数叫做集光力。

光学望远镜扩展的，是人对观察物的视觉范围，受放大倍数、视界等的技术指标的约束。射电望远镜是一种特殊的天线和电磁波接收器，用于接收来自太空中的电磁波。

射电望远镜的工作原理，是对投射来的电磁波采用旋转抛物面镜面反射，同相到达公共焦点。接收机所检测从天体投射来并汇集到望远镜焦点的射电波需要达到一定的功率电频，一般应达10–20W，在焦点处对射频信号功率放大10–1000倍，变换成较低频率，然后用电缆将其传送至控制室，在那里再进一步放大、检波，最后以适于特定研究的方式进行记录、处理和显示。



图2.12 天眼FAST

射电望远镜的基本指标是灵敏度和空间分辨率，分别反映区分两个天体上彼此靠近的射电点源的能力和探测微弱射电源的能力。这里，灵敏度指射电望远镜最低

可测的电磁波能量值，越低灵敏度越高；分辨率指的是区分两个彼此靠近的相同点源的能力，天线的直径越大、接收的无线电波长越短分辨率越高。目前，世界上最大的射电望远镜是中国的天眼FAST，其口径为500m，接收光线的直径为300m。理论上，FAST能接收到137亿光年外的电磁信号，接近于人类可认知宇宙的边缘。

听到这里，惠子问欧阳博士："爸爸，有了显微镜和射电望远镜，人类是不是就可以看清宇宙中的一切事物了？"欧阳博士回答说，当然不是！人眼能够感知的是物体对光源的反射。对那些不发光或不折射光的物体，人眼是看不见的。例如，晚上停电在家里找一件物品为什么要用手电筒或是其他光源照射呢，就是因为只有它折射光到人眼里，人才能看得见。显微镜和望远镜仅是在一定程度上扩展了人的视觉，距离感知宇宙万物还差得很远，因为这仅是人类自己的感知，更何况宇宙中有些星体，既不发光也不折射光，甚至也不发出电磁波呢！

第3节 无中生有

人类对宇宙万物的感知是从无到有的一种循序渐近的过程，即无中生有。这里，"无"是指宇宙中的客观存在但人的"六根"尚未感知到，并非是"假"的"虚"的或不存在的事物，"有"指人的"六根"已感知到的事物。

有一天，惠子问欧阳博士什么是无中生有，说她一直想不明白为什么没有可以生出有来的道理，欧阳博士反问她："你觉得什么是无，什么是有呢？"惠子回答说："无应该是看不见摸不着的，有是看得见或摸得着的东西！"欧阳博士继续问她："别人看见的东西叫有还是无呢？"惠子肯定地说："当然叫有！"欧阳博士问女儿老师教没教过她们安徒生的童话《皇帝的新衣》，惠子点了点头说："教过。"欧阳博士启发女儿说："那两个骗子骗皇帝，说能给他织出人间最美丽的布，说能给他缝出人间最美丽的衣服，可织布机上什么也没有！哪来人间最美丽的布，又哪来人间最美丽的衣服让皇帝穿上去游行呢。骗子骗了皇帝不少钱不说，还让皇帝高高兴兴地穿着什么也没有的'衣服'在游行马车上，直到边上一个小孩说他什么也没穿，百姓也说他什么也没穿才幡然醒悟，意识到自己被两个骗子骗了，但为时已晚。为什么会是这样呢？如果是人看不见摸不着的叫无，所有人不是应该都能发现皇帝身上什么也没穿吗？"惠子想了一想说："因为两个骗子说，任何一个不称职或是愚蠢的人看不见他们缝制的



图2.13 感知万物

衣服！皇帝派去检查的官员在织布机上明明什么也没看见，但不愿意让人说自己不称职或是愚蠢，反而是称赞骗子织出的‘布’美丽，就连皇帝自己也是这样!”欧阳博士问女儿:“这样一来，你认为皇帝身上的新衣是有还是无呢？”惠子说:“当然是无，因为他的身上什么也没穿呀!”欧阳博士继续问她:“可是除了那个小孩外，其他人都说皇帝的身上穿着一件美丽的衣服，包括皇帝自己，这不是有吗？”惠子回答说:“其他人怕别人说自己不称职或愚蠢，说了假话，只有那个小孩说的是真话!”欧阳博士肯定了女儿的回答，告诉她婴幼儿、成年人和老人的视觉、听觉并不完全一样。此外，常人与盲人、聋哑人的视觉、听觉也不一样，人对万物的感知并非指哪一个人或那几个人的感知，而是指的客观存在，是人对客观存在的真实感知。注意，万物的客观存在不以人的意志为转移，并非因为人感知不到它在宇宙中就不存在。这也就是老子在《道德经》第四十章说“天下万物生于有，有生于无”即无中生有，就是从人对万物的感知过程讲的“有”和“无”，是人对天下万物的感知为“有”，是从感知不到即“无”到“有”的感知而不是《皇帝的新衣》中骗子的那种凭空捏造。

万物源于无中生有。宇宙诞生之初没有生命，没有植物和动物，当然也没有人类，只有繁衍生命的基本粒子，在宇宙进化过程中，基本粒子组合成元素、气体和水，再在特定条件下，比如太阳光照射下，这些元素、气体和水重新进行排列组合，孕育出单细胞生物，再从单细胞到多细胞，从植物到动物，最后出现了人类，这是一个动态过程。欧阳博士告诉女儿，人类对宇宙万物的认知，不是哪一个人在某一个特定时间的认知，而是人类在其发展的历史长河中的累积，是集体智慧的结晶。这样一来，人类对万物的“无中生有”，就包括前人已有的认知、人类创新认知能力而认知和万物发展变化而使人类认知等三种情形。

3.1.前人认知而有. 人对宇宙万物的认知，包括衣、食、住、行大部分都不是自己感知而是源于前人认知，源于文化传承而知，进而产生有。人对万物的认知是出于生存本能，辩知哪些植物或其果实可以果腹；哪些可以入药，医治人患疾病；哪些动物可以训化为人类所用；哪些又可以成为人类工具或武器，抵御外敌入侵，并代代心口相传，成为人类早期对万物的经验感知，是一种经人类自身检验的认知。

(1)野生农耕之有. 植物从野生到有计划地组织耕种，是一个无中生有的过程。一般地，植物包括食用植物和药用植物。这里，食用植物指含有人类所需的淀粉、蛋白质、油脂、糖类、维生素等，或是可作为蔬菜食用的植物，包括植物的根、茎、叶、花、果和种子；药用植物指医学上用于防病、治病的植物。这当中，哪些植物可以食用，哪些又可以入药医治病患，需要逐一辨析，是先民们长期的生活和实践，逐渐的经验积累结果。中国上古神话中，有一位与有巢氏、燧人氏、伏羲氏和轩辕氏齐名的神农氏，又称为炎帝，是中国农业和医药鼻祖，他的《神农本草经》载有365种

药，是中国现存最早的药学经典。

[**神农尝百草**] 传说在上古时候，先民们主要靠打猎为生。那时，猎人用的打猎器具是一些木棒、石头之类，猎物所获寥寥无几，人们只能忍饥挨饿。依赖打猎为生，饿死、病死的不计其数。神农看在眼里，急在心里。荒野中，五谷和杂草长在一起，药物和百花开在一起。它们中，哪些可以作为粮食果腹，哪些又可以作药治病，分不清楚。

神农苦思冥想了三天三夜。第四天，他带着一批臣民，从家乡随州历山向西北大山走去。他们走了七七四十九天，来到一个高山一峰接一峰，峡谷一条连一条的大山脚下，山上长满了香气扑鼻的奇花异草，四面是悬崖峭壁，壁上挂着瀑布，长满了青苔，溜光水滑，没有梯子根本爬不上去。

神农看见几只金丝猴沿着峭壁的古藤和悬崖上的朽木爬上爬下的，叫来臣民砍木杆，割藤条，靠着山崖搭架子。他们一天搭上一层，搭了一年，历经了春、夏、秋、冬四季才搭到山顶。神农带着臣民爬上了山顶，山上遍地是五颜六色的花草。为在这里尝试百草寻找食物和医药，神农叫臣民们在山上栽了几排冷杉作城墙，在墙内盖茅屋作居室。白天，他领着臣民到山上尝百草，寻找食物和医药；夜晚，他让臣民生起篝火，记载哪些草能充饥，那些草的药性是苦的、热的或凉的。



图2.14 神农尝百草

有一次，神农摘下一棵草放嘴里嚼，霎时间只觉天旋地转，一头便栽倒在了地上，他知道自己中毒了，可是已说不出话了。他对边上的臣民指了指面前一棵灵芝草，又指了指自己的嘴巴。臣民们忙把那棵红灵芝放到嘴里嚼了嚼，喂到他嘴里。神农中的毒立马解了，头不昏了，他也能说话了。就这样，神农尝完一座山又尝另一座山的花草，一共尝了七七四十九天，踏遍了这里的每座山岭。他尝出了三百六十五种草药能治病，写下《神农本草经》造福百姓。他尝出了稻谷、麦子、玉米等能为人充饥饱腹的植物种子，让臣民把种子带回去，开始垦荒种粮的农耕时代。

（2）野生家畜之有. 动物从野生到驯化为家畜，有计划地组织饲养是一个无中生有的过程。这里，野生动物指所有非经人工饲养而生活于自然环境下的各种动物；驯化指人对野生动物创造新的生存环境，给予食物及其它必要的生活条件进行饲养，以服务于人类的生产和生活。

原始社会时期，人们的社会生产以获取食物为主，女人从事采摘，男人则去捉捕野兽以获取肉食，提供人体所需的蛋白质。但那时因缺乏有效器具，捕猎成功率低，搏斗伤亡率高。后来，人们发现有些野兽可以经过人工驯化，驯化后进行有计划地养殖，可以为人类提供必要的肉食而无需再冒危险去捕猎了。例如，家猪、羊、鸡等家畜可由野猪、野山羊、野鸡等驯化而来，当作人们日常的主要肉食；牛由野牛驯化而来，最初也是作为肉食，后来发现牛可用于农业生产，便不再当作肉食的主要来源；马由野马驯化而来作为交通工具；狗由狼驯化来，用于原始社会的警戒治安或猎人捕猎等。

（3）观天时节之有. 观天象、辩时节的宗旨是总结季节变化的规律，指导农耕时代的春播、夏长、秋收和冬储的需要，以实现人类自身的生存与繁衍。古人在观天象的时候有着“朝霞不出门，晚霞行千里；天上鱼鳞斑，晒谷不用翻”，以及“天上钩钩云，地上雨淋淋；天有城堡云，地上雷雨临”等谚语。那时，人们注意到太阳的升落和月亮的圆缺，从而产生了时间和方向的概念，这当中，以中国人的二十四节气为典型代表。

二十四节气是中国人的独创，是世界天文史上的一个重要发现。二十四节气中，立春、春分、立夏、夏至、立秋、秋分、立冬和冬至反映季节变化。其中，立春、立夏、立秋、立冬中的“立”表示开始，是中国古人划分四季的方法。春分和秋分表示昼夜平分。夏至和冬至则分别指炎热的夏天和寒冷的冬天到来，夏至日的白昼（阳）最长，冬至日的白昼最短，夜晚（阴）最长；惊蛰、清明、小满和芒种反映物候现象。这当中，惊蛰的“蛰”表示动物进入冬眠。中国古人认为，是春天的雷声惊醒了冬眠中的动物，故叫惊蛰。清明指天气清明洁净，草木返青的时令，小满指农作物开始结穗但颗粒尚未饱满，正在成熟期，芒种指有芒的大麦、小麦等农作物已经成熟；雨水、谷雨、小暑、大暑、处暑、白露、寒露、霜降、小雪、大雪、小寒和大寒反映的是气候变化。这当中，谷雨表示雨水增多，进而谷物茁壮成长。小暑和大暑表示热的程度，小暑是开始热的时候，大暑是一年最热的时候。白露和寒露指夜间的雾气可以凝结成白色露珠的时候。霜降指水汽凝结成白霜的时候。小雪和大雪表示入冬开始下雪的程度。小寒和大寒表示寒冷的程度。小寒指寒冷初期；大寒指一年中最冷的时候。

欧阳博士告诉女儿，人类在农耕时代对万物的认知是在“天人合一”的思想下，围绕着人的基本生存所需的衣、食、住、行而进行的从无到有的认知。除上面的植物、动物由野生到农耕、家畜，天文上的二十四节气外，中国古人还发明了火药、指南针、造纸、印刷、织布、地动仪等技术服务于人类的生产生活实践。同时，随着人类科学技术，特别是观测、探测和感知设备的创新与发展，人类认知万物的能力在

逐渐提高。故此，认知万物，实现无中生有首先是继承前人的认知，即文化传承，在前人认知基础上发展新的认知。

3.2.延拓感知而有. 人类在对万物感知能力上的创新，集中在对人的感官不能直接分辨的微观、宏观物体，如分子、原子、原子核、质子、中子等微观粒子及其组合而成的DNA 等大分子和宇宙中距地球遥远星系的感知，研发相应的科学仪器、设备和设施辅助人的观测与信息收集、分析，实现对这些微观、宏观事物从无到有的认知，即无中生有。这种能力创新主要围绕着显微镜、望远镜,辅以必要的信号接收装置、照相器材和分析仪器等提升人的观测能力进行。按观测点的不同，创新人类观测能力有两种方法，一种是地面观测，即人在地球上采用特定的科学仪器对微观或宏观物体观测，实现从无到有的认知。这类科学仪器主要是显微镜和望远镜；另一种是空间观测，即用火箭把观测仪器送到近地或远地的空中，收集、监测地外信息和数据。例如，通讯卫星、导航卫星、气象卫星和科学卫星、技术试验卫星等。

中国古人观天象、定时节，以用于农耕生产，依赖于观测者的感知。气象卫星对大气层进行气象观测，具有范围大、及时迅速、连续完整等特点。气象卫星实质上是一个悬在太空中的气象站，是空间、遥感、计算机、通信和控制等高技术相结合的产物。其中，遥感器能够接收和测量地球及其大气的可见光、红外与微波辐射，转换成电信号传送回地面。对应的，地面接收站把电信号复原为云层、地表和洋面图片，经分析、处理后就可以预知天气走势。气象卫星分为两类，一类是极轨气象卫星，飞行高度约为600～1500km，其轨道平面和太阳始终保持相对固定的交角；另一类是同步气象卫星，其运行高度约35800km，轨道平面与地球的赤道平面相重合。

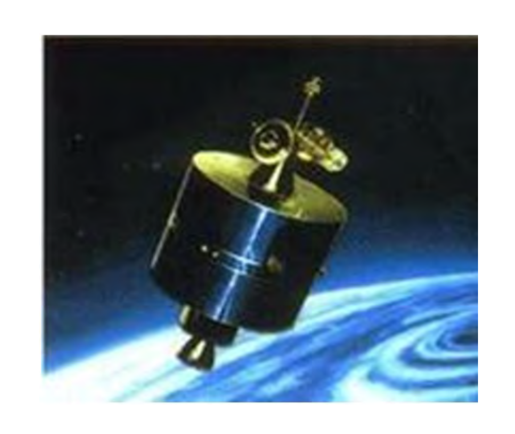


图2.15 气象卫星

气象卫星利用携带的各种气象遥感器，接收和测量来自地球、海洋和大气中的可见光辐射、红外线辐射和微波辐射等信息，其观测的主要内容包括：①卫星云图的拍摄；②云顶温度、状况、云量和云内凝结物相位的观测；③陆地表面状况、变化的观测，如冰雪和风沙，以及海洋表面状况的观测；④大气中水汽总量、湿度分布、降水区和降水量的分布监测；⑤大气中臭氧的含量及其分布监测；⑥太阳的入射辐射、地气体系对太阳辐射的总反射率以及地气体系向太空的红外辐射监测；⑦空间环境状况的监测，如太阳发射的质子、α 粒子和电子的通量密度等。观测数据转化为电信号传给地面接收站分析处理后，进行中长期天气预报，预报台风、龙卷

风、飓风等灾害天气，为航海、航空，以及农业、渔业和畜牧业提供气象水文资料。

气象卫星利用气象遥感器采集气象数据，类似地，空间探测器装有既定的科学探测、数据采集仪器执行空间探测任务，对地球的空间范围、月球，行星和星际空间探测，研究月球和太阳系的起源和现状，揭示地球大气环境形成和演变情况即太阳系的演化过程，探寻生命的起源和演变历史，包括：①在近地空间轨道上进行远距离空间探测；②近距离飞过月球或行星进行探测；③成为月球或行星的卫星长期观测；④在月球或行星及其卫星表面硬着陆，用着陆前的短暂时间进行探测；⑤在月球或行星及其卫星表面软着陆，进行实地考察，采样送回地球研究；⑥深空飞行，对某一项或某几项指标或数据长期采集。人类已相继发射探测器对月球和太阳系其他行星，以及宇宙进行深度考察和探测。其中，对月球的考察最详细，对金星、火星不仅拍摄绘制了地形图，还发射了无人探测器在金星和火星表面着陆进行考察。宇宙中存在一种在各个方向都一样的宇宙微波背景辐射，据说是宇宙大爆炸遗留的痕迹。为此，WMAP卫星在距地150万公里处绕日-地系统飞行，为人类揭示宇宙从无到有采集了大量基础数据。

3.3.变异创新而有. 生物的生存环境是复杂多样、变化发展的。对应的，生物需遵循适者生存的自然规律。生物变异，是为适应生存环境的变化，有利于同种生物的进化，因为有利的变异会由遗传不断地积累和加强，使生物种群更加适应其生存环境，由变异产生新的生物类型，实现由简单到复杂、由低等到高等的进化；创新，是人类为自我生存而进行的一种创造性行为，是对物质世界矛盾的利用和再创造。

（1）变异而有. 变化是宇宙万物永恒的规律，前人既有的认知有的正确，有的可能也不适用于当下。对此，古希腊哲学家赫拉克里特有一句名言“人不可能两次踏进同一条河流”，因为河水在不停地流动。自然界中的生物变异，是生物主动适应环境变化的行为，而这在人类看来，正是一种无中生有或是新发现。图2.16中，一只鸟长出一个狗头就是一个例子。

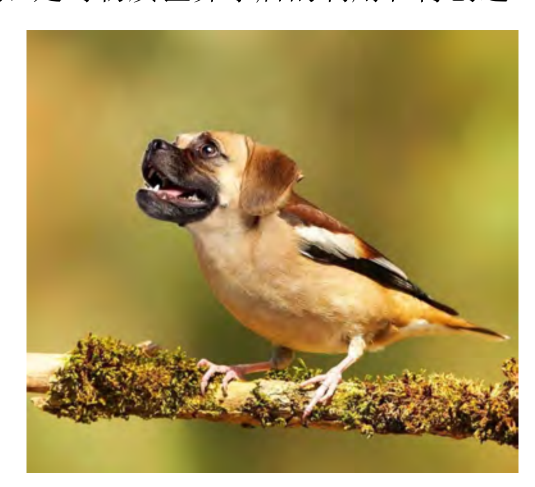


图2.16 鸟的变异

生物变异分为可遗传变异和不可遗传变异两种。其中，可遗传的生物变异又有三种情形：①基因突变。基因突变是生物变异的根本来源，是基因内部结构改变造成的，大多因DNA复制差错造成，包括能使生物产生性状改变的有义突变和不改变生物性状的无义突变；②基因重组。基因重组，指构成事物的基因重新进行组合而生

出事物“有”，是由于控制不同性状的基因在减数分裂时自由组合或同源染色体间的非姐妹染色单体互换造成，生物变异大多数由基因重组造成；③染色体变异。基因主要位于染色体上，染色体结构和数目的变化必然导致基因数目及排列顺序的变化与重组，从而使生物发生变异，包括染色体结构变异和染色体数目变异两种情形。

生物变异是自然选择的结果,是生物为适应环境而发生的改变。对生物自身来说，可能是向有利的方向变异，使生物适应环境的能力增强；也可能向不利的方向变异，使生物适应环境的能力减弱，甚至会因此死亡。对应的，人类可以利用生物的有利变异服务于人类自身发展。例如，杂交水稻有利于改善水稻品质，提高产量；小麦中出现矮秆、抗倒伏的变异有利于小麦生长等。同时，有效防范生物的无利变异给人类带来的危害等。

（2）创新而有. 创新中的“新”表示无中生有而不是“小改小革”，是全新的创造与创新。人类的创新，大多是围绕着解放人的生产力，研究、制造零部件模拟生物基元功能，再组合零部件以模拟生物的某种动作或能力，包括生产、交通运输、装卸机具和电脑等的创新。

生产工具是社会文明程度的集中体现。从石刀、石斧和木棍等自然工具，到人类有意识地打造锄头、镰刀、犁耙，再到利用机械原理研发和应用机床、切割机、水稻收割机、插秧机等农业生产工具的创新；由穿兽皮、蓑衣、茅草和树叶到人工纺线织布，再到研发和应用纺纱机、织布机等纺织工具的创新；由人拉、肩扛到驯服牲畜，再到研发和应用起重机械、输送机、装卸机械、搬运车辆和仓储设备等搬运工具的创新；由稻谷、小麦、玉米、高粱等人工脱壳到石磨碾压、捣杵，再到研发和应用砻谷机、碾米机、磨面机等粮食加工机具创新；由山洞、树杈等原始居住到垒石窝、砖和石灰、水泥烧制，再到水泥球磨机、起重机等设备创新，为人类的衣、食、住、行等生存必须提供了基本保障，即从无到有。



图2.17 中国空间站

交通工具是人的出行空间能力的体现。人类由步行、攀爬、跳跃到人或驯服的牛、马拉车、自行车，再到研发和应用摩托车、汽车、火车与高速列车；由依赖木支、舢板到模拟鱼的出行发明划桨和木船，再到研发和应用蒸汽机、燃气涡轮、柴油引擎或核动力机组等驱动的潜水艇、轮船；由模拟鸟儿、蜻蜓等的飞翔到制作风筝、气球、孔明灯和火箭，再到研发和应用空气发动机，进而产生飞机、宇宙飞船、航天飞机和太空站等，打破了人生活在陆地的限制，可以出现在陆域、海域和空域。

电脑是模拟人脑的一种具有超级存储，可以进行运算、逻辑判断和决策，按照设定的程序高速处理数据的电子设备。电脑的开发与应用，特别是人工智能的研究，对人的意识、思维的信息过程进行模拟和控制，一定程度上延伸和扩展了人的智能，包括机器人、语言识别、图像识别、自然语言处理和专家系统等，与人类的生产和生活实践互动，并作为对人类能力的一种重要补充，实现新的无中生有。

欧阳博士告诉女儿，万物既然是人对万物的认知，就一定是一种从不知到知的认知过程，即无中生有。这当中，"无"是此前有但未为人类认知，或是此前虽"无"但存在"有"的基元，在条件成就时这些基元组合成"有"。欧阳博士问女儿:"你还记得我上一次讲的你是怎么来的吗?"惠子回答说:"记得，我是爸爸和妈妈生的!"欧阳博士说:"好! 那在你出生前世界上有没有你呢?"惠子一愣:"我没出生怎么知道有没有我呢，应该是没有吧!"欧阳博士接着说:"那现在世界上有没有你呢?"惠子一笑说:"我站在这里，当然是有了!"欧阳博士对女儿总结说:"你看，你自己不就是一个活生生的无中生有的例子吗!"

第4节 科学唯象

人对一件事物首先是视觉感知，即事物对光的折射进入人眼产生的象，包括事物的大小、外形、运动快慢和变化方向等，经大脑加工得到对事物的认知，进而采取应对措施，称为唯象方法，即在解释物理现象时，不去追究形成现象的原因而是由经验总结和概括观测事实得到的自然规律，进行演绎的推论，形成对事物的认知即唯象理论，是对万物或试验现象的经验性概括、总结和提炼，是人生存本能的体现。唯象方法是系统科学中常用的一种建模方法，即不考虑系统的内部机制和约束条件，直接用系统宏观层次上观测到到性质或特点建立系统的演化方程，对系统走势进行判断与预测，以服务于人类。注意，这里的"象"是画像的抽象，指的是人的六根对事物的感知，与《金刚经》中的"相"和《心经》中的"色"类似。例如，中国《易经》中的卦象等。

注意，唯象方法是人类认知自然规律，并在此基础上形成科学理论的主要方法。同时，象又是科学理论正确与否的检验。例如，人们对植物、动物及宇宙的科学认知，都是由唯象方法到理论分析，即透过显现看本质，再经由实践检验，形成人类对植物、动物及宇宙的认知。实际上，即便是进入了二十一世纪，人类对万物的认知大都仍属于唯象理论范畴。

4.1.唯象成人. 欧阳博士告诉女儿，一个人从出生到长大，以及在社会上谋生，其对事物的辨识、分析、判断与行动，大多采用的是唯象方法，即对事物的直觉或是

对其象的辨识、分析与判断，进行决策，不一定是溯源找到原因后再进行决策。为什么会是这样呢？原因在于，一是唯象方法可使其在最短的时间内做出应对，以适应自然变化；二是人类的科学仅是对事物某一个或某几个特征的刻画，不一定是事物的本来面目。同时，许多情形需要立刻作出反应，时间上不许可，加之每个人的科学素养不同，其对事物到反应也不完全一样，而唯象方法是每个人与生俱来的一种认知万物的本能。

（1）咿呀学语. 婴儿刚出生时，脑重大约是成年人的25%，视力大约在40cm左右，能听见近处的声音，但脑功能较成人差，其正常的分析、判断能力和语言能力尚未形成，对事物大多是一种唯象认知，即模仿、重复和体验。婴幼儿通过模仿别人的样子，反复尝试和体验获知认知能力。一般地，婴幼儿熟悉母亲的声音，对其抚摸能使其开心、稳定情绪，可以嗅出妈妈的味道，会模仿大人的面部表情，笑或学做怪象等。

婴幼儿对于外界事物的感知与成人不同，不是将它们理解后作为知识储入大脑，而是将其作为一种“象”由潜意识储入大脑，是一种图形化感知，具有快速、快乐、无压力和无意识等特点。例如，成人识字，是在理解字的意思后进行记忆并举一反三但效率较低，而婴幼儿不问字、词含义，对字、词图形直接感知，类似于死记硬背，然后再组词，结合生活辨识短句，很快就明白不同的字可以组不同的词，给出不同的意思，相比于成人要快得多。

婴儿学习语言也与成人不同，是先把成人的一句话即象储入大脑，直接整句应用而不讲语法。成人则是先学习词义和语法，再学组句和篇章。这也就是为什么有的人可能一辈子也学不会一门外语而一个正常的婴儿在三年左右可以学会世界上任何一门语言的原因，因为婴幼儿采用的是唯象方法，与那句著名的“熟读唐诗三百首，不会吟诗也会吟”意思类似。

（2）拜师学艺. 对社会生产实践中的一些专业人员，如生产、运输设备操作人员，包括车工、铸造工、锻造工、焊工、汽车修理工、设备安装工、维修电工、木工、瓦工、钢筋工、驾驶员、锅炉工、美容美发师等，以及从事雕塑、印染、织锦、陶瓷、刺绣等工艺人员，单纯的书本教学掌握不了技艺，需要在实践中拜师学艺，即徒弟在真实的工作场所中观察、感知和捕捉师傅的知识和技艺，即师傅操作技艺中的“象”，“照猫画虎”式的学习师傅的动作即“象”，再在师傅的指导下进行操作，领会操作技能。这种拜师学艺，正是一种唯象方法。

中国人常说，七十二行，行行出状元。这七十二行中，行与行间有着本质的差异，都存在着密切的师承关系。同时，不同师父传承到弟子，其对师父技艺的掌握也不尽相同，这也就是为什么同一个师父教出来的徒弟，技艺不尽相同的原因。一

般地，拜师后，师父会视弟子天赋言传身教，将其技艺从“象”到“用”传授给其弟子，这与学校教育有着本质上的不同。学校里，老师教学生以课程大纲为指引，以上大课为形式，一个人教，许多学生一起跟着学。拜师学艺关系时，师父栽培徒弟或是单独传授，或是几个徒弟一起传授，使弟子不走或少走弯路，开悟而获取其真传，使本门技艺发扬光大。之所以要开悟，是因为这七十二行中有不少地方需要徒弟自行领悟其要旨。例如，川菜中有一道名菜叫麻婆豆腐，主料是豆腐，但辅料则是牛肉末、青蒜苗段适量，调味为豆豉、豆瓣、辣椒粉、花椒粉、盐和酱油适量。那么，这当中的“适量”是什么意思？意思是厨师按自己心中的标准把握，没有统一的标准，以厨师和百姓喜好为准。这就形成了川菜做法家家不同，不同的厨师炒出的菜味道不同的市场竞争格局。

（3）中医唯象. 中医是一种唯象理论，但却是对人体运行认知最深刻的一种理论。它将人体抽象为由气、血、神构成且遵从阴阳平衡的一个组合结构，即十二经脉，认为阴阳相对平衡是一个人正常活动的基础。反之，阴阳的失衡则会导致人体疾病的发生，影响生命的正常活动。对应的，中医通过“望、闻、问、切”四诊合参的观“象”方法，探求病人的病因、病性、病位，分析病机及人体内五脏六腑、经络关节和气血津液的变化，判断邪正消长和证型，采取辨证施治的原则，制定“汗、吐、下、和、温、清、补、消”等治法，使用中药、针灸、推拿、按摩、拔罐、气功、食疗等治疗，使人体恢复阴阳平衡。这里，经脉学说认为人体内存在运行气、血的通道，起沟通内外、网络全身的作用，在病理情况下，经脉呈现相应的症状和体征，可用于诊断和治愈人体内脏腑疾病；望诊是对病人的神、色、形、态、舌象等进行有目的的观察，以测知内脏病变；闻诊是听患者语言气息的高低、强弱、清浊、缓急等，嗅患者气味以辨病情的虚实寒热；问诊是询问患者或其陪同，了解患者病情以及其他与疾病有关的情况；切脉是医者用手指按患者腕后桡动脉搏动处，以体察患者脉象变化，辨别脏腑功能的盛衰以及气血津精虚滞的一种方法。



（a）太极图



（b）五行相生相克图

图2.18 太极与五行图

中医是中国古哲学中的阴阳学说和五行学说在人体上的体现。这当中，阴阳学说认为宇宙万物，包括人体由阴阳二部分组成。其中，“阴”肯定事物阴的属性；“阳”是否定事物的阴，作为事物阳的属性。它们之间的交互作用包括阴阳交感、对立制约、互根互用、消长平衡和相互转化，即图2.18（a）中的太极图，是事物对立统一的动态“象”；五行学说认为万物由木、火、土、金、水等五个属性构成，事物间的相互联系和转化遵从五行相生相克的动态规律，即图2.18（b）中所示。中医将人体的五脏器官配以五行，运用五行相生相克学说阐述人体五脏六腑间的关系以及疾病发生的机理，以指导脏腑疾病的治疗。

中医的实质是调理人体的阴阳五行，激活人体自身机能，这从图2.18（b）中可以看出。其中，肾水之精养肝木，肝木藏血济心火，心火之热温脾土，脾土化生水谷精充肺金，肺金清肃下降助肾水。同时，肺气清肃下降抑制肝阳上亢，即金克木；肝气条达疏泄脾土的郁滞，即木克土；脾的运化避免肾水泛滥，即土克水；肾水的滋润防止心火的亢烈，即水克火；心火的阳热制约肺金清肃太过，即火克金。这样，中医形成了自己一套以“象”为基础的医学体系，是对患者身体气血运行的系统调理而不是西医那种“头痛医头、脚痛医脚”，一种孤立或局部的治病理念。

4.2.唯象为腹. 人类为生存需要，经长期对野生植物中哪些植物的叶子、根茎或种子可以果腹为人类所用，哪些动物可以驯化进行辨析，按野生植物、动物成长、习性即生长象，模拟植物、动物野外生存环境，有组织地进行粮食种植和家禽家畜的饲养，正是唯象方法的一种表现。

（1）五谷食粮. 五谷由野生到有计划的人工培种，是人类对五谷各自成长的规律，包括土壤、播种、施肥、浇水、除草、虫害治理和收获，即五谷生长的象及其环境模拟的结果，如选种发泡，待种子出芽后播撒到苗床上，当秧苗长到一定长度移栽到田里，进行田间防虫、除草、防旱以及施肥管理等。



图2.19 稻田

水稻分为早稻、中稻和晚稻三种。早稻一般是在三月底四月初播种，七月中下旬收割；中稻在四月初五月底播种，九月中下旬收割；晚稻在六月中下旬播种，十月上旬收割。水稻从选种发泡，待种子出芽后播撒到苗床上，当秧苗长到一定长度移栽到田里，进行田间防虫、除草、防旱以及施肥的管理，待谷子成熟收割、打谷、晒干和储藏等，一般需要120天左右。

小麦从播种、出苗、生根、长叶、拔节、孕穗、抽穗、开花、结实，包括选种、播种、施肥、除草、浇水、防病虫害等田间管理，生长期在230天－270天。一般地，北

方小麦在九月中旬播种，来年五月收割；南方小麦在十一月中旬播种，来年6月上旬到七月上旬收割。

玉米分为春玉米和秋玉米。春玉米四月下旬到五月上旬播种，八月下旬可收获；秋玉米最晚不迟于7月中旬播种，在10月中下旬收获。玉米生长期分为苗期、穗期和花粒期。其中，苗期是玉米从出苗到拔节的一段时期，是玉米生根、长叶、分化茎节的营养生长阶段；穗期是玉米从拔节到穗开花。这一时期既有根、茎、叶旺盛生长，也有雌雄穗快速分化发育，是决定玉米果穗数、果穗大小和每穗粒数的关键时期；花粒期是玉米从穗开花到籽粒成熟为止的生长阶段。

高粱在每年的三月中旬至六月下旬均可播种，对应的，成熟时间为每年到七月上旬-十月中旬。高粱生长分为苗期、拔节期、抽穗开花期、灌浆成熟期四个阶段。其中，苗期指高粱从种子萌发到拔节前这一时期，需要25～30天；拔节期指高粱穗分化至旗叶展开之前，需要30～40天；抽穗开花期指穗从旗叶鞘抽出，上而下陆续开花，需要10～15天；灌浆成熟期指高粱开花授粉后2～3天籽粒开始膨大至籽粒成熟，需经历30～40天。

小米的播种时间是每年春季的二月到四月，生长期一般在一年左右，分为早熟、中熟和迟熟三个品种。其中，早熟品种的生育期为60－100天，中熟品种为101－120天，迟熟品种在121天以上。一般地，春播选用迟熟品种，夏播选用中熟品种，秋播选用早熟品种。小米生长过程分为幼苗期、孕穗期和成熟期，与高粱生长到苗期、拔节、抽穗和成熟过程类似。

（2）瓜果蔬菜. 瓜果蔬菜由野生到田间耕种，是人类对其生长规律，即生长象，包括种子、生长周期、食用部位，以及其生存土壤和环境多年观察、模拟的结果。瓜果蔬菜中含有多种矿物质、维生素和食物纤维，为人体提供维生素C、胡萝卜素、矿物质和膳食纤维，是人体所需营养的主要来源。

瓜果蔬菜是“靠天”收获的应季品，按收获期限的不同，分为一年生、两年生和多年生等三类。其中，一年生的瓜果蔬菜在播种当年开花结果，如番茄、辣椒、黄瓜、白菜、菠菜等；二年生瓜果蔬菜在播种年形成肉质根、叶球等贮藏器官，经过冬季到来年抽苔、开花、结果；多年生瓜果蔬菜在一次播种后可采收多年，如黄花菜、石刁柏等。一般地，叶菜类需25－45天收获，果菜类需要80－120天收获，春、夏、秋、冬季均有应季蔬菜。

瓜果蔬菜的生长过程分为种子、发芽、生长、开花和结果等。例如，大白菜生长过程分为营养生长和生殖生长两个阶段。营养生长分为发芽期、幼苗期和莲座期，生殖生长即大白菜抽苔、开发、结子和枯萎的过程。这里，发芽期为从种子发芽到出土、显露真叶的过程，需要3－5天；幼苗期是从真叶显露到展开5－8片叶子，形成

第一个叶环的过程，需要12－18天；莲座期指幼苗期结束后出现两个以上叶环，植株出现包心的时候，需要20-30天。

（3）家畜家禽. 家畜家禽指人类驯化后，有计划地繁殖和饲养的动物，为人类提供生存所需的蛋白质、营养物及御寒材料，辅助人类的生产实践活动等。那么，哪些野生动物可以驯化，驯化的前提又是什么呢？一个动物是否能够为人类驯化，在于人类是否掌握了动物的食性、习性和康复能力，即不同动物的象，进而模拟、引导或改变动物食性、习性以适应人类为其提供的生存条件。

自然界中的动物按其在食物链中的位置分为三类，即肉食性动物、杂食性动物和草食性动物。其中，肉食性动物以捕捉其他动物为食，如老虎、狮子等以其他兽类、鸟类为食；草食性动物直接以植物为食，如马、牛、羊等。实际上，食物链中的一切动物都直接或间接地以植物为食。鸟类、鱼类按照其食性，分为食谷类、食虫类、食肉类和杂食类等四种。

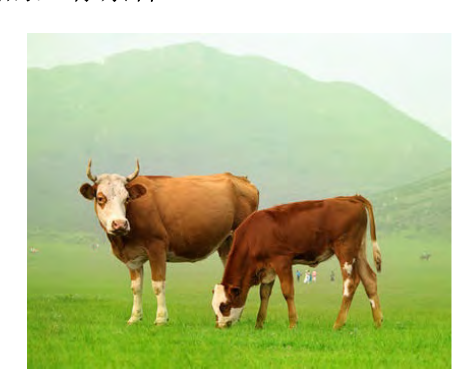


图2.20 **黄牛**

动物生活习性有着很大的区别。它们有的夜伏昼出，有的昼伏夜出，与捕食对象的习性不无关系，即其捕食对象在白天或夜晚出行。例如，老虎、狮子是肉食性动物，喜欢白天休息，晚上活动，有自己的专属领地，喜欢独来独往，无固定巢穴；马的性情比较温顺，属于草食性动物，喜欢群居，胆子小、易受惊，视力不好但记忆力好，听觉和嗅觉出色；牛属于草食性动物，有多个胃，反刍频率和反刍时间受年龄、牧草质量以及健康的影响，日反刍9～16次等；羊属于草食性动物，喜欢群居，吃干净的饲料、饮清凉卫生的水，性情温驯、胆小，嗅觉和听觉灵敏，适宜在干燥、凉爽的环境中生活等；狼与狗同属一个家族，都是肉食性动物。狼栖息于森林、沙漠、山地、寒带草原、针叶林、草地等地带，多夜间活动，具有奔跑速度快、嗅觉敏锐，听觉好等特点；狗经人驯化后，与人的起居基本一致，即夜伏昼行。动物为人类驯化的前提，是人类能够按其生活习性提供充足的饮食以使其种群繁衍，并具有温顺的特点。这也是时至今日，为什么家畜家禽大多为草食性或食谷、食虫、杂食性温顺动物或鸟类、鱼类的原因。

4.3.唯象识时. 中国古时候是一个农耕时代。那时，观天象、辨时节，以及预测风雨是一件关系农耕的一件大事。古人观测天象凭借的是星象图，包括太阳系中的太阳、月亮、金、木、水、火、土五大行星、二十八星宿等星象，还包括空中的云、气、虹、风、雷、雾、霜、雪等天气现象，服务于农业生产。

（1）观天识时. 中国古人观天象为农时需要。古人经过长年累月对地球、太阳运行的观察，发现地球绕太阳一圈需要365天，将地球绕行太阳一周的轨迹分为24等份，每一等份对应一个节气，即“二十四节气”，代表着地球在绕行太阳轨道上的二十四个不同位置，对应着气候、物候、时候的变化。四季由立春、立夏、立秋、立冬表示春、夏、秋、冬等四季的开始，每季有六个节气。这当中，春季的六个节气为立春、雨水、惊蛰、春分、清明和谷雨；夏季的六个节气为立夏、小满、芒种、夏至、小暑和大暑；秋季的六个节气为立秋、处暑、白露、秋分、寒露和霜降；冬季的六个节气为立冬、小雪、大雪、冬至、小寒和大寒。

中国人观天象而成的二十四节气，既能对应于气候变化，又能对应于农耕生产。例如，立春是万物复苏，开始备耕的时节；雨水是开始植树、果树嫁接的时节；惊蛰是华夏部分地区进入了春耕的时节；清明是春耕春种的时节；谷雨是开始种高粱、玉米等秋作物的时节；小满是麦类等作物籽粒开始结果、籽粒饱满但尚未成熟的时节，需准备收麦子；芒种是开始播种有芒的谷类作物，如晚稻、黍、稷等；立秋指庄稼不用再锄；白露是开始收获高粱和早玉米的时节；立冬指一年的田间操作结束，农作物收割后需要收藏，以备来年之需等。

太阳周而复始的东升西落，在人类产生了“日”这个基本的时间单位，中国人大约在商代已经有了黎明、清晨、中午、午后、下午、黄昏和夜晚这种时间概念，后又将一日等分为十二个时段，即夜半、鸡鸣、平旦、日出、食时、隅中、日中、日昳、晡时、日入、黄昏、人定计时，并与人体气血运行和十二地支对应，这样就有子时（23:00 点-次日凌晨1:00点）、丑时（凌晨1:00点-3:00点）、寅时（3:00点-5:00点）、卯时（5:00点-7:00点）、辰时（7:00点-9:00点）、巳时（9:00点-11:00 点）、午时（11:00 点-13:00点）、未时（13:00点-15:00点）、申时（15:00点-17:00点）、酉时（17:00点-19:00点）、戌时（19:00点-21:00点）、亥时（21:00点-23:00点）这十二个时辰，形成了中医人体养生理论，即子时宜养胆，丑时宜养肝，寅时宜养肺，卯时宜排毒，辰时宜吃早饭，巳时宜工作，午时宜小睡，未时宜多喝水，申时宜工作，酉时宜养肾，戌时宜放松，亥时宜睡眠等，与中国人“天人合一”的哲学思想相匹配。

（2）观云识天气. 人们常说，谁知道天上那块云下雨？言即预测下雨是一件难事。中国古人观天识云辨风雨，由云的形状、来向、移速、厚薄、颜色的变化等云象，总结出一套观云识天气的方法。例如，钩卷云出现是下雨的先兆，雨后或冬季出现的钩卷云，会连续出现晴天或霜冻；炮台云出现表示空气不稳，一般隔8－10小时左右有雷雨降临等，还有低云往东刮阵风，低云往西披蓑衣：天上灰布云，地下雨丝绵；天上棉花云，地下雷雨临；有雨天边亮，无雨头顶光等云象规律。

雨与云有着密切的关系。陆地、海洋中的水蒸发成水蒸气，水蒸气上升到一定

高度遇冷形成小水滴构成云。小水滴在云里相互碰撞、合并成大水滴，大到空气托不住时，就会从云中落下成雨。欧阳博士告诉女儿，古人观云象预测风雨是用唯象方法归纳云与风雨的关系。现如今，人们用气象卫星收集云层数据较观云象预测风雨要准确的多，古人的预测方法仅是在民间流传。

4.4.唯象识物. 对天体的分布、状态、组成、变化、现象的观测、收集和分析，是人类用唯象方法认知天体，预测地球上的气象、气候，进而服务于人类会实践的一种主要方法，这在科学技术高度发达到今天仍然适用。

(1) 天体运行. 人类对天体的历年观测表明，天体始终处在自转、与其他天体绕着一个共同的中心公转的运动状态中。人类对天体相对运动的观测产生了时间与距离，发现了天体运行规律。例如，地球的自转产生了日与时，月球绕地球转产生了月，地球绕行太阳产生了年的概念等。特别是，彗星因拖着一条光亮长尾而备受关注。不同的彗星有着不同的运行周期，有的几年、数十年或上百年回归一次，有的则需要上千年回归一次，有的甚至终身不回归地球。

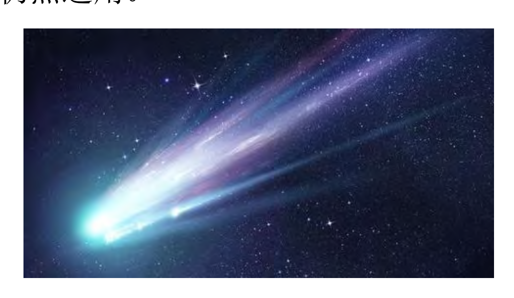


图2.21 哈雷彗星

经过观测，太阳系行星的运行规律，即金星公转周期为224.70日，自转周期为243.01日；火星公转周期为686.98日，自转周期为1.026日；水星公转周期为87.70日，自转周期为58.65日；木星公转周期为4332.71日，自转周期为0.41日；土星公转周期为10759.5 日,自转周期为0.426日，天王星公转周期为30685日，自转周期为0.426日；海王星公转周期为164.8 日，自转周期约为0.75 日。

观测还使人类发现了一系有趣的列天文现象。例如，天体间的掩食现象，如日全食、日偏食及日环食；行星合月、双星伴月、五星连珠、水星凌日、金星凌日、流星群等。对此，中国的《书经》（公元前2137年）上面有日食记录，《史记》中的天官书篇详细记载了各种天象。随后，中国古人在东汉时期发明浑象仪，测出太阳和月球的角直径都是半度，黄赤交角为24^o，并提出月光是日光的反照等天文现象。



图2.22 五星连珠

开普勒发现行星三大运行定律采用的正是唯象方法，是在第谷对行星运行天象观测基础上的演绎结果。过程是这样的，丹麦天文学家第谷对行星运行观测了二十一年，发现了许多天文奇观，记载了大量的行星运行数据。临终前，他将记录传给

了德国天文学家开普勒。开善勒对第谷的观测数值计算后提出观察结果与此前人们计算结果不一致的原因，在于此前人们一直错误地假定天体是沿圆形轨道运行，认为只有沿着椭圆形轨道运动，火星运行的计算结果才与观察结果一致。在此基础上，开普勒总结出行星运动的第一定律，即“行星在椭圆轨道上活动，太阳位于其中的一个焦点上”，发现了行星运动的速率变化与距太阳的远近有关，即近日点行星速率最大，远日点速率最小，总结出行星运动的第二定律，即“行星与太阳的连线在相同的时间内扫过相同的面积”。随后，开普勒对行星轨道间的几何关系进行研究，发现了行星运动的第三定律，即“行星公转周期的平方等于轨道半长轴的立方”。

（2）宇宙中心. 欧阳博士告诉女儿，采用唯象识物构建的理论，虽然也能经由观测象的比对检验，但因其依赖的是象，是人对被观测物的感知，在此基础上构建的理论也很可能是一个局部理论，不一定是事物本真，这在人类早期对宇宙中心的认知上尤其如此。

人类生活在地球上，感觉所有的地外天体都是在围着地球转，亚里士多德等人认为地球静止不动，是宇宙的中心，认为宇宙是一个有限的球体，日月围绕地球运行，物体总是落向地面。哥白尼经过数学计算，认为行星的逆行顺行是地球和其他行星绕太阳运行周期不同造成的假象，即地球是月球运行的中心，天体都在绕着太阳运转，宇宙的中心应在太阳附近而不在地球，引发了人类对宇宙认知思维上的变革，即单靠人的感知不一定正确。

现代科技证实，太阳是太阳系的中心，太阳系中的行星都绕着太阳旋转。类似的，银河也有中心，银河系中所有的恒星都绕着银河系的中心旋转。那么，宇宙有中心吗？宇宙中是否存在一个中心点让所有的恒星都绕着它旋转，就如太阳系的行星绕着太阳旋转一样？这个问题看似在宇宙中寻找一个中心点，实则与问宇宙形状或是宇宙边界在哪里等问题类似。这类问题的症结点在于人类的认知能否跳出宇宙而观看外面的世界并引发一系列问题，诸如宇宙是独一无二的还是有多个平行的宇宙？人类认知的宇宙是否就是真实的宇宙？人类认知能力是否有极限，我们能否感知自己生存的这个宇宙全貌？人类在宇宙间是否可以旅行？··· 等等。实际上，宇宙如果唯一的，我们不可能离开宇宙，也不可能发现宇宙边界，因为宇宙无边无界。换言之，我们能观测到宇宙全貌，即形状的前提是存在多个宇宙。类似地，我们能够发现宇宙是否存在中心的前提，也是存在多个宇宙，人类具备宇宙间的穿梭能力，即旅行速度超过光速，而这恰是摆在人类面前一条难以逾越的鸿沟。

欧阳博士对女儿总结说，宇宙大爆炸如果是正确的，那么宇宙中就一定存在一个重心，即大爆炸发生的那个点。同时，宇宙重心就是宇宙中心，因为万物由此点产生。那么，按大爆炸的扩展规律，宇宙是一个持续膨胀的三维球体$\mathbb{B}^3$，边界是大

爆炸前端面，即球面$\mathbb{S}^2$。但如上所述，人类可能永远无法走出我们这个宇宙发现宇宙中心，验证宇宙边界是一个球面。故此，宇宙大爆炸仅是一种采用唯像方法对宇宙起源的假说，是一种无法验证的假说。

第5节 人知局限

人识万物中有一个基本问题，即宇宙中的任何一个客观存在是否都可以为人类所认知？如果我们用U表示宇宙万物构成的集合，$U^o(t)$表示人类在时刻t认知的万物集合，则显然$U^o(t)$是U的一个子集。这一问题实质是问U与$U^o(t)$的关系，即是否有这样一个时刻t_∞使$U^o(t_\infty) = U$，或是$t \to \infty$时有$U^o(t) \to U$。注意，人对一个客观存在T 的认知依赖于人对T的特征感知。假设在某一时刻t关于T已知的特征为$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$，未知的特征为$\nu_k, k \geq 1$，则人们对$T$的认知在逻辑上等同于

$$T = \left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\mu_i\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{k\geq 1}\{\nu_k\}\right).$$

那么，上述问题又转化为T的每个未知特征ν_k是否可以为人类认知呢？假设人的认知能力是无限的，答案看起来是肯定的，但如果人的认知能力是有限的，则答案一定是否定的，因为人类有限，所有人的认知能力构成的集合也一定有限。

科学上，对人类认知能力这一基本问题的不同回答，形成了两种对立的认知观点。一种是可知论，认为人类能够认识客观世界及其规律；另一种是不可知论，认为人类不能彻底认识客观世界及其规律。那么，人在认知万物这个问题上，可知论与不可知论到底是哪一种正确呢？答案是这两种观点都略显偏颇，不完整！首先，人对一个客观存在的正确认知是人的六根对这一客观存在的感知，经意识形成认知，再经实践检验，即实践→认识→再实践→再认识循环往复，确认正确的认知；其次，实践检验是对该客观存在的认知用人对其感知的象进行比对，即唯象方法，前提是人对客观存在感知的象正确。那么，人对客观存在感知的象是否一定是正确的呢？答案是否定的，因为人类可能永远也回答不了宇宙中的一些基本问题。例如，宇宙形状、宇宙中心等问题，只能提出一些假说解释观测象中的部分。故此，可知论虽然是科学构建的基石，并不完全正确！那么，不可知论就一定是完全正确的吗？当然也不是。否则，人类又何以能在地球上生存繁衍，以适应自然变化？人类能够适应自然变化而生存的前提不正是对自然的正确认知吗！注意，这里提到的对自然的正确认知不是指整个自然，而是指与人类生存与繁衍相关的那一部分自然。

人的六根，即视觉、听觉、嗅觉、触觉、味觉和意识能够感知的范围是有限的。例如，在显微镜发明前，人眼无法分辨细菌、病毒等微粒。那么，显微镜出现后是

否能让人观测比细菌、病毒更小的微观粒子，如原子、质子、中子、电子或夸克呢？当然不能！时至今日，人们虽然可以在一些专门设计的科学试验室中观测原子、质子、中子或电子等运行轨迹，但仍无法捕捉夸克的运行轨迹，更不要说比夸克还小的粒子了，即人类仅是对能够感知的客观存在进行认知，无法认知感知外的客观存在。换言之，人对万物是部分可知而非完全可知。

5.1.可知未知局限. 可知未知局限，指人的六根对某一客观存在具有感知能力但因客观条件的限制，使人无法感知到其存在。有一天，惠子很高兴地告诉欧阳博士，说老师给她安排了一位新同桌，是刚从外省市转学过来的，俩人的性情相投，在一起玩得很开心。欧阳博士问女儿："之前你们认识吗？"惠子回答说："不认识，是刚转学到我们班的！"欧阳博士说："那也就是说，你在这之前并不知道她的存在，对不对？"惠子回答说："对呀，之前我们不认识！"欧阳博士问女儿："由这件事，你觉得你的认知能力是有限还是无限的呢？"惠子说："应该是有限的吧，因为之前我并不知道她的存在！"欧阳博士肯定了女儿的回答，说人用六根感知万物，仅是宇宙中那些能够为人感知的客观存在才能感知。可知论认为，人的六根可以感知的客观存在一定能够认知。但这一观点的核心在于，人的能力是否足以对其认知？答案并不一定是肯定的！例如，人的视觉在一定范围内可见，超出可视范围的事物，人在观测时视不见或是其观测的象模糊不清，甚至会误导结论。例如，发出的电磁波频率超出射电望远镜灵敏度和空间分辨率或不发出电磁波的遥远星系，即便是采用射电望远镜也观测不到，人类又何以能认知这类星系。实际上，人类能看见的客观存在是宇宙中的很少一部分，这一小部分已足以让人类认知生存与发展所需适应的自然环境，但即便是人类可见部分，也存在看不清或无法辨析的客观存在。这当中，微观粒子的波粒二像性与人的视觉暂留，是人视觉局限的代表。

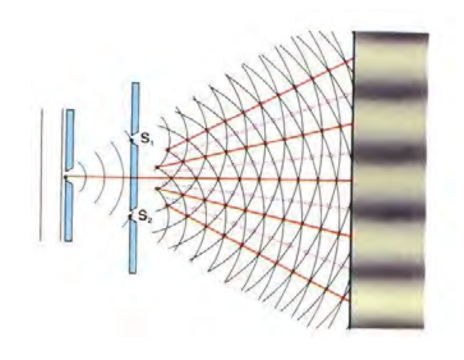


图2.23 双缝实验

[**双缝实验**] 双缝实验是物理学中证明微观粒子波粒二象性的一个著名的实验。在这一实验里，光源发出的微观粒子可以同时穿过S_1或S_2两个小孔，或是通过其中任意一个小孔而从光源抵达记录屏。

光子是构成光的最小粒子，具有粒子性质。那么，光子是否还具有波动性质呢？如果光子以波的形式运动，穿过双缝落到黑板上是一道道痕迹，因为波之间存在干涉现象。实验表明，即便是一个一个的发射光子，屏幕上还是出现一道道痕迹，证明了光有波动性质。但光子为何会如此，人们架设高速摄像机拍摄光子是怎样通过S_1、S_2形成干涉的。这时，神奇的一幕出现了，照片上只有两条条纹，即一个一个地发射光子，并没有在屏幕上出现干涉现象。

为什么会是这样，为什么与不架设高速摄像机的记录结果不一致？一些人认为这是个恐怖实验，并与人的意识牵扯在一起，认为是人的观测导致了光的波动性，认为在一个特定时刻，光子不能既是粒子又是波而只能是其中的一种，是人的观测诱发的，即有人观测时，光子呈现的是波动性；没有人观测时，它就塌陷变成粒子，这一解释当然不能令人信服！这当中的问题在于，怎么能确定光源发出的是一个接一个的光子是而不是光团或光束？又怎么能确定人体或是设备磁场对光子的运动没有干扰？此外，即便能够确定发出是一个一个的光子，光子或者微观粒子的内部结构是怎样的，是与足球一样的小球体吗？微观粒子的波粒二象性恰说明人的视觉局限，即看不清微观粒子的内部结构而认为其等同于一个直径无限小的球体或质点的想法是错误的，需要确定微观粒子内部的组合结构。

[**视觉暂留现象**] 人们坐在高铁上看窗外一颗颗树飞奔而过，分辨不清树的品种或花色，只是一闪而过。树还是那棵树，为什么会是这样，为什么看不到一颗颗树而只见一片片树林闪过？因为人眼存在视觉暂留，即人眼在某个视像消失后，仍可使该物像在人的视网膜上滞留0.1-0.4秒左右。

电影胶片摄制应用的就是人眼的视觉暂留原理。电影在放映时，以每秒24格画面匀速转动。这样，一幅幅静态画面就会因人眼的视觉暂留而变成一种连续的视觉动作而娱乐人的生活。但电影的实质是借助人眼存在的视觉暂留，是连续动作到离散化，是一种假象。类似地，人们对一个高速运动的物体观测时，因人眼存在视觉暂留现象，得到的观测结果不一定是物体运动的真相，而需要借助于高速摄影机拍照。



图2.24 电影摄制原理

可知论认为，人的六根可以感知的客观存在一定能为人类所认知，这种观点是基于人类的科学技术发展最终一定会使人类认知这类客观存在的假设。假设有其积极的一面，但缺陷在于，如果对客观存在的科学本质都没弄清，又怎么可能由科学原理产生一种技术让人类认知这一客观存在，这在逻辑上就是错误的。例如，如果

宇宙真的产生于大爆炸，宇宙边界就是大爆炸的前端面。那么，处在宇宙中的人类怎么可能利用燃烧能发明一种超光速飞行设备载着人类飞到宇宙边界附近，探知宇宙边界的物质构成，又怎么可能飞出宇宙知晓宇宙的形状!

5.2.不可知局限. 人类认知的不可知客观存在的局限，是指客观存在自身不具有人的眼、耳、鼻、舌、身、意等六根能感知的特征而导致人的认知局限。一些人不认可这种认知局限，认为人是万物之灵！人不能认知的属于“虚无缥缈”或“迷信”范畴，不能称其为物，即物要“眼见为实”。实际上，这是将客观存在等同于人类认知的客观实在，一定程度上阻碍了人类对万物的认知。

人类的不可知客观存在的局限有三种情形：

第1种.客观存在不具有人能感知的特征。 客观存在是万物的自然特征。这当中，能够为人类感知的，称为客观实在，即人类证实了这种客观存在；不能为人类感知的，因不能为人类感知，不会对人的意识产生影响，少有人讨论。那么，人不能感知的客观存在是否在宇宙中一定不存在呢?答案是否定的！首先，人的感官由眼、耳、鼻、舌、身、意构成，能够为人类感知的客观存在是其能够由人的视觉、听觉、味觉、嗅觉和触觉而感知。一种事物如果自身不发出和反射电磁波，不发出和反射声音，且无味或不散发气味，不与人类接触，人类就无法感知到这种客观存在，也不知道应当采用什么样的特征对其进行刻画。科学仪器在一定程度上延伸了人的感知能力，但仅是对人的感知能力在一定程度上的延伸；其次，万物特征仅靠人的视觉、听觉、味觉、嗅觉和触觉感知远远不够。同时，人对万物的认知是一个循序渐进的过程。例如，人类对电磁场的认知就是一个例子。在电磁理论出现前，少有人相信它是一种客观存在，因为人的视觉、听觉、味觉、嗅觉和触觉对电磁场无法感知。但今天没有人怀疑电磁场是一种客观存在。类似电磁场这样的例子宇宙中还有很多。故此，不能简单或错误地认为人类感知不到的客观存在宇宙中就一定不存在，而是要突破人类的感知局限去认知宇宙中的客观存在，与自然协调发展。

第2种.客观存在具有人能感知的特征但超出了人的感知范围。 这种情形中，事物具有人的六根感知的某一个或某几个特征，但特征的值超出了人类可感知的范围。例如，人的眼睛可见的电磁波波长为400-760nm，波长小于400nm的是紫外线，大于760nm的是红外线，均不为人眼所见而需借助仪器探测。自然界中的一些动物，如皮皮虾等凭肉眼可以看到红外线、紫外线、X射线等；人的耳朵能听到的声音频率范围为20Hz-20000Hz，最敏感的范围是1000Hz-3000Hz之间的声音。频率大于20000Hz的为超声波，小于20Hz的为次声波，人耳均听不见。其中，超声波方向性好，反射能力强，应用于工业、农业、医学、军事等领域；次声波有极强的穿透力，具有一定的破坏性，会干扰人的神经系统等；狗比人的嗅觉灵敏，是人嗅觉的1200倍，

常用于人类嗅觉不到的搜查。例如，抢险救灾中的搜救人、重要物品；安保检查中的搜爆炸物品，以及禁毒中的毒品搜查等；味觉，即酸、甜、苦、辣、咸等五味是人类的感知，但并不一定比其他动物强。例如，实验表明，鱼对甜味比人敏感，能感知人类感知不到的甜味，是人的500倍等。故此，对人与动物的感知能力比较发现，至少在视觉、听觉、嗅觉和味觉上，人类感知的灵敏度和范围小于其他一些动物。

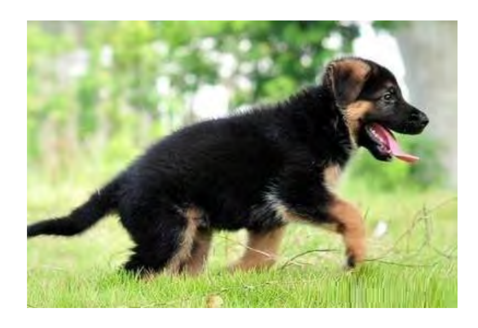


图2.25 警犬

第3种.客观存在同时具有人能与不能感知的特征。这种情形中，人类只能对客观存在进行局部认知而不能掌握其完整规律，包括两种情形：一是客观存在的某些行为不能用人类设定的视觉、听觉、嗅觉、味觉和触觉标准刻画，人类尚不清楚应怎样对其认知；二是客观存在的特征可由人对视觉、听觉、嗅觉、味觉和触觉划定的标准进行刻画，但超出了人类可感知的范围。无论是哪一种，都表明人类对这种客观存在的认知是局部而非整体认知。例如，双缝实验就属于这种情形。实验中，人们看到粒子通过S_1、S_2在屏幕上存在干涉，但高速摄像机拍摄的结果却不存在干涉。为什么这一实验让人感觉怪异，原因在于结果违背了人对粒子理解的常识，即要么都存在干涉，要么都不存在干涉。那么，是人的观测或摄像机拍照客观影响了粒子，还是将微观粒子等同一个直径无限小的球体这种常识本身是一种错误的假设并不清楚。这一实验，表明微观世界中存在大量人类尚未认知的客观规律，是否是人的观测或摄像机拍照，即脑电波或摄像机磁场干涉了微观粒子行为尚未有证据。那么，是否可以认为意识可以影响客观存在呢？首先，宏观物质世界中不能，因为宏观世界中客观存在不以人的意志为转移。双缝实验是在对微观粒子观测时出现的怪异现象。那么，微观物质世界中意识是否可以影响客观存在呢？微观粒子在人眼中有不确定性，但这种不确定性是来源于人的观测即意识作用还是人视觉上的局限尚未得到证实，需进一步进行探索。

5.3.条件认知局限. 宇宙万物中，人类可认知的物质仅占到宇宙物质总量的4.6%，在对万物认知上，人类是在用对这4.6%物质的认知，即局部认知推演宇宙万物。当然，这种方法人类不一定能得到对万物的正确认知，何况对宇宙中这4.6%物质的认知大多又是条件认知。条件认知，指人类在一定条件下对某一客观存在的相对认知，范式为：“如果A，则有B”。这里，A是认知条件，B是认知结论。实际上，人类对宇宙万物的认知，大多是在一定条件下的认知，是在地球或近地太空上的认知，因为人类发明的飞行器速度达不到光速，赶不上宇宙膨胀，不能遍历宇宙。

实验科学是条件认知的典型代表，即在一定条件下得到结论，他人可以在同样条件下证实或证伪，但实验结论在其他星球上是否成立不得而知。那么，理性科学是否一定是对万物的绝对认知呢？答案同样是否定的！因为理性科学是人类按照自己的逻辑在一定条件下构建的认知体系。例如，数学上的1+1=2是否为绝对认知？当然不是！1+1=2也是条件认知，即在自然数系中的运算结果，在其他数系中并不一定成立。例如，在有限数域$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$上，1+1=0而不是2；类似地，在逻辑代数的真值运算中，1+1=1等。人对万物的认知，是人按自己的认知能力和条件的认知，是一种逐渐认知过程。例如，关于宇宙年龄，先后出现过50亿年、90亿年、115亿年、137.7亿年和138.2亿年等，是人用自己的时间观念对宇宙年龄的认知，至于宇宙真实年龄是多少并不知晓，仅是按自己的局部认知对宇宙年龄的推演。

欧阳博士问女儿，如果宇宙真的诞生于138.2亿年大爆炸，大爆炸之前的世界是什么呢？惠子想了想说：“大爆炸之后才有宇宙，这之前应该是一个混沌的世界！您在盘古开天地、上帝创世中讲过。”欧阳博士说：“盘古开天地和上帝创世属于宇宙神创说，人类自己能否认知大爆炸之前的世界是个谜题，逻辑上应该是不能，因为人出现在宇宙诞生之后，这也是宇宙神创说的价值，即解决人在认识上的疑惑。对了，你知道斯蒂芬.霍金吗？”惠子说：“是不是写《时间简史》的那位科学家？老师介绍过他的事迹，很励志。”欧阳博士说，霍金曾在一次接受媒体采访时回答记者提问，说不能问宇宙大爆炸之前世界是什么，因为时间和空间都是因大爆炸产生的，在大爆炸前不存在时间，这类问题本身没有意义。欧阳博士问女儿：“你觉得霍金这个回答对吗？”惠子说：“对他的回答我一直很疑惑，时间有起点就一定有起点之前。而且，霍金的回答也不对！时间是在人类出现后人类自己给出测量时光流逝的指标。按他的观点，是不是我们讨论人类出现之前的宇宙就没有意义了呢？”欧阳博士肯定了女儿的疑惑，告诉她问题的核心在于人类认知的宇宙与客观宇宙是否是一回事。霍金忽略了人的认知局限，认为人类认知的宇宙就是客观宇宙。实际上，按中国先哲们对宇宙的认知，这个问题很好回答，即承认人的认知局限，告诉提问者我们说的宇宙是人类能认知的宇宙，对大爆炸之前的世界人类无法认知，这样丝毫不会损害科学的功用。相反，可以客观地得出人类在与万物相处中需要自我约束，进而才能实现与自然可持续发展的结论。

第6节 注释与评论

6.1. 人的认知局限性使一个人仅能认知宇宙中的部分事物，无法回答人是从哪里来到哪里去这样的宇宙极问。任何一个人都由其父母所生，但这种逆推的终极结

果是什么，并不清楚。也正因为此，一些人对达尔文“生物进化论”中断言生物进化遵循由低级到高级、由简单到复杂的规律，见文献[Jin]，特别地，对人是由已经灭绝的古猿演化而来表示怀疑，因为达尔文的生物进化论断言的是生物的整体进化规律而任何一个人生命有限，不可能在有生之年对其进行验证。相比之下，不如《山海经》中的女娲造人和《圣经》中的上帝造人形象，更易于为初学者所接受，这是人的认知局限性使然，但并不一定表明认知的正确性。

6.2. 人对万物认知的局限性源于人的“六根”，即眼、耳、鼻、舌、身、意认知能力的局限性。当然，借助一些科学仪器或设备的帮助可拓广人“六根”的感知范围，但这种局限依然存在。这在一定程度上造成了人由“无中生有”中认知事物而趋于真实的渐进过程，见《道德经》、《金刚经》和《心经》的释义，如文献[Luj1]、[Luj2]和[Wrt]等。同时，人对万物的认知是由感知上升到理论，甚至有的理论就是唯象理论，因为唯象理论较之抽象理论更易于验证和把握，是一种由表象判断内因，进而提出应对策略的理论，难点在于怎样由表象准确判断内因，如中医理论等，但人类在几千年生产生活实践中形成的唯象理论已足以满足人的生存，并非不科学。

6.3. 许多人认为，物理学中双缝实验的重要性在于证实了光子等微观粒子的波粒二象性[Liu]，但与此同时，双缝实验再次印证了人对万物认知中的局限性，即在微观世界中人的观测行为不能独立于微观粒子进行；类似地，在宏观世界中人也无法认知那些超越人“六根”感知能力的事物，对此进一步的讨论见第十一章第2节组合力场。这当中的一个基本问题，是人“六根”的感知是否可以认知宇宙万物。对此，中国古哲学和佛学均持否定态度，表现在老子《道德经》第一章中的“道可道，非常道；名可名，非常名”，佛学中的“缘起性空”和《心经》中的“色不异空，空不异色；色即是空，空即是色；受、想、行、识亦复如是”等，而科学是人对“道”的局部认知或是“缘起”，见文献[Fur1]-[Fur3]、[Luj1]-[Luj2]和[Wrt]。这里，道家的“名”与佛学的“色”在对事物认知上含义等同。这个问题的进一步讨论，即科学是人的“六根”对万物的局部认知或条件真实在本书第12章中还有进一步的分析。

$C_{\mathscr{M}}$
万物组合

第 3 章

万物组合

****

横看成岭侧成峰，远近高低各不同；
不识庐山真面目，只缘身在此山中。

— 宋.苏轼《题西林壁》

************************** 毛林繁. 万物组合论 ***************************

第1节 认知模型

人对客观存在认知上的局限性直接导致其对客观存在的整体认知是一个组合结论，是对各种局部认知在一定的空间拓扑结构下的组合。这里，组合是指客观存在中的整体与局部的关系，构成整体的那些局部又称为基元，即整体由局部按一定的关系组合而成。这时，惠子已在一所著名中学就读。欧阳博士对惠子说，这从一个著名的思想模型，即盲人摸象的寓言中可以得到认知的启迪。

[**盲人摸象**] 这是佛经中一个著名的故事，其蕴含着人类对万物的认知是由局部认知组合而成的哲学思想，因为人类认知万物的过程恰似盲人摸象。说是很久很久以前，有六位盲人听别人说起大象如何神奇，想知道大象长得什么样子。在这六位盲人的一再恳求下，有一天，一位邻人牵来一头大象让六位盲人感知。第一位盲人摸到了大象牙齿说："我知道了，大象就像一个又大、又粗、又光滑的大萝卜!"，第二位盲人摸到了大象的鼻子说："不对，大象是根管子么!" 第三位盲人摸到了大象的耳朵说："不对不对！大象是一把大蒲扇嘛!" 第四位盲人摸到了大象的肚子说："你们怎么摸的，大象明明是一堵墙吗!" 第五位盲人摸到了大象的大腿说："净瞎说，大象明明是根大柱子!" 最后，第六位盲人摸到了大象的尾巴说："唉，你们说的都不对，大象不过是一根草绳子!" 他们都认为自己对大象的感知正确，坚持己见而争论不休。这时，一位觉者走上前说："你们对大象的感知都正确!" 觉者说："之所以你们认为的大象形状不同，是因为你们每个人摸到的大象身体部位不同。实际上，大象具有你们每个人所说的那些特征!"



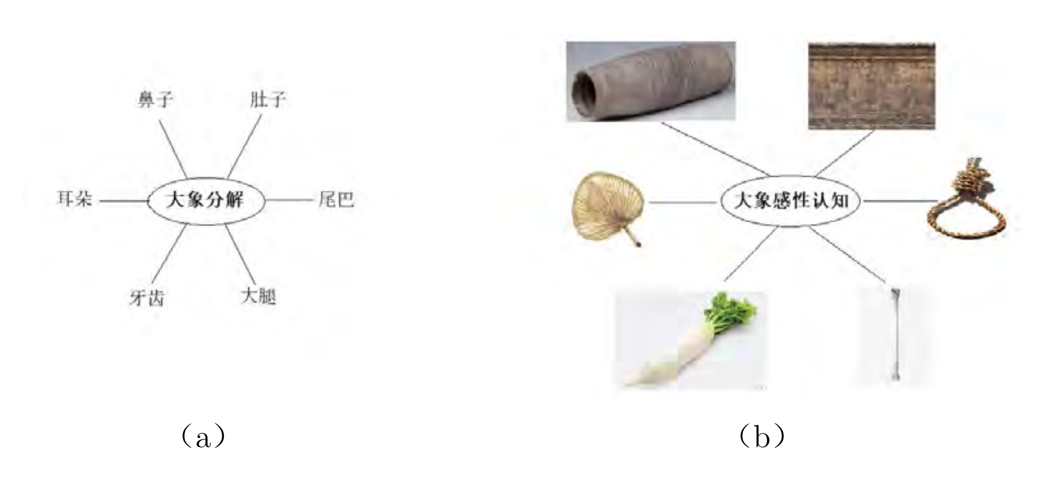
图3.1 大象

对一个正常视力的人而言，大象的外形在其眼中是如图3.1所示那样一清二楚，对盲人的回答不禁发笑：一个活生生的大象在盲人的感知中，怎么就成了一根柱子、一根绳子、一个大萝卜、一把蒲扇、一堵墙或一根管子的样子呢，他们对大象的感知不是"驴唇不对马嘴"又是什么呢？一个盲人与一个视力正常的人相比较，其最大的遗憾是无法用眼睛辨别万物的形状。欧阳博士问女儿："你觉得这些盲人的答案可笑吗？" 惠子回答说："有点可笑！我在动物园看到过大象，知道大象的样子。" 欧阳博士接着说，你在笑过之后需要反思的，是为什么你眼中的大象在盲人眼中成了

柱子、绳子、萝卜、蒲扇、墙或管子的模样，这与人类认知万物又是什么关系。实际上，人类认知万物，特别是认知宇宙中那些尚未为人类认知的客观存在，与盲人摸象感知大象的外形情形一样，因为人类对那些尚未认知的客观存在，有的是无从感知，有的也正如盲人摸象一样是局部认知！

那么，真实的大象形状是什么样子，大象的形状在觉者的眼中又是什么样子呢？盲人摸象这个寓言，一方面阐释了人类认识自然的局限性，即人类认识自然形成的科学知识带局部性或有片面性；另一方面，也阐释了认识客观存在的系统、整体或全局性的重要性。那么，如何纠正人类这种局部感知带来的偏见或者不正确认知，确定客观存在的本来面目呢？这就需要对一个客观存在的局部认知进行组合，以形成人类对这一客观存在的完整认知。

欧阳博士告诉惠子，盲人摸象的寓言中觉者话语中的“大象具有你们每个人所说的那些特征”，正是告知六位盲人对大象外形局部感知的一种组合认知。按这六个盲人感知的大象身体的不同部位，大象被六位盲人分解成了六个感知部位或基元，即大象的腿、尾巴、鼻子、耳朵、肚子和牙齿，见图3.2（a）；感知的结果或特征是盲人已知的六种形象物，即柱子、绳子、管子、蒲扇、墙和萝卜，见图3.2（b）。



（a）　　　　（b）

图3.2 大象感性认知

这样，觉者告知盲人的大象形状为

$$\text{大象形状} = \{4\text{根柱子}\}\bigcup\{1\text{根绳子}\}\bigcup\{2\text{根树枝}\}\bigcup\{2\text{把蒲扇}\}\bigcup\{1\text{堵墙}\}\bigcup\{1\text{个大萝卜}\}$$

更进一步，如果把大象的脑袋、耳朵、鼻子、牙齿、脖子、肚子、腿和尾巴分别抽象为一个空间点，不同的大象身体部位如果相衔接，如耳朵、鼻子、牙齿与大象的脑袋，腿、尾巴与肚子等，则在两个空间点之间连接一条线以示它们之间的衔

接关系。这样，大象的外形还可以用一种点线结构表示，见图3.3所示。这里，符号$a=\{$牙齿$\}$，$b=\{$鼻子$\}$，$c_1,c_2=\{$耳朵$\}$，$d=\{$脑袋$\}$，$e=\{$脖子$\}$，$f=\{$肚子$\}$，$g_1,g_2,g_3,g_4=\{$腿$\}$，$h=\{$尾巴$\}$。这样的一种图示称为大象外形的组合结构，其上的字母a、b、c_1、c_2、d、e、f、g_1、g_2、g_3、g_4和h称为图的标号。注意，图3.3中的点线结构中，已舍去了点和线对应大象具体部位的物理含义。例如，点b对应大象的鼻子，图3.3中则是把鼻子抽象为b，即一个空间点。

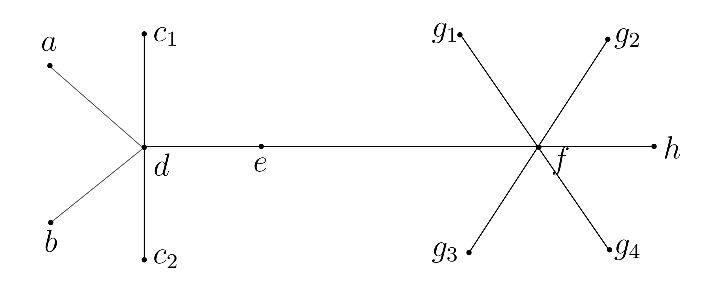


图3.3 大象外形结构图

类似地，如第1章所述，宇宙中的客观存在大至宇宙，小到微观粒子，它们之间相互影响、相互制约，无不存在类似图3.3的这种点线组合结构以对应联系。故此，抽象研究这种点线组合结构，即拓扑图的一般性质与演化规律，对人们认知宇宙万物不无益处。

1.1.抽象图. 人类认知万物是由具体到抽象，再由抽象到具体的过程。欧阳博士告诉女儿，有一种直觉方法，把基元与整体的关系画在一张纸上，类似图3.3 用点表示基元，用线连接衔接的两个基元。这种想法的进一步抽象就有了抽象图的概念。一个抽象图是集合上二元关系的一种图示，简称为图。一般地，设V是基元组成的一个有限集合，$E\subset V\times V$，即存在二元关系的基元对(v,u)组成的集合，$I:E\to V\times V$，则3-元有序组(V,E,I)定义为一个图G，称V为顶点集，E为边集，I为边与顶点的对应关系。有时，为强调是图G的顶点集、边集或对应关系，上述符号也分别记为$V(G)$、$E(G)$和$I(G)$。边$(v,u)\in E(G)$上的定向定义为$v\to u$，这样定义的图称为有向图。一个图G中，如果每条边(v,u)上都存在定向$v\to u$和$u\to v$，即双向，则称为无向图，边(v,u)也简单地记为$vu\in E(G)$。注意，这里定义的图允许边重复地出现。如果一个图G不允许边重复出现，则G称为简单图。

一个图$H=(V_1,E_1;I_1)$称为是图$G=(V,E;I)$的子图，如果它自身是一个图且$V_1\subseteq V$，$E_1\subseteq E$且有$I_1:E_1\to V_1\times V_1$，记为$H\prec G$。更进一步，如果有$V_1=V$，即图H和G有相同的顶点集，则称H为G的一个支撑子图，即可以支撑G的每个顶点。

欧阳博士对女儿说，一个图G由其内部的子图刻画。最直观的，是假想有一个

小精灵在图G的顶点和边上行走，看走过的痕迹决定G的结构和性质。图G中的一条游迹指的是G中的一个顶点与边的交替序列$u_1, e_1, u_2, e_2, \cdots, e_n, u_{n-1}$。这里，边$e_i = (u_i, u_{i+1})$，$1 \leq i \leq n$，整数$n$ 称为游迹的长度。如果一条游迹中有$u_1 = u_{n-1}$，即回到原点，则这条游迹称为是闭的；否则，称为是开的。特别地，如果G的一条游迹中所有边都不重复出现，则称为迹；如果所有的点都不重复出现，则称为路。一条闭路也称为一个循环或圈。图3.3 中，adefhfeda是一条闭的游迹，而adefh则是一条路。

那么，怎样在平面上把一个图G一目了然地表示出来呢？欧阳博士告诉女儿，对一个给定的图G，把其顶点v对应为平面$\mathbb{R}^2$上的点$p(v)$，且$u \neq v$时有$p(u) \neq p(v)$，顶点v和u间的边(v, u)对应为连接两个点之间的一条曲线，则得到图G在平面上的图解。这里，映射$p: G \to \mathbb{R}^2$。图3.4中给出了一个无向图$G = (V, E; I)$的图解。其中，$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，$E = \{e_i;\ 1 \leq i \leq 11\}$，$I(e_i) = (v_i, v_i), 1 \leq i \leq 4$；$I(e_5) = (v_1, v_2) = (v_2, v_1)$，$I(e_6) = I(e_7) = (v_2, v_3) = (v_3, v_2)$，$I(e_8) = (v_3, v_4) = (v_4, v_3)$，$I(e_9) = I(e_{10}) = (v_4, v_1) = (v_1, v_4)$，$I(e_{11}) = (v_2, v_4) = (v_4, v_2)$。

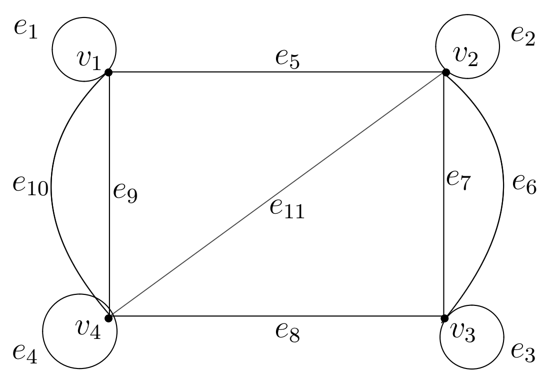


图3.4 图解

给定两个图$G_1 = (V_1, E_1; I_1), G_2 = (V_2, E_2; I_2)$，称它们同构，记为$G_1 \cong G_2$，指的是存在一个1-1映射$\phi: V_1 \to V_2$，$\phi: E_1 \to E_2$使得对$\forall e \in E_1$有$\phi I_1(e) = I_2 \phi(e)$，即$\phi(v, u) = (\phi(v), \phi(u))$，$(v, u) \in E(G_1)$。实际上，两个同构的图仅是标记上的不同，其组合结构完全一致。图3.5中给出了两个同构图的例子。

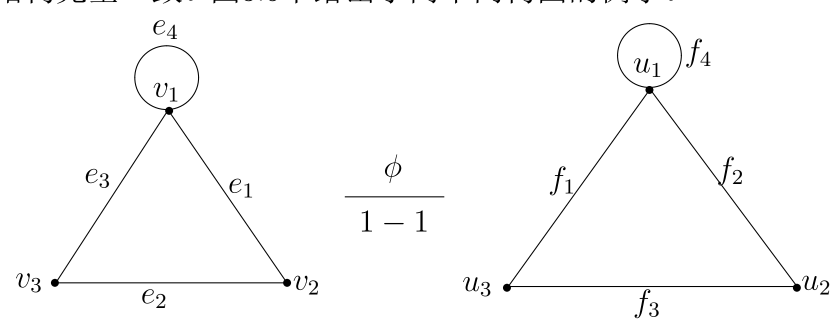
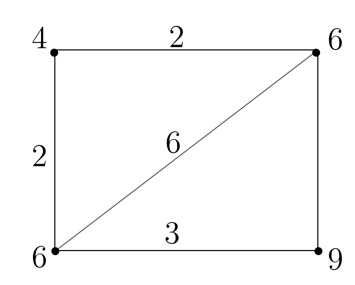


图3.5 图同构例子

这里，同构映射$\phi : E_1\bigcup V_1 \to E_2\bigcup V_2$定义为$\phi(e_1) = f_2, \phi(e_2) = f_3, \phi(e_3) = f_1, \phi(e_4) = f_4$和$\phi(v_i) = u_i$，$1 \leq i \leq 3$。易于验证对于$\forall e \in E_1$ 有$\phi I_1(e) = I_2\phi(e)$。

注意，欧阳博士说，图仅能刻画一个客观存在的内部结构基元间的组合关系，并不能完整体现一个客观存在的本来面目。实际上，人类虽然是由一个客观存在的局部感知认知客观存在，但却是基于局部感知的认知组合对该客观存在的认知，并非仅是对其组合关系的认知。再回顾一下盲人摸象寓言中那位觉者话语间的蕴意，人类对一个客观存在完整认知需要还原图上的每个顶点所抽象掉的实物特征，以及每条边所替代的实物间的衔接方法，这就是如图3.3所示的那种标号图G^L。那么，什么是标号图呢？设G 是一个图，L 是一个集合（实物或抽象集合）。标号图G^L是在G上定义标号$L : V(G)\bigcup E(G) \to L$，即采用$L$中的元对$G$的顶点和边进行标记。例如，图3.6所示标号图中，图（a）采用$\mathbb{Z}^+$中的正整数对顶点标定，边采用关联的顶点标定数的最大公约数标定，即常说的标号图；图（b）采用长方体对顶点A、B、C和D标定，长方形对边a、b、c和d标定，即A、B、C、D的顺次衔接处为一个长方形，但A与C的衔接处为一段直线。故此，图3.6（b）代表的是一个空间几何体。



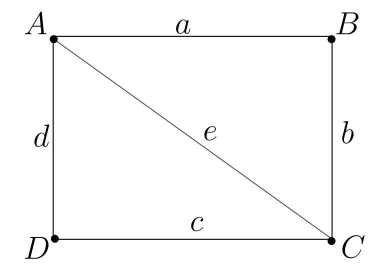


图3.6 标号图

1.2.图例. 一些典型图类对应于实物结构，具有构造简单、结构明确，易于确定其图性质等特点。欧阳博士对女儿说，这里例举一些图类如下。

环束. 一个环束$B_n = (V_b, E_b; I_b)$是对由一个点出发多次巡回到起点的游迹刻画，其顶点集$V_b = \{ O \}$，边集$E_b = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 和$I_b(e_i) = (O, O)$，$1 \leq i \leq n$，是有n条边的单点图，见图3.7。

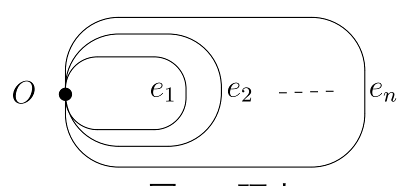


图3.7 环束

双极图. 一个双极图$D_{s.l.t} = (V_d, E_d; I_d)$类似于对磁铁磁力线的刻画，其顶点集$V_d = \{O_1, O_2\}$，边集$E_d = \{e_1, e_2, \cdots, e_s, e_{s+1}, \cdots, e_{s+l}, e_{s+l+1}, \cdots, e_{s+l+t}\}$。若$1 \leq$

$i \le s$，有$I_d(e_i) = (O_1, O_1)$；若$s+1 \le i \le s+l$有$I_d(e_i) = (O_1, O_2)$；若$s+l+1 \le i \le s+l+t$有$I_d(e_i) = (O_2, O_2)$，见图3.8。

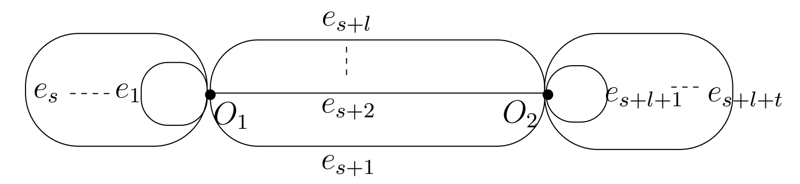


图3.8 双极图

路. 对任意整数$n \ge 1$，一条长度为$n-1$的路P_n是一条走过n个景点无返复道路的刻画，其顶点集$V(P_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，边集$V(P_n) = \{(v_i, v_{i+1}; 1 \le i \le n-1)\}$且$I(v_i, v_{i+1}) = (v_i, v_{i+1})$，$1 \le i \le n-1$，见图3.9。

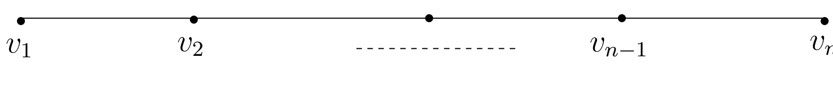


图3.9 路

圈. 对任意整数$n \ge 2$，圈C_n是一条闭合的路P_{n+1}，即$v_1 = v_{n+1}$，见图3.10。

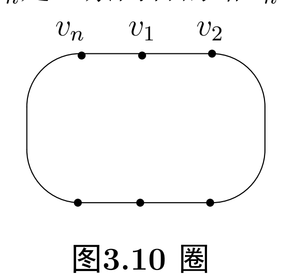
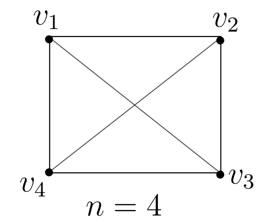


图3.10 圈

树. 一颗树是自然界树干、树枝的模拟。数是一个无圈图，即任意两点之间只有一条路相连，不存在回路。例如，图3.3大象外形结构图就是一棵树。

完全图. 一个完全图$K_n = (V_c, E_c; I_c)$是对基元间相互作用、相互影响情形的刻画，其顶点集$V_c = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，边集$E_c = \{e_{ij}, 1 \le i, j \le n, i \ne j\}$且$I_c(e_{ij}) = (v_i, v_j)$。图3.11中给出了$n=4$和$n=6$两个完全图。



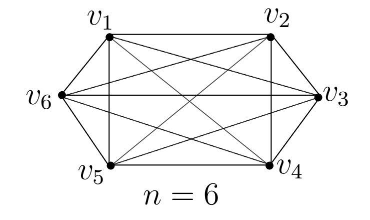


图3.11 完全图

多部图. 对任意整数$r \ge 1$，一个r-部图$G = (V, E; I)$指存在一个划分，将顶点集V划分为r个子集$V_1, V_2, \cdots, V_r$使得$\forall e \in E$，$I(e) = (v_i, v_j)$。这里，$v_i \in V_i$，$v_j \in$

V_j且$i \neq j, 1 \leq i, j \leq r$，即对任意整数$1 \leq i \leq r$，$V_i$中的顶点互不相连，对应的基元互不影响。一般地，如果$r = 2$，则称这个r-部图为2-部图或偶图。

正则图. 对一个顶点$v \in V(G)$，与顶点v相关联的边数称为顶点v的*次*或*度数*。例如，完全图K_6中，每个点的次数为5；圈C_n 中每个点的次数为2；环束B_n中，顶点O的次数为n等。一般地，如果一个图G中每个点的度数相同，则称为正则图，是对任意一个基元受其他基元影响程度相同情形的刻画。例如，完全图K_n为$(n-1)$−正则图，圈C_n为2-正则图。图3.12中给出了一个10个顶点的3-正则图，称为Petersen图。

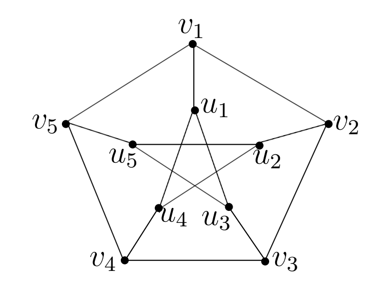
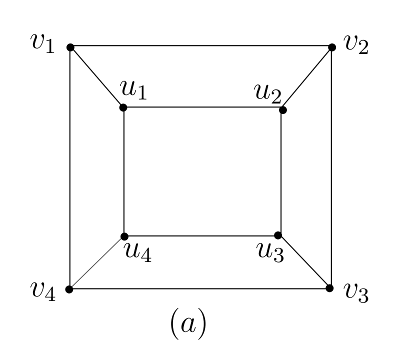


图3.12 Petersen图

1.3.图的嵌入. 抽象图是构成一个客观存在基元关系的刻画。而在人的视觉中，一个真实的客观存在，例如大象的图结构是处在于一个3-维欧氏空间$\mathbb{R}^3$中的，且不同的边之间没有交叉，这就需要研究抽象图或标号图的空间嵌入问题，以刻画客观存在的变化与发展状态。一般地，设G是一个图，$\mathcal{T}$是一个空间（欧氏空间或是局部同胚于欧氏空间的拓扑空间）。图G称为可以嵌入$\mathcal{T}$，指的是存在一个连续的$1-1$映射$f : G \to \mathcal{T}$，使得如果$p, q \notin V(G)$则$f(p) \neq f(q)$，即图G映射后的边仅在顶点处可能相交。特别地，如果$\mathcal{T}$恰好是一个欧氏平面$\mathbb{R}^2$，则G称为可平面图。其中，面指的是由有限条边围出的最小区域，即其中的任何一条简单的闭曲线可以在不离开这个面的条件下连续地收缩为其上的一个点，又称为同胚于一个圆盘$\mathbb{B}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$。例如，图3.13（$a$）是一个图在平面上的嵌入，其中的$v_1u_1u_2v_2v_1$ 就是一个面，（b）是其在3-维欧氏空间中嵌入，对应于正六面体。



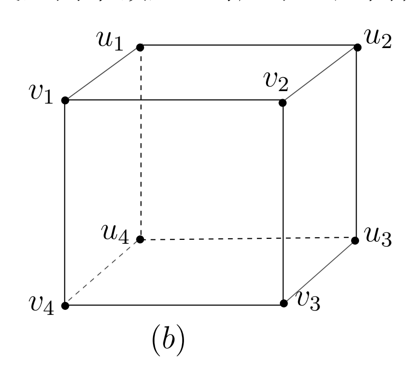


图3.13 嵌入图

欧阳博士告诉女儿，一个抽象图G或标号图G^L在3-维空间$\mathbb{R}^3$或者维数$n \geq 3$的空间$\mathbb{R}^n$中的可嵌入性是显然的，因为任意一个物质都是人眼在3-维空间所见而图G或标号图G^L是物质的抽象产物。然而，人们并不知晓任意一个图是否一定对应于某一个物质，需要一般性地验证任意一个图G可以嵌入到维数$n \leq 3$的空间$\mathbb{R}^n$，因为如果G可嵌入某一个空间$\mathcal{T}$，则标号图G^L与G仅是标号的差异，不影响嵌入性，一定也可以嵌入$\mathcal{T}$。更进一步，对任一个连通的简单图G，即其上每两个顶点之间有一条路相连，人们可以验证图G不仅可以嵌入而且可以直线嵌入到空间$\mathbb{R}^3$中，即每条边对应于$\mathbb{R}^3$中的一条直线段。

首先，设$\gamma = (t, t^2, t^3)$为一条空间曲线。在曲线γ上取n个点$(t_1, t_1^2, t_1^3), (t_2, t_2^2, t_2^3), \cdots, (t_n, t_n^2, t_n^3)$，这里，$t_1, t_2, \cdots, t_n$为$n$个不同的实数。应用解析几何中的关于三点共线的结论，对任意三个整数$i, j, k, l, 1 \leq i, j, k, l \leq n$，如果存在一条直线经过点$(t_i, t_i^2, t_i^3)$，$(t_j, t_j^2, t_j^3)$ 和点(t_k, t_k^2, t_k^3)，则一定有

$$\begin{vmatrix} t_k - t_i & t_j - t_i & t_l - t_k \\ t_k^2 - t_i^2 & t_j^2 - t_i^2 & t_l^2 - t_k^2 \\ t_k^3 - t_i^3 & t_j^3 - t_i^3 & t_l^3 - t_k^3 \end{vmatrix} = 0。$$

这样，应用行列式的性质，一定存在整数$s, f \in \{k, l, i, j\}$，$s \neq f$使得$t_s = t_f$，与假设矛盾。从而，曲线γ上的任意三个点一定不共线。

其次，设图G的顶点集为$V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$。对任意整数$1 \leq i \leq n$，定义映射$\pi : G \to \mathbb{R}^3$为$\pi(v_i) = (t_i, t_i^2, t_i^3)$，满足如果$(v_i, v_j) \in E(G)$则取$\pi(v_i v_j)$为点$(t_i, t_i^2, t_i^3)$和$(t_j, t_j^2, t_j^3)$间的直线段。故此，$\pi$就将图$G$嵌入3-维空间$\mathbb{R}^3$使得其每条边为$\mathbb{R}^3$中的一条直线段。

这样，一个抽象图G在空间的可嵌入问题就只剩下$n = 1$和2需要讨论。注意，$n = 1$的情形是G在直线上的嵌入，除路P_n或是其并集形成的图类外，其它图类均不能嵌入到直线；$n = 2$的情形即平面嵌入问题，需要满足欧拉公式$p - q + r = 2$。这里，图G的顶点数为p，边数为q，且其在平面上形成r个面。

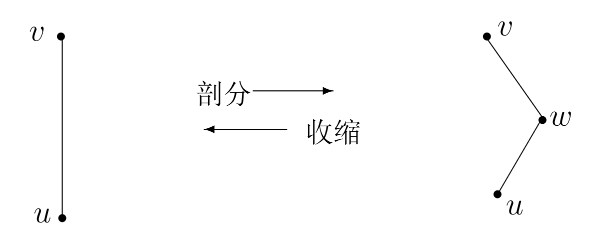


图3.14 边的一次初等剖分

一个图G的初等剖分定义为在G上的一系列增加或减少顶点、边的结果，即在一

条边$e = vu$中增加一个新顶点w，去掉边$e = vu$，增加边vw, wu，或是在G中收缩次数为2的顶点v，用一条新边边$e = vu$取代边vw, uw，如图3.14所示。对应的，图G的一个剖分指在G上进行了一系列的初等剖分得到的图。称一个图H同胚于图G，指的是$H \cong G$或是H与G的一个剖分同构。在此基础上，库拉托斯基进一步给出了一个图G可平面的特征，即一个图是可平面的，当且仅当其不含有同胚于K_5或$K(3,3)$的子图。例如，$K(2,2,2,2,2)$不是可平面图，因其含有子图K_5。

图G或标号图G^L是一个客观存在基元构成关系的抽象。那么，在人们认知一个3-维几何体或宏观物体时，又应当如何采用嵌入图进行刻画呢？一般地，刻画一个宏观物体整体的外在性质，即不考虑内部基元相互作用时，常将其抽象为一个几何点构建唯像理论。例如，质点动力学就是这样的理论。然而，即便是人眼中的宏观物体，大量的也不能采用这种简单的刻画。例如，行星运行时相互间引力的影响，单个或群体动物的行为，植物的生长变化等，都不能将其简单抽象为一个几何点，而需要考虑构成整体的基元间的相互影响。在这种情形下，对客观存在的认知需要一般性地研究基元间的相互影响或关系，以嵌入标号图为研究对象，刻画其发展或变化规律，这就是基于嵌入标号图构建的连续流理论。

第2节 物理组合

人类对客观存在的认知，大至宇宙、小到基本粒子的认知，是在对物质局部认知或对客观存在构成最小基元的认知基础上的一种组合认知。欧阳博士提醒女儿说，人们在这里默认了一个先验假设，即如果把握了最小构成基元的特征或变化规律，就可以把握任何一种物质的特征与变化规律，确定其某一种所见行为或状态是由哪一个或哪几个构成基元所致。这种思想称为还原论，在人类认知万物中存在了几千年，即便到了今天，这种思想在对宏观世界的认知中仍然是一种主要方法。那么，这种组合认知的思想对微观世界是否也同样适用呢？答案是肯定的！对微观世界的认知一定程度上受到人类在认识上的局限性影响，并没有弄清其结构，仅是提出了一些组合认知模型。

2.1.行星系统. 人类对行星系统的认知始终处在一种渐进过程，因为时至今日，人们尚不清楚宇宙中到底有多少颗行星，但可以肯定的是，行星间存在引力作用，各自在进行着圆周运动，即自转或公转。

地日系统. 地日系统是局部刻画地球和太阳间相对关系的运动系统，又称为2-体问题，即地球自转、地球绕太阳公转这一K_2^L标号图。这里，K_2^L的顶点标号为太阳、地球，边的标号为它们之间的万有引力，即$\mathbf{F}_{es} = G \cdot \frac{m_{\text{earth}} \cdot m_{\text{sun}}}{|\mathbf{r}_{\text{earth}} - \mathbf{r}_{\text{sun}}|^2}$，见图3.15（a），

其构成地日运动系统，即图3.15（b）。这里，$\mathbf{r}_{\text{earth}},\mathbf{r}_{\text{sun}}$表示地球、太阳在一个坐标系中的向量。

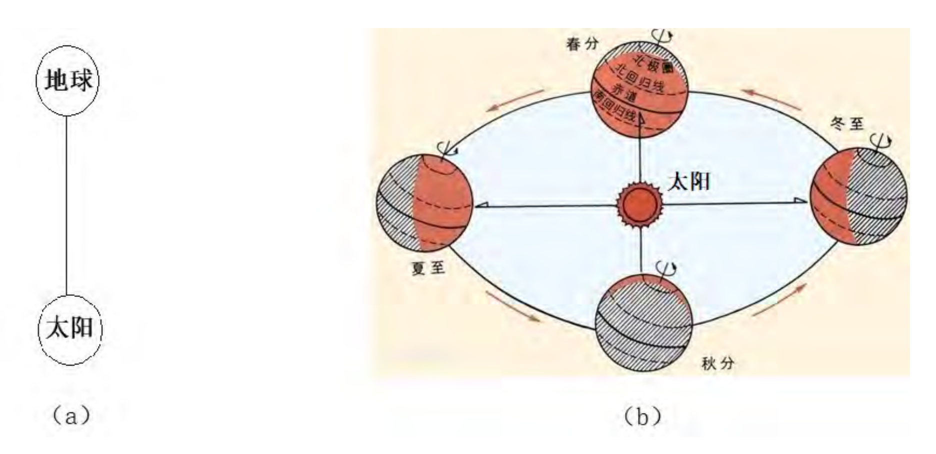


图3.15 地日系统

地日月系统. 地日月系统是局部刻画月球、地球和太阳间相对关系的运动系统，又称为3-体系统，即月球自转、月球绕地球转，地球自转、地球带着月球绕太阳转这一K_3^L标号图。这里，定点标号为地球、月亮、太阳，边标号为它们之间的万有引力$\mathbf{F}_{es}$，$\mathbf{F}_{em}$和$\mathbf{F}_{ms}$，见图3.16（a），其构成的地日月运动系统，即图3.16（b）。此时，因月亮与太阳间的引力小，如果忽略，地日月系统也可以用P_3^L标号图近似。

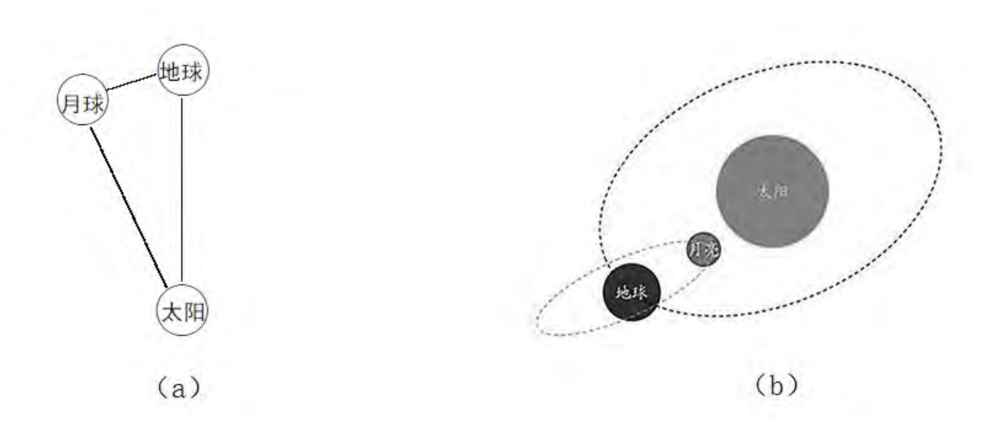


图3.16 地日月系统

太阳系行星系统. 太阳行星系统是局部刻画太阳系与八大行星间相对关系的运动系统，又称为9-体系统，即水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星等自转，绕太阳公转这一K_9^L标号图，这里，顶点标号为太阳和八大行星，边标号为它们之间的万有引力$\mathbf{F}_{ij}$。这里，i,j为太阳系中的任意两个行星，见图3.17（a），其构成的太阳系运动系统，即图3.17（b）。

一般地，任意一个由n个行星构成的运动系统可以由标号图K_n^L刻画，其上的顶

点标号为行星，边标号为两个行星间的万有引力$\mathbf{F}_{s_1 s_2} = G\cdot\frac{m_{s_1}\cdot m_{s_2}}{\left|\mathbf{r}_{s_1}-\mathbf{r}_{s_2}\right|^2}$。这里，$s_1$和$s_2$为该运动系统中的两个行星，$\mathbf{r}_{s_1},\mathbf{r}_{s_2}$表示两个行星在坐标系中的向量。

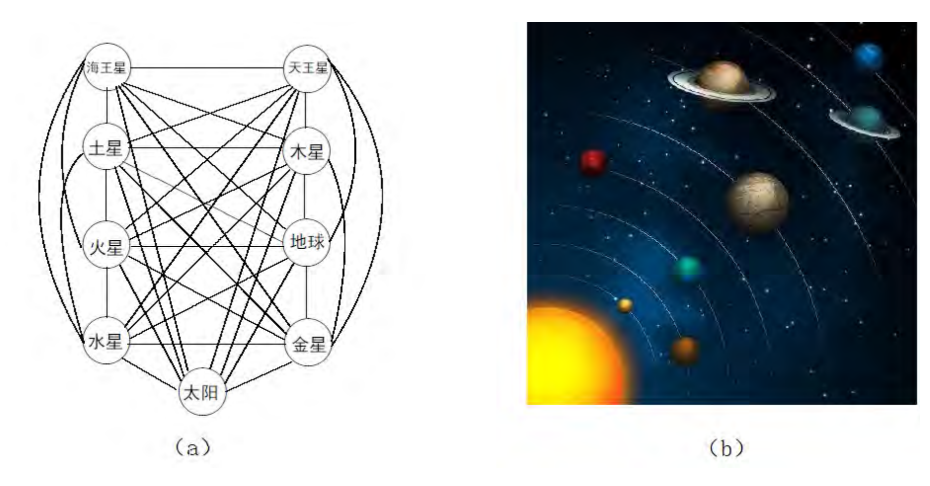


图3.17 太阳系行星系统

2.2.物质结构. 人类认知万物过程中，一直将“万物由基元组合”作为认知万物本性的基础。古希腊哲人认为，万物的本原是原子和虚空。即任何一种物质都是由原子组合而成的；虚空是原子运动的场所。认为原子在本质上是相同的，它们没有“内部形态”，不同的物质是因构成其的原子在数量、形状和排列组合上的不同造成的。这里，原子指不可再分的物质微粒，近似为一个直径无限小的球体。当然，受技术条件的限制，古希腊哲人眼中原子的“不可再分”，类似于今天人们眼中的分子，即由原子按照一定的键合顺序和空间排列组合在一起的物体。例如，图3.19中（a）给出了水分子及其固态（冰）的分子结构，(b）为石英晶体结构及其对应的分子结构，即标号图G^L。

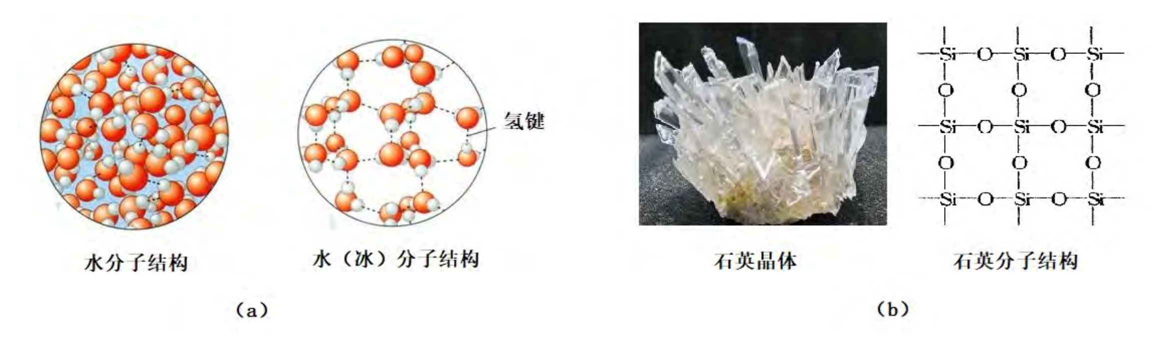


图3.18 分子结构

希腊哲人眼中的“原子不可再分”，即原子近似为一个点的模型，随着人类科学技术的进步已不再正确。十九世纪末到二十世纪三十年代，一些物理实验表明，原子并非是一个紧密的实体。对此，卢瑟福提出了原子的西瓜模型，即原子是由原子

核和绕核运动的电子，类似于西瓜子构成。其中，原子核带正电荷，与电子的负电荷相等。与此相对应，波尔类比行星运动提出了原子的玻尔模型。

（1）波尔原子模型. 波尔把原子核和电子假象为一个直径无限小的3-维球体，类比太阳系行星运动提出了一种原子结构的想象模型，即原子核类似于太阳位于中心，电子类似于行星位于不同能级上绕行原子核做圆周运动。但与图3.17不同的是，原子中，电子间的作用力为近乎0的斥力，相互间作用可忽略不计。这样，原子就是采用原子核、电子对顶点标号，用电磁力$\mathbf{F}_{he_i}, 1\leq i\leq n$对边标号的一颗中心树$T^L$或$K(1,n)^L$。这里，$\mathbf{F}_{he_i}=K\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{\mathbf{r^2}}$，$K=8.9880\times10^9$，$q_1$为电子的电荷数$1.6021892\times10^{-19}$，$q_2$为原子核电荷数，$\mathbf{r}$为原子核到电子的有向距离，$n$为电子个数。例如，图3.19中给出了$n=8$的一个原子模型。其中，电子1与电子2、电子3与电子4、电子5与电子6和电子7与电子8处在同一能级轨道上。

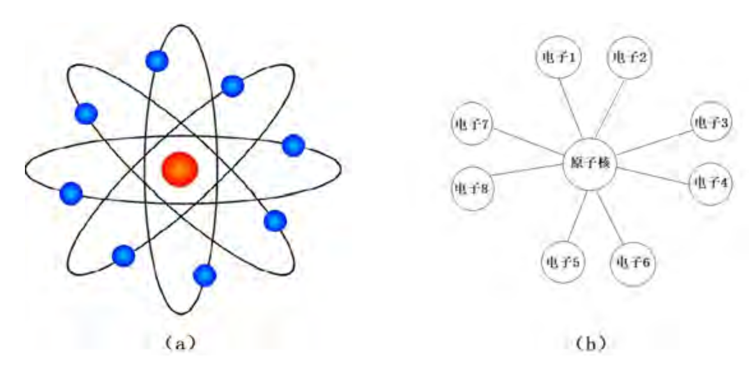


图3.19 原子结构

许多人认为波尔的原子模型是错误的，认为人类不能同时知道电子等粒子的位置和速度，即粒子位置不确定性大于等于普朗克常数$\hbar=6.6\times10^{-34}$焦耳/秒除于4π。为此，人为假设粒子附带波动性，采用概率波$\Psi(\overline{x};t)$，即粒子在t时刻出现在位置$\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)$的概率$|\Psi(\overline{x};t)|^2$刻画电子等粒子。注意，一个粒子一定会在空间$\mathbb{R}^3$中的某处出现，概率波$\Psi(\overline{x};t)$需要满足归一化条件，即$\int_{\mathbb{R}^3}|\Psi(\overline{x};t)|^2\,d\overline{x}=1$，称为粒子场。这种方法用粒子在时空中出现的概率刻画粒子，是基于粒子在时空中出现的可能性在认知粒子，同样是不完善的!

那么，电子等粒子是否没有准确的位置和速度呢？当然不是，是人类认知的局限性，无法同时测准电子等粒子的位置和速度即不可知使然! 波尔的原子模型给出的是原子的组合结构；粒子场是用一种粒子在空间历史上出现的概率刻画粒子，二者都不是粒子的本来面目，是从不同侧面在刻画电子等粒子。相比较而言，波尔的原子模型类似于图3.3刻画大象的外形结构，理解上要直观些；粒子场把粒子等同于赋有概率的时空$(\overline{x},t)$，类似于中国人采用《易经》中的64卦象算命，预测一个事件

的吉凶或事件走势。

实际上，人们对原子的结构直到今天也并不十分清楚，已有的认知都是局部认知。那么，这两种模型到底哪一种更有利于人类认知万物呢？虽然主流科学偏重于粒子场但并没有定论，需进一步融合创新，给出新的微观世界认知方法。例如，人们为什么认为双缝实验不可思议而引入粒子波，因为按人类已有的常识，发射一个粒子与发射一颗子弹一样，要么经过小孔S_1要么经过S_2，不能同时经过S_1和S_2。然而，双缝实验的结果是粒子可以同时经过S_1和S_2，到底是哪里出了问题？的确，粒子波假设可以解释双缝实验中的怪异现象，但取而代之的是粒子场$\Psi(\overline{x};t)$，即粒子出现的历史充满整个空间的假设，这样定义的粒子还能看作是构成物质的基本单位或人类认知万物中的“原子”么？

打破这种认知需要反思的，是电子等粒子是否在视觉上等同于一个直径无限小的3-维球体，这是电子等粒子假设的基础！粒子场的初衷并没有否认这一假设，只是因测不准粒子的位置和速度，用粒子出现在时空中的概率或历史刻画粒子，赋予其波动性以解释粒子可以同时经过S_1和S_2小孔现象，但这在一定程度上又否认了粒子的假设，即粒子不再是一个直径无限小的3-维球体！那么，正如盲人摸象所追求的，粒子的外形到底是什么样的？它不是一个直径无限小的3-维球体，肯定也不是粒子场刻画时使用的3-维空间$\mathbb{R}^3$，那它又是什么呢？注意，人类生活在3-维空间，无从知晓所在空间3个维度外的其他维度。这样，人类在3-维空间视觉中的点或是直径无限小的球体，在4-维或者更高维空间中是否仍是一个点或直径无限小的球体呢？答案是不一定！可能是，也可能不是！双缝实验证实的，恰是电子等粒子不是一个直径无限小的球体。

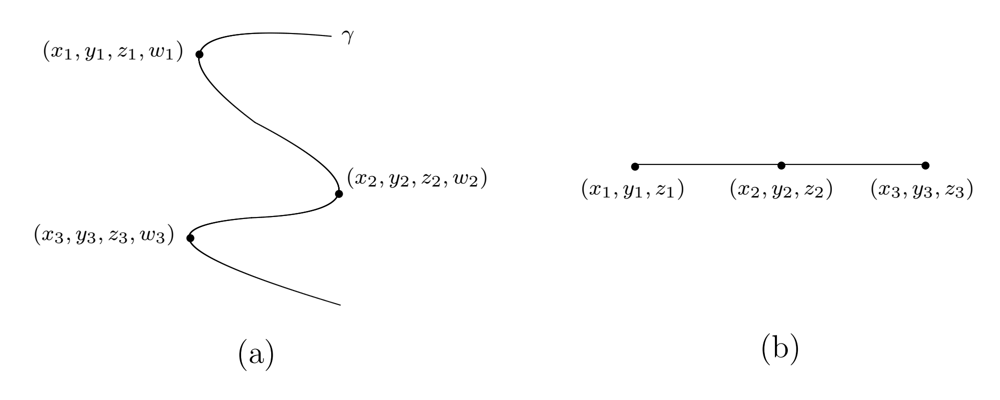


图3.20 粒子组合结构

那么，在数学上怎样刻画这类几何体呢？这很简单，即假设粒子在人类3-维视觉空间的维度相同而在其额外维度上的坐标不同即可。例如，假设一个粒子P同时出现在人类的3-维视觉空间(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)和(x_3,y_3,z_3)三个位置，在人类可视

空间$\mathbb{R}^3$外取一个几何体$\mathscr{P}$使得$\mathscr{P}\bigcap\mathbb{R}^3=\{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\}$即可。这样，粒子$P$在人类视觉下仍是一个直径无限小但可以同时出现在三个位置的几何体。这种思想甚至可以仅在人类的视觉空间$\mathbb{R}^3$外增加一个维度w实现。例如，假设粒子P是(z,w)平面上的一条曲线γ，$\gamma\bigcap\mathbb{R}^3=\{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\}$，如图3.20（a）所示，则粒子$P$在人的视觉空间$\mathbb{R}^3$中仅表现为三个点，其对应的组合结构是一条标号路$P_3^L$，见图3.20（b）。这里，$w_1,w_2,w_3$是$\mathbb{R}^3$额外维度上的三个坐标，使得曲线$\gamma$经过点$(x_1,y_1,z_1,w_1)$，$(x_2,y_2,z_2,w_2)$和$(x_3,y_3,z_3,w_3)$。

（2）原子核结构. 波尔的原子模型绘出了原子由原子核与绕核运动的电子构成。一般地，原子的直径约为$2\times10^{-10}m$，原子核的密度约为$10^{17}kg/m^3$，直径约为$2\times10^{-15}m$，仅为原子尺寸的10^{-5}，存在着大量的空域。那么，怎样对原子核探索，发现其物质构成呢？

欧阳博士对惠子说，显微镜虽然在一定程度上扩展了人的微观视觉，但仍无法观测原子核这样的微小尺度。一般地，采用粒子束轰击原子核，分析碰撞后的粒子轨迹探知原子核结构。卢瑟福从1909年起用镭放射出的α粒子轰击氮原子核，发现了质子，提出原子核由质子组成，其所带正电荷与电子所带负电荷相等，呈现电中性。这对于只有一个质子、电子的氢原子是正确的。但按电荷间“同性相斥、异性相吸”的性质，原子核如果都由质子组成，质子间无法组合在一起，卢瑟福提出应当还有一种不带电荷的中性粒子分布于质子之间，以使得原子核是一种紧密物质。1932年，B.查德威克发现了原子核内与质子在一起的另一种几乎和质子一样重的不带电荷粒子，即中子。这样，就形成了原子核由质子和中子构成的理论，见图3.21（a）。现如今，人们已经知道，质子质量为$1.672621637\times10^{-27}kg$，中子质量为$1.6749286\times10^{-27}kg$。此外，一些原子的质量不同，有相同的电子数或质子数，但具有不同的中子数，称为同位素。例如，氢原子与氘原子中，都含有一个质子、一个电子，但氘原子核中有一个中子而氢原子核中没有中子，见图3.21（b）。

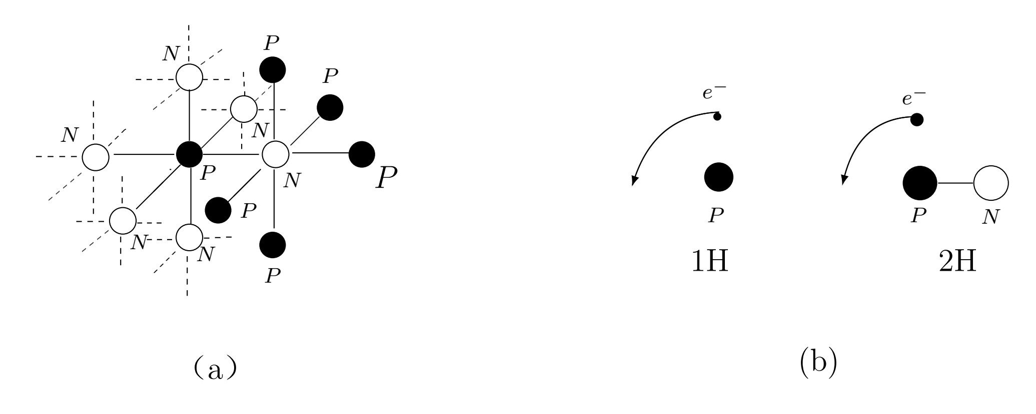
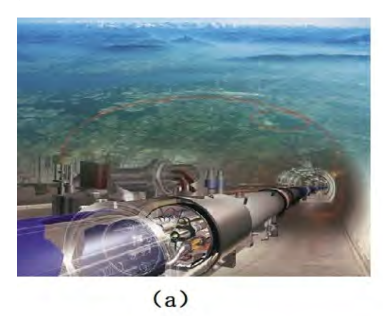


图3.21 质子与中子胶合和氢同位素

卢瑟福使用的放射性物质中放射出的α粒子能量相对较低，一般不足$7MeV$。为产生高能量的粒子束，人们研制出电子对撞机、强子对撞机等高能加速器产生粒子束探索物质结构。例如，美国在SLAC加速器中心建造的正负电子对撞机PEPII，能量为$9GeV\times 3.1GeV$（$1GeV=10^9eV$）；日本在KEK建造的正负电子对撞机KEKB，能量为$8GeV\times 3.5Gev$；欧洲核子研究中心（CERN）在瑞士、法国交界处一个$26640m$长的地下隧道内建造的LHC强子对撞机，其质子束的能量高达$7TeV+7TeV$（$1TeV=10^{12}eV$）等。图3.22（a）是LHC强子对撞机能量加速管道，（b）是对撞核心组件。


(a)

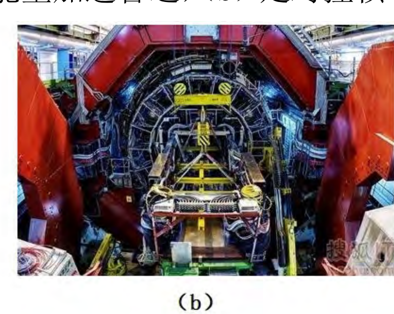
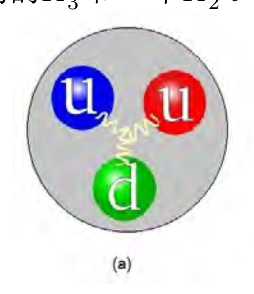
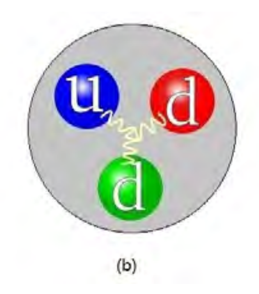

(b)

图3.22 LHC强子对撞机

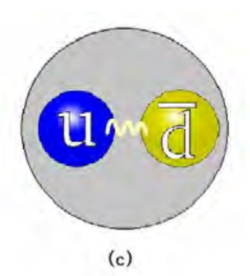
（3）夸克模型. 夸克是人们研究原子核结构时，为刻画质子、中子、介子等强子的行为提出的一种更小的构成基元，人们在实验中仅是伴随着对强子的观测而探索夸克的存在，但至今没有发现独立的夸克。注意，夸克是作为质子、中子和介子的构成基元提出的一种粒子，见图3.23，其中的图（a）、（b）、（c）分别是质子、中子和介子的构成。图3.24以夸克为基元，给出了质子、中子和介子的标号图，分别为两个同构的K_3^L和一个K_2^L。



(a)

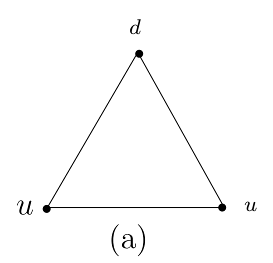


(b)

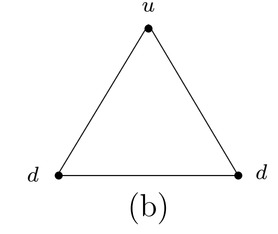


(c)

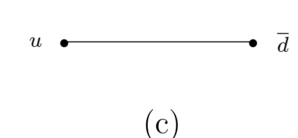
图3.23 夸克构成模型



(a)



(b)



(c)

图3.24 强子组合结构

多数科学家认为夸克是一种基本粒子，但也有一些科学家批评将夸克作为基本粒子，认为它仅是一种假想的实体，是为进一步解释强子行为而提出的基元。

2.3.基本粒子. 基本粒子，是指在不改变物质属性的前提下人们可认知的构成物质的最小基元，人们发现粒子的主要途径是在宇宙射线、高能粒子束轰击原子核和核反应堆中搜寻粒子。注意，基本粒子是物质构成的一个相对概念，因为在一定的技术条件下任何一个粒子都可以进一步细分，包括基本粒子。

万物由原子构成，原子由原子核和电子构成，原子核又由质子和中子构成，人们陆续发现了电子、光子、质子和中子，再后来，又发现了正电子、中微子、介子、超子、轻子、夸克、玻色子等有700多种微观粒子，且随着科学技术的进步，微观粒子家族还在不断扩大，绘出了万物组合的一幅美丽图画。

微观粒子的运动方式主要有三种，即衰变、散射和辐射。这里，衰变是指一个粒子自发地分解为另外几个粒子。例如，β衰变$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$，即一个中子自发地分解为一个质子、一个电子和一个反中微子；散射发生在粒子间的碰撞、能量激发等情形下，反应式为$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \to b_1 + b_2 + \cdots + b_m$。例如，$p + \gamma \to n + e^+ + \nu_e$，即一个光子与质子碰撞出一个中子、一个正电子和一个中微子；辐射指电子由能级较高轨道跳到低能级轨道上发射光子的过程，即$e^- \to e^- + \gamma$。

那么，微观粒子可以用哪些特征刻画呢？类似于盲人摸象，人们用六个特征刻画微观粒子：①质量，指静止质量。例如，电子质量为0.511MeV，μ子质量为105.7MeV，质子质量为938.3MeV等；②电荷，以质子或电子的电荷$e = 1.6 \times 10^{-19}C$为基本单位，衡量粒子所带电荷数，一般为电子电荷数的整数倍，严格遵循电荷守恒律；③寿命与衰变。除少数几种粒子，如γ、$e^{\pm}$、p、$\overline{p}$、ν等稳定外，大多数粒子是不稳定的，在一段时间后会衰变，衰变过程要受到物理守恒定律的限制。粒子的寿命，一般以静止时大量粒子等平均寿命度量；④自旋$\mathbf{s}$。与行星类似，粒子都有自旋，具有角动量的性质。一般地，用↑表示粒子右旋，用↓表示粒子左旋。一些常见的粒子自旋见表3.1。粒子按自旋分为两类，即自旋为半整数的称为费米子，自旋为整数的称为玻色子；⑤手征性λ，即粒子自旋角动量$\mathbf{s}$ 在运动方向上的投影$\lambda = \mathbf{k}\cdot\mathbf{s}/|\mathbf{k}|$，称为左手或右手方向。例如，电子是右手的则$\lambda = +1/2$，电子是左手的则$\lambda = -1/2$；⑥磁矩$\boldsymbol{\mu}$是衡量自旋角动量为$\mathbf{s}$带电粒子一个参量，即$\boldsymbol{\mu} = g\cdot\frac{e}{2m}\mathbf{s}$。其中，$e$是粒子所带电荷，$m$ 是粒子的质量。对点粒子场，因子g满足关系$gs = 1$。例如，对$s = 1/2$ 的自旋粒子$g = 2$。

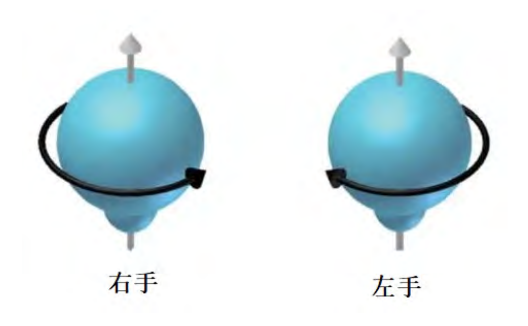


图3.25 粒子手征性

注意，实验中测出的值一般是$gs-1$，称为反常磁矩$g/2$。例如，对自旋为1/2的电子，反常磁矩分别为1.0011596522209(31)。

粒子名称	e	μ	p	n	π	γ	$W^{\pm}$	Z
自旋	1/2	1/2	1/2	1/2	0	1	1	1

表3.1 粒子自旋表

研究表面，万物的构成与运动可以归结为四种相互作用，即万有引力、电磁作用力、强相互作用和弱相互作用。这四种相互作用与物质结构的对应关系为：万有引力$\leftrightarrow$宇宙/星系/星球，电磁作用力$\leftrightarrow$分子/原子，强作用力$\leftrightarrow$原子核/强子/夸克，弱作用力$\leftrightarrow$轻子。按粒子的作用与性质，粒子可以分为轻子、夸克、媒介子、强子和Higgs粒子等五大类：

（1）轻子. 轻子参与弱相互作用但不参与强相互作用，包括电子e^-、μ子、τ子和中微子ν_e、ν_μ、ν_τ，分为三代。其中，电子e^-、μ子和τ子各带有一个电荷，中微子ν_e、ν_μ和ν_τ不带电荷。加上反粒子e^+、μ^+、τ^+，$\overline{nu}_e$、$\overline{\nu}_\mu$和$\overline{\nu}_\tau$共有12个，分为以下6对：

$$\{e^-,\nu_e\},\ \{\mu^-,\nu_\mu\},\ \{\tau^-,\nu_\tau\},$$
$$\{e^+,\overline{\nu}_e\},\ \{\mu^+,\overline{\nu}_\mu\},\ \{\tau^+,\overline{\nu}_\tau\}。$$

（2）夸克. 夸克是构成强子的基元，分为三代，有六种，即上夸克u、下夸克d，奇异夸克s、粲夸克c、底夸克b和顶夸克t，加上反夸克$\overline{u}$、$\overline{d}$、$\overline{s}$、$\overline{c}$、$\overline{b}$、$\overline{t}$共有12个，分为以下六对：

$$\{u,d\},\ \{s,c\},\ \{b,t\},$$
$$\{\overline{u},\overline{d}\},\ \{\overline{s},\overline{c}\},\ \{\overline{b},\overline{t}\}。$$

这当中，夸克d、s、b带$-1/3$电荷，u、c、t带$+2/3$电荷，它们既参与强相互作用又参与弱相互作用。值得注意的是，人们至今没有发现自由夸克，仅发现三个一组或是一对正反夸克束缚在一起。为此，人们提出了夸克禁闭，即这三个夸克或正反夸克不能为人类打破的假说。

（3）介子. 介子是传递相互作用力的粒子。按宇宙中粒子间的相互作用，对应的有四种介子，即引力作用介子$\rightarrow$引力子g，电磁作用介子$\rightarrow$ 光子γ，强作用介子$\rightarrow$胶子$g^k, 1\leq k\leq 8$，弱作用介子$\rightarrow$中间玻色子$W^{\pm}$、Z。其中，引力子、光子、胶子和中间玻色子Z不带电荷，W^+ 和W^-分别带一个正电荷或负电荷。

（4）强子. 强子分为重子和介子两种。其中，质子和中子由三个夸克构成；介子由正反两个夸克构成。强子是粒子最多的一个家族，已发现的多达几百个，它们即参与强相互作用又参与弱相互作用。

（5）希格斯玻色子. 希格斯玻色子是粒子标准模型预言的一种玻色子，假设其在弱相互作用中使中间玻色子获得质量。2012年7月，欧洲核子研究中心（CERN）在大型强子对撞机LHC实验后，宣布发现了希格斯玻色子。

表3.2中，列出了人们已发现的61种粒子的基本情况。

粒子名称	种类	世代	反粒子	色数	数目
轻子	2	3	成对	无色	12
夸克	2	3	成对	3	36
胶子	1	1	自身	8	8
$W^{\pm}$粒子	1	1	成对	无色	2
Z粒子	1	1	自身	无色	1
光子	1	1	自身	无色	1
希格斯粒玻色子	1	1	自身	无色	1

表3.2 粒子统计表

第3节 化学组合

不同于研究基本粒子的物理组合，化学是在分子、原子，包括元素、分子、离子（团）、化学键等层面研究物质的组合结构、性质、产生与变化规律，是人类认识物质世界，进而创造物质的主要方法。欧阳博士告诉惠子，人在对自然认识上的局限性必然形成科学只能在一定条件，即科学结论成立的自然与人为条件下进行应用，服务于人类社会的发展，那种无节制的应用在一定程度上必然造成人类对自然的侵扰，威胁着人类与其他生物的生存。例如，化学工业生产中那些自然不能降解的废弃物，排放到自然界必然影响环境，因为时至今日，人类并不清楚宇宙整体运行规则，仅是在一些局部的唯像规律基础上提出了一些认知假说。

3.1.分子结构. 分子是物质中能够独立存在的相对稳定并保持该物质物理化学特性的最小单元，是由原子按照一定的键合顺序和空间排列结合在一起的一个整体。这种键合顺序和空间排列称为分子结构，涉及原子的空间位置，在很大程度上影响化学物质的反应性、极性、相态形状、颜色、磁性和生物活性，与键结的化学键种类，包括键长、键角以及相邻三个键之间的二面角有关。任何一个分子，类似于图3.24，都是一个空间标号图，其顶点标号为原子，边的标号为原子间的健。分子中的原子组合方式和空间结构是相当复杂的，有些分子只由一个原子构成，称为单原子分子，如氦、氖、氩等。单原子分子既是原子又是分子；有些分子由两个原子构成。例如，氧分子由两个氧原子、一氧化碳分子由一个碳分子和一个氧分子构成。

与人类生存密切相关的分子大多由两个以上的原子构成。例如，一个苯分子包含六个碳原子和六个氢原子，一个生物大分子由几千到数十万个原子构成等。

（1）**元素周期律.** 化学元素是具有相同核电荷数的一类原子的总称。元素性质随着元素的原子序数，即原子核内的核电荷数递增呈现一种周期性的变化规律，称为元素周期律，为发现所有物质构成元素，编制元素周期表提供了条件和分析依据。注意，元素周期表中的元素构成了对分子顶点标号中的标号集。对元素周期律贡献最大的是俄国的门捷列夫，他提出了第一张元素周期表，阐述了元素周期律的基本要点，即：①把元素按原子量大小顺序排列，元素在性质上呈现明显的周期性；②原子量的大小决定了元素的特性；③按元素周期律可以预测未知元素；④知道某元素的同类元素后，可以修正该元素的原子量等。



表3.3 元素周期表

元素周期表为物质结构或万物组合理论提供了客观依据，为预测新元素的结构和性质提供了积极的线索。例如，在门捷列夫按原子量递增的顺序排列元素时，有4个位置只标出原子，在应该写元素符号的地方却打了一个问号，因为他断定钛应该与硅属于同一族，在钙与钛之间应该存在着一个元素，留出了一个空位。类似地，在锌与砷、钡与钽之间也应留下空位。他预言了这三个未知元素的原子量为45、68、70及性质，命名为类硼、类铝、类硅。这三种元素分别在1875年、1879年和1886年为科学家发现。

（2）**原子结合.** 原子或离子依赖于它们之间的结合力，即化学键结合在一起，构成分子。这里，离子指原子或原子基团失去或得到一个或几个电子而形成的带电荷的粒子；化学键指纯净物分子内或晶体内相邻原子或离子间作用力的统称，包括

离子键、共价键、金属键三种。这当中，离子键是由静电作用，通过原子间电子转移形成正负离子。离子键的本质是静电作用，包括阴、阳离子间的静电吸引和电子间、原子核间的静电排斥作用；共价键通过原子间共用一对或多对电子形成的。一个原子有几个未成对电子，便可以和几个自旋方向相反的电子配对成键。按共用电子对的数目，共价键有单键、双键、三键等区分；金属键主要存在于金属中，是一种改性的共价键，由自由电子及排列成晶格状的金属离子之间的静电吸引力组合而成。

离子一般用在元素符号右上角表示出所带正、负电荷数的符号，即X^{n+}或X^{n-}表示。这里，X表示元素符号或原子团的化学式，X右上角的$n+$或$n-$表示失去或得到的电子数，“+”或“-”表示离子带的是正电荷或负电荷。例如，钾原子失去一个电子后成为钾离子K^{+}，氯原子获得一个电子后成为氯离子Cl^{-}；化学键用连接原子或离子的边上的标号表示，如图3.27（c）所示。

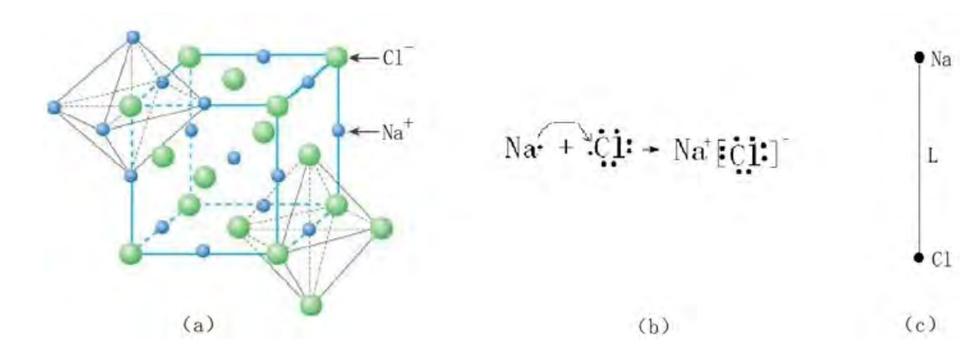


图3.27 NaCl的离子结构图

（3）分子式与量. 分子式是用元素符号表示分子的组成及相对分子质量的化学式子。分子式不仅表示物质的组成，它还能表示物质的一个分子及其成分、分子中各元素原子的数目、分子量和各成分元素的重量比等构成。例如，氧的分子式为O_2，表示一个氧分子由两个氧原子构成；水分子的分子式为H_2O，表示一个水分子由两个氢原子和一个氧原子构成；苯环的分子式C_6H_6表示苯环由六个碳原子和六个氢原子构成，其环状结构即对应的标号图见图3.28。

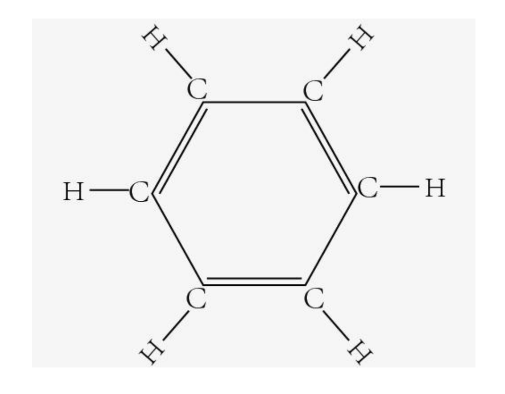


图3.28 苯环分子结构

经过测定，一个氢原子的质量为$1.674 \times 10^{-27}kg$，一个氧原子的质量为$2.657 \times 10^{-26}kg$，一个碳12原子的质量为$1.993 \times 10^{-26}kg$。故此，一个氧分子的质量为$2 \times 2.657 \times 10^{-26} = 5.314 \times 10^{-26}kg$，一个水分子的质量为$2 \times 1.674 \times 10^{-27}kg + 2.657 \times 10^{-26}kg = 3.0018 \times 10^{-26}kg$，一个苯环分子的质量为$6 \times 1.674 \times 10^{-27}kg + 6 \times 1.993 \times 10^{-26}kg =$

$1.29624 \times 10^{-25} kg$。由此，一个原子或分子的质量很小，用于计算非常的麻烦。

一般地，人们采用原子的相对质量刻画原子质量。一个原子的相对质量定义为碳12原子质量的1/12，简称为原子量。例如，氢原子量为$12 \times (1.674 \times 10^{-27}/1.993 \times 10^{-26}) \approx 1$，氧原子量为$12 \times (2.657 \times 10^{-26}/1.993 \times 10^{-26}) \approx 16$，碳原子量近似为12。对应的，氧分子$O_2$的分子量近似为32，水分子$H_2O$的分子量近似为18，二氧化碳$CO_2$的分子量近似为44，苯环$C_6H_6$的分子量近似为78等。

注意，人在视觉上的局限性，对微观粒子，包括原子、分子的观测手段尚不足以对其内部细致结构、运动或变化进行观测，只能间接地采用实验数据，如光谱数据与数学运算相结合，对一些简单的分子结构，如水分子形状和空间结构进行判断和预言。同时，分子结构中的各部分处于连续的运动中，与温度有关。此外，分子所处的固态、液态、气态、溶解在溶液中或吸附在某一物质表面上的不同，确定的分子尺寸也不同。图3.28中给出了水分子液态在空间的键合结构，以及一个水分子H_2O中两个氢原子H和一个氧原子O的键合形状，如键角为105.3^o等。

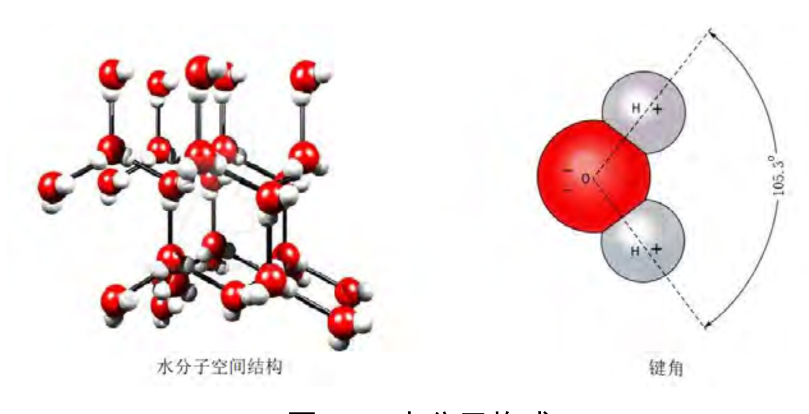


图3.29 水分子构成

3.2.化学反应. 化学反应是分子在一定条件下破裂成原子，原子在空间重新组合生成新分子、产生新物质的过程，其本质是化学键断裂与形成的过程。一般地，可以按化学反应物与生成物的类型分四类，即化合反应、分解反应、置换反应和复分解反应。这当中，化合反应是由两种或两种以上的物质生成一种新物质的反应，反应式为$A+B \to AB$。例如，氢气燃烧生成水的反应式为$2H_2+O_2 \to 2H_2O$；分解反应，即一种化合物在特定条件下分解成两种或两种以上较简单的单质或化合物的反应，反应式为$AB \to A+B$。例如，水在直流电作用下的分解反应$2H_2O \to 2H_2+O_2$；置换反应，指一种单质和一种化合物生成另一种单质和另一种化合物的反应，反应式为$A+BC \to B+AC$。例如，铁放入稀盐酸中的的置换反应$Fe+2HCl \to FeCl_2+H_2$：复分解反应，即两种化合物互相交换成分生成两种新的化合物，反应式为$AB+CD \to AD+CB$。例如，酸碱中和反应$HCl+NaOH \to NaCl+H_2O$等。

（1）物质不灭定律. 物质不灭定律即物质守恒定律，是指物质存在具有的无限、永恒、绝对的性质，即无论在人的视觉下物质发生何种变化，其构成基元不会消失也不会凭空产生的，只能由一种组合物质转化成另一种组合物质，由一种形态转换成另一种形态。物质不灭定律在化学反应中的表现，是参加反应的各种反应物的原子在反应前后原子（元素）的种类没有改变、原子（元素）的数目没有增减和反应前后物质质量没有变化的守恒原理。据此，人们可以建立化学反应方程式，即$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = B_1 + B_2 + \cdots + B_m$的等式。这里，$A_i$，$1 \leq i \leq k$是参与反应的反应物，$B_j$，$1 \leq j \leq s$是反应后的产出物，需满足$\sum_{i=1}^{k} m(A_i) = \sum_{j=1}^{s} m(B_j)$，$\sum_{i=1}^{k} n(A_i) = \sum_{j=1}^{s} n(B_j)$，$\sum_{i=1}^{k} o(A_i) = \sum_{j=1}^{s} o(B_j)$ 三个等式。这里，$m(A), n(A), o(A)$分别表示物质A的质量、含有的原子个数和类别。例如，在置换反应方程$Fe + 2HCl = FeCl_2 + H_2$中，反应前有一个铁Fe原子、两个氢原子H和两个氯原子Cl；反应后仍有一个铁Fe原子、两个氢原子H和两个氯原子Cl。

（2）物质创新. 人类生存条件的改善与对化学反应的认知有关。确切的说，正是人类对原子（离子）化学组合的认知，应用化学反应创造物质改善了人类的衣食住行等生存条件。这里，例举一些化学组合改善人类生存条件的事例及对应的化学方程式。

1）火. 火是人类文明的起源，是人类文明的标志。人类早期最主要的化学发现之一是火，即采用树枝或干草与空气中的氧气O_2发生化学反应生火，烧烤食物或取暖，称为燃烧反应。这里，树枝或甘草主要成分是碳C，充分燃烧后生成二氧化碳CO_2，不充分燃烧生成一氧化碳CO，反应方程分别为$C + O_2 = CO_2$ 和$2C + O_2 = 2CO$。

同时，火也是一种燃烧能，可为人类的社会实践提供动力源。例如，甲烷、酒精在空气中燃烧$CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O$、$C_2H_6O + 3O_2 = 2CO_2 + 3H_2O$，以及汽油在空气中燃烧$2C_8H_8 + 25O_2 = 16CO_2 + 18H_2O$，为发动机提供动力，扩大人类在陆、海和空域的出行范围等。

2）材料. 材料，一般分为金属、合金和非金属材料，是国民经济、人民日常生活及国防工业、科学技术发展必不可少的基础材料和重要的战略物资，如农具、机械零件、日常家用品、飞机、导弹、卫星，以及电视、通讯、雷达、计算机等都离不开金属。金属由采集的矿石提炼，是一系列原子重组，即化学反应过程。例如，炼铁以焦炭为燃料，包括炼铁和除渣等工艺，其化学反应过程如下：①焦炭燃烧提高炉温$C+O_2 = CO_2$；②焦炭还原生成一氧化碳$CO_2+C = 2CO$；③炼铁$Fe_2O_3+3CO = 2Fe + 3CO_2$；④除杂造渣$CaCO_3 = CaO + CO_2$，$CaO + SiO_2 = CaSiO_3$等。

塑料、橡胶和纤维等合成材料为了人类的生产生活提供了便利，但与此同时，也对环境造成一定的影响。这当中，塑料的主要成分是树脂，是人类的生产生活中

不可或缺的必需品，如塑料管材、板材、塑料薄膜、塑料盆、椅、鞋、雨衣、瓶等；合成橡胶是由低分子物质合成的一类弹性特别的线型高聚物，广泛用于轮胎、制鞋业等；合成纤维是由某些低分子物质经聚合反应制成的线形高聚物，如尼龙、涤纶和人造羊毛(聚丙烯腈)等，具有耐磨、耐蚀、不缩水等特点。图3.30所示的，是日常生活中常见的聚氯乙烯塑料及其反应方程。

图3.30 聚氯乙烯塑料

建筑材料，包括钢材、木材、水泥、砖、瓦、沙、石、陶瓷、玻璃、塑料，以及一些复合材料、成品、半成品等，极大地改善了人类的居住环境。这当中，水泥与沙石、水发生化学反应形成一定强度的混凝土，构成了建筑工程不可或缺的组件。例如，硅酸盐水泥与沙石拌合水后，其中的主要熟料矿物与水的反应方程有四个，分别为$3CaO\cdot SiO_2+6H_2O=3CaO\cdot 2SiO_2\cdot 3H_2O+3Ca(OH)_2$，$2CaO\cdot SiO_2+4H_2O=3CaO\cdot 2SiO_2\cdot 3H_2O+Ca(OH)_2$，$3CaO\cdot Al_2O_3+6H_2O=3CaO\cdot Al_2O_3\cdot 6H_2O$和$4CaO\cdot Al_2O_3\cdot Fe_2O_3+7H_2O=3CaO\cdot Al_2O_3\cdot 6H_2O+CaO\cdot Fe_2O_3\cdot H_2O$。最终，形成混凝土这种建筑上的一种主要组件。

3）药物. 药物是影响机体生理、生化和病理过程，用以预防、诊断、治疗疾病和计划生育的化学物质。化学药品，分为植物化学药、化学合成药、抗生素、半合成抗生素、生物化学药等。化学药品的生产过程由原料药和制剂组成。其中，原料药是药品生产的物质基础。不同的药物有着不同的生产特点，生成工艺一般如下：

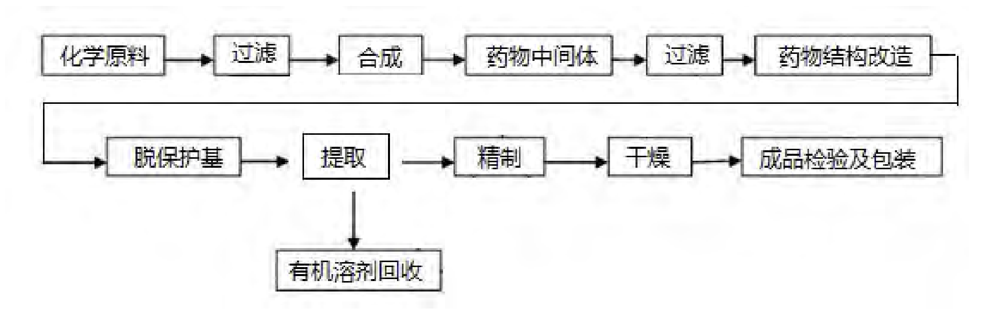


图3.31 化学制药工艺

制药过程中，还需要对废水、废气和其他废弃物进行无害处理，以保护生态环境。

化肥，包括氮肥、磷肥、钾肥、微肥、复合肥料等，具有成分单纯、养分含量高，肥效快、肥劲猛，具有改善土壤肥力，提高作物产量等特点；农药是保护作物，治理农作物生长中发生的病虫草鼠害，减少产量损失最主要的防治措施之一，是农业生产中的辅助品。但化肥、农药的使用，一定程度上会造成土壤重金属和有毒元素，如Zn、Cu、Co和Cr等增加，土壤氧化损失、酸化加剧，农药在作物上的残留，危害人类健康等副作用，需进一步对其组份改良，在应用上进行规范与限制。

第4节 生物组合

生物与非生物相对，是指在自然条件下，通过化学反应生成的具有生存和繁殖能力的生命体。它们对外界的刺激做出反应，与外界的环境相互促进，且具有遗传与变异的特性。这里，遗传是指亲子之间以及子代个体之间性状存在相似性，即性状可以从亲代传递给子代。欧阳博士告诉惠子，一个人的肤色、身高、胖瘦、眼睛、鼻子、下颚和耳朵形状等，会遗传给子代，即子代的这些特征与父代相似。故此，在微观粒子或是化学组合的基础上，生物组合更多的是研究生物体基元，即细胞组合，以及遗传基元，即基因组合，进而对生物的性状进行分析、判断和预测。

4.1.生物宏观系统. 生物的结构层次，由小到大依次为细胞、组织、器官、系统、个体、种群、群落、生态系统和生物圈。这当中，细胞是生物构成基元，人眼可见的系统，如生物解剖结构可见的组织、器官、种群、群落、生物群等称为生物的宏观系统。注意，人与自然协调发展的前提，是人与其他生物种群的和谐共处。为此，需要对生物，包括植物和动物的组合结构从宏观到微观进行认知，保护生态环境，进而维护人类自己的家园。

（1）群落. 群落是生物种群组合产物，指生活在一个区域内的植物、动物和微生物等各种生物体构成的集合，是不同生物间由互利、共生、竞争、寄生、捕食等种群关系形成的一个有机组合整体。例如，某地一座森林中的一切植物为其中栖息的动物提供住处和食物，某些动物以其他动物为食，土壤中生存的大量微生物靠分解落叶残骸为生等，组成这一地区的生物群落。一个群落的形成，可以从一个裸地，即一个从来没有植物生长的地段上，因地形变迁、气候变化、生物作用、人类影响等无中生有，也可以伴随一些已有群落无中生有。一般地，一个生物群落形成后会有一个发育、变化和发展过程，包括适应



图3.32 生物群落

季节、气候变化和种群更新等。群落在结构上，分为空间结构、时间组配和种类结构三种组合特性。空间结构，指植物分层，即不同植物生活在一起，它们的营养器官配置在不同高度或深度)而形成的地上主干和枝叶、地下根系的分层；时间组配，指群落生物在时间上相互“补充，例如，一部分植物生长在春秋季，一部分植物生长在夏季；一些动物白天活动，一些在黄昏时活动，还有一些动物习惯于夜间活动等；种类结构，即每一个生物群落由相对固定的种群构成。其中，每个种群占据着自己的生存环境，并且在改造群落环境条件、利用环境资源等方面起着独特的作用。

（2）种群. 种群是由生物个体的组合产物，由占据着一定空间的同一种生物构成。种群是进化的基本单位，通过繁殖维系着种群的繁衍，将种群基因传给后代。一个区域某种生物的疏密或多少，一般取决于该种生物的繁殖能力、种子传播途径以及该区域的资源和生物生存空间许可的条件等决定，并通过种群内的自我调节以保持其相对稳定。

注意，群落与种群间的关系可以用标号图表示，即用顶点表示群落中的种群，用顶点间的边表示相互依赖、相互影响的两个种群。那么，群落就是一个标号图G^L。同时，群落还可以用标号图G^L的动态变化，刻画其发展变化过程。例如，某一类物种的出现或是消亡，对应的是这个标号图上增加或是删除对应这类物种的顶点，如图3.33所示。其中，(a) 是物种6的消亡，(b) 是群落中出现了物种7，以及其与群落中其他生物的关系等。

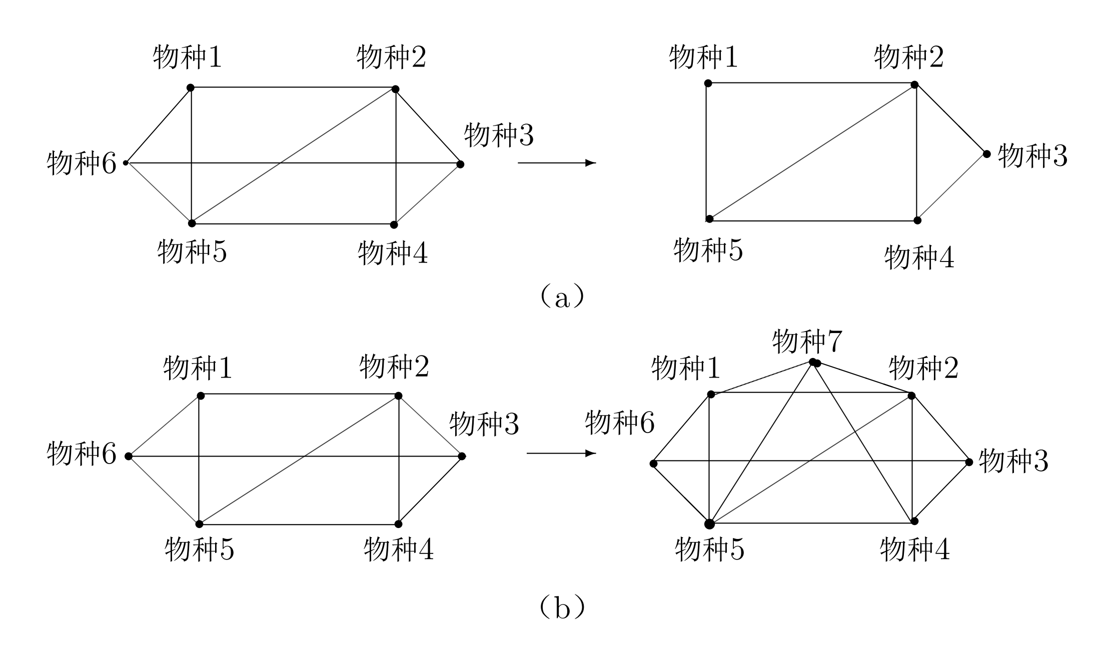


图3.33 生物群落变化

更进一步，还可以在每个顶点上标定该物种的特性，如数量、高度、种群占地区域、

面积等数量指标构成的多元数组$\mathbf{v}$，用$\mathbf{v}$的变化刻画生物群落G^L的变化等。类似地，种群与个体的关系也可以用标号图G^L刻画。其中，顶点集为构成种群的个体集合，边集为存在相互依存关系，如配偶、父子关系等构成的集合。

（3）个体. 生物个体，包括动物、植物和微生物是生物内的各种组织、器官和系统的组合产物。这当中，植物和动物的外形结构相对简单，都具有树状结构。人类对生物多年的观察实践，以及对生物个体的解剖表明，植物个体的成长一般是经种子发育形成幼苗，幼苗经过一段时间的生长成为一株具有根、茎、叶等营养器官的植株，植株生长发育到一定时候开始形成花芽，然后是开花、结果，实现植物繁衍等过程。这里，花芽的形成即植物生殖生长的开始，开花、结果表明其具备了生殖繁衍下一代的功能。

注意，植物营养的输送有两条路径。一条营养输送是由下至上，即靠植物根吸收水分和养分，由下至上供应枝干和叶片；另一条营养输送是由上至下，通过植物叶片的光合作用制造碳水化合物，由上至下供应枝干、根系等所需营养。同时，释放这一过程产生的氧气。例如，一颗树的营养输送由树心和树皮完成。其中，树皮运输水分和养分，树心运输叶片制造的光合产物，这一过程可以由树的标号图刻画。图3.34中，(a) 是一棵树的树根、树干、树枝和叶在地上、地下的分布状况，(b) 是其营养输送系统，是一颗标号树T^L。

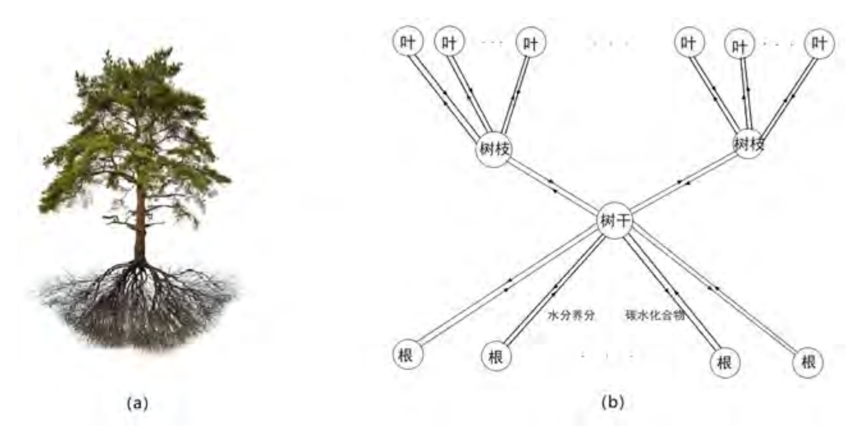


图3.34 植物营养吸收与循环

动物的外形结构，如图3.3所示大象为一颗标号树。但动物作为一种在大地上行走的生物，需要具备动的功能，其结构当然不会这么简单，与其体内的消化系统、呼吸系统、循环系统、免疫系统和内分泌系统等的功能密不可分。在这一点上，动物吸取营养的过程与植物经由根系吸取水分和营养、叶片吸取碳水化合物不同，是食物由口腔经食道进入胃消化，再经由胃和肠吸收营养物、排弃废物的过程可以用一个P_6^L标号图刻画，见图3.35 (c)。其中，(a) 是狗的内脏分布图，(b) 是营养在体内

消化系统（脾、胃）、呼吸系统（肺、大肠）、循环系统（肾、膀胱）、免疫系统（肝、胆）和内分泌系统（心脏）中循环，可以用标号图C_5^L刻画。

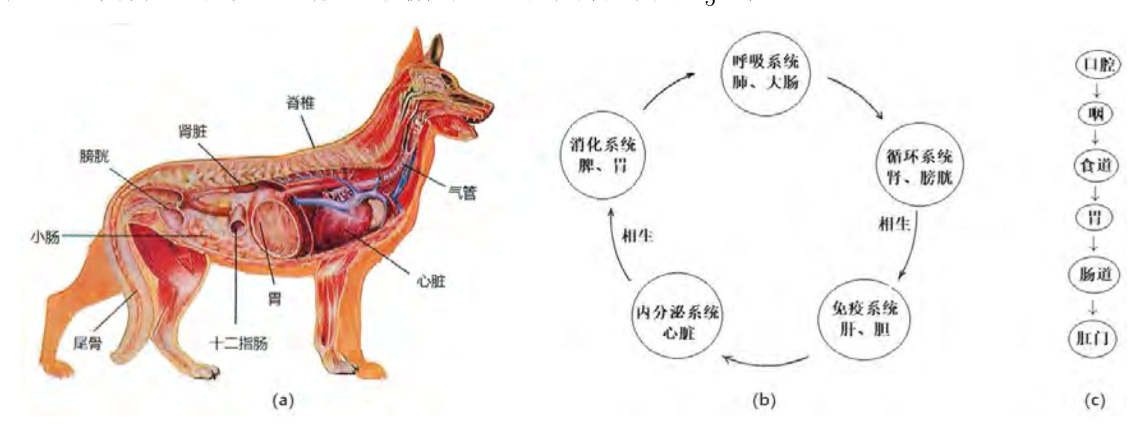


图3.35 动物营养吸收与循环

人类肉眼可见的微生物，如蘑菇、灵芝等，由菌丝体和子实体两部分组合而成。其中，菌丝体是营养器官，由菌丝互相缀合形成，有横隔，借顶端生长而伸长，大多白色、细长，绵毛状；子实体是繁殖器官，在成熟时像一把撑开的小伞。一个成熟的蘑菇或灵芝在结构上，由菌丝、菌柄、菌环、菌盖等组成，为一颗标号树，如图3.36（b）所示。

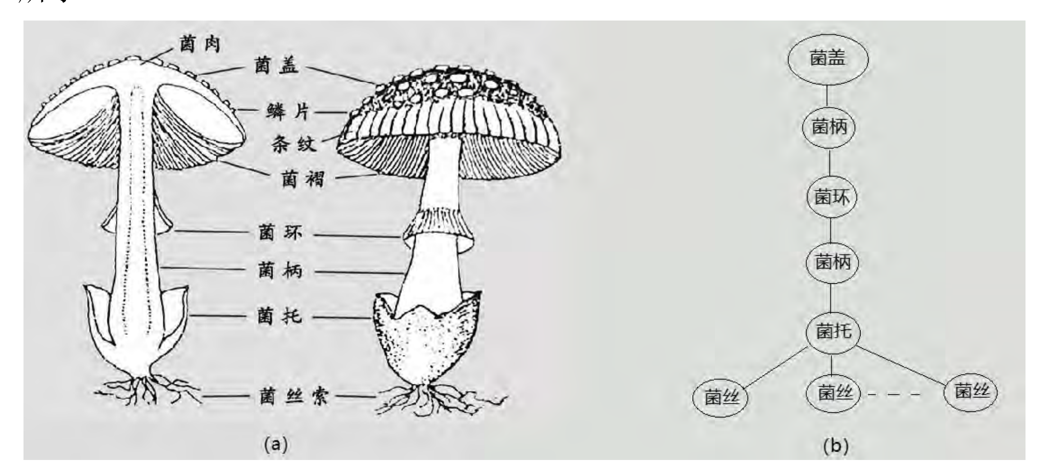
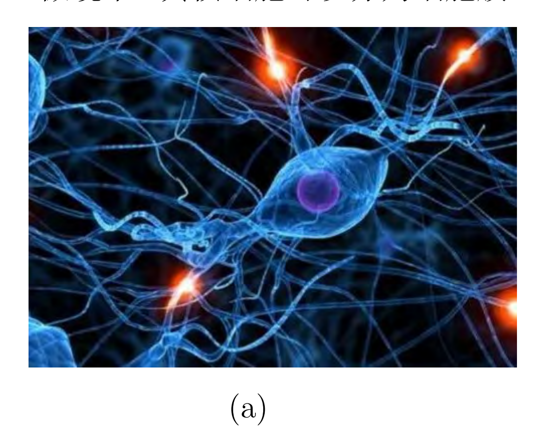


图3.36 蘑菇结构图

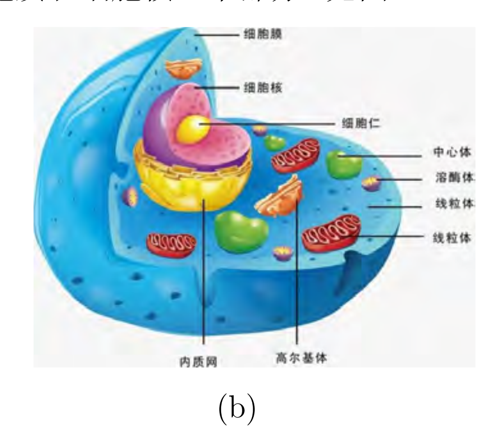
4.2.生物微观系统. 万物由原子、分子构成，生物也不例外，也是原子、分子的组合体。生物有生命、记忆，还有出生、成长、壮大和消亡的一个过程，这是生物有别于宇宙其他物质的典型特征。故此，生物不能简单地看作是原子、分子的组合，而需在此基础上，发掘生物和记忆基元，即细胞和基因理解生物，包括人类自己。

（1）细胞. 与构成物质的基本粒子类似，细胞是构成生物体的最小的基本功能单位，具有为生物所需的物质运输、能量转换、信息转导、细胞识别、细胞支持与运动和细胞消化与防御等基本功能。除病毒之外，生物是细胞在一定空间结构下的组

合体，如图3.37（a）所示。细胞一般分为原核细胞和真核细胞两大类。其中，原核细胞中没有典型的细胞核；真核细胞有核膜将细胞质和细胞核分隔为两个部分。在电子显微镜下，真核细胞可以分为细胞膜、细胞质和细胞核三个部分，见图3.37（b）。



(a)



(b)

图3.37 细胞结构

这里，①细胞膜是包围在细胞表面一层极薄的膜，主要成分是脂类和蛋白质；②细胞质由基质、细胞器和内含物组成，处在细胞膜以内、细胞核以外，质呈半透明、均质的状态，粘滞性较低。这里，基质是细胞质中除去细胞器以外的均质半透明的胶状物，主要成分为水、无机盐、离子、酯类、糖类、氨基酸、核苷酸，以及蛋白质、脂蛋白、多糖、RNA和酶类；细胞器是细胞质内有一定形态结构和功能的有机成分，包括：线粒体、核糖体、内质网、高尔基体、溶酶体、过氧化物酶体、中心粒、微管、微丝和中等纤维等；③细胞核是生物遗传信息储存场所，由核膜、核仁、染色质、核基质和核骨架组成。其中，核膜由两层单膜构成；核仁是无膜包围的致密的球形结构，其主要化学成分是RNA、蛋白质和少量DNA；染色质是遗传信息的载体，呈极细的纤维状；核骨架是真核细胞内除核膜、染色质和核仁外的由非组蛋白纤维组成的网络结构。

一个生物体之所以有生命，会由小到大，与其体内的细胞增值和分化，即细胞分裂产生新的个体或新的细胞，以增加、补充体内衰老或死亡的细胞相关。细胞分裂一般有丝分裂，无丝分裂，减数分裂等三种方式。其中，有丝分裂是人、动物、植物、真菌等真核生物中的一种普遍方式，是真核细胞增殖的主要方式。这当中，细胞分化指同一来源的细胞但产生出形态结构、功能特征等各不相同的细胞类群的过程，其结果使得细胞在时间、空间上产生差异，与其从前的状态不同。

图3.38 细胞有丝分裂

细胞衰老是细胞增殖与分化能力和生理功能发生衰退的，如细胞核增大，染色质凝聚、固缩、碎裂，质膜粘度增加、流动性降低，线粒体数目减少、体积增大，核膜内陷等表现。相应的，细胞死亡是生命的结束，包括细胞主动死亡、程序性死亡、细胞凋亡和细胞被动死亡等情形，是维持组织机能和形态所必须的生物过程。

成年人体上的细胞数约为$4\times10^{14}-6\times10^{14}$个，大脑的细胞数约为$1.2\times10^{10}$个，嗅觉细胞约为$4.9\times10^{6}$个。相比之下，为什么狗的嗅觉比人灵敏，因为狗的嗅觉细胞数约为2.205×10^{8}个，是人的45倍。

（2）基因. 基因是存在于细胞的染色体上的生物体遗传的基本单位，是染色体上带有遗传讯息的DNA片段。生物现象中，为什么子代和父代外貌一致，为什么一些疾病父代会传给子代，与他们之间的基因不无关系。一般地，基因储存着种族、血型、孕育、生长、凋亡等生命信息，有两个特点，一是忠实地进行自我复制，保持父代的基本特征；二是能够"突变"，在结构上发生碱基对组合或排列顺序的改变，在后代的表现中出现父代从未有的性状。

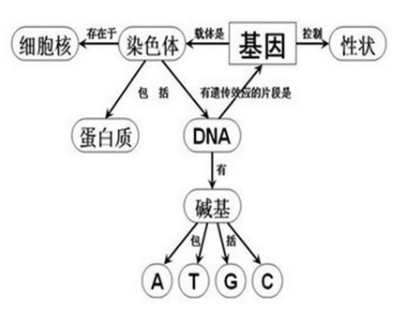
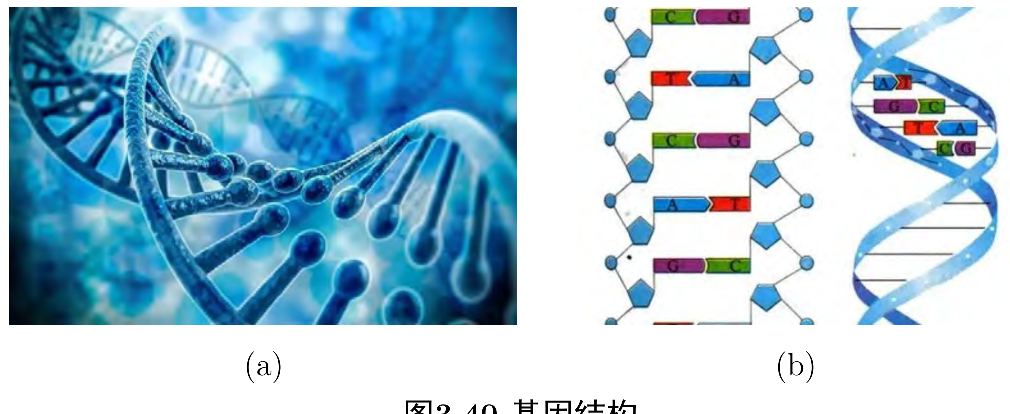


图3.39 基因

人类基因组是由23对（共46个）染色体构成的空间双螺旋结构，见图3.39（a）和（b）。其中，每条染色体只含有1-2个DNA分子，每个DNA分子上有多个基因，每个基因含有成百上千个脱氧核苷酸。同时，基因与基因间有一段可能含有调控序列和非编码DNA的基因片段。人类拥有24种染色体，其中的22个为体染色体，另外两个染色体决定性别，即X染色体与Y染色体。由1号到22号染色体的编号顺序，大致符合他们由大到小的尺寸排列。其中，最大的染色体约含有2.5 亿个碱基对，最小的约有3800万个碱基对。对应的，马的体细胞中有32对染色体，驴的有31对染色体，猪的有19对染色体等，均为双螺旋标号图$(K_2\times P_n)^L$，$n=24,32,31$和19。



(a) (b)

图3.40 基因结构

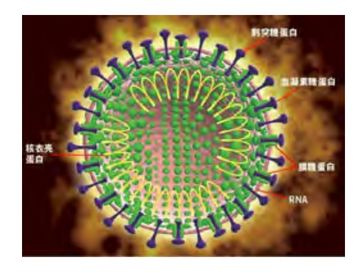
基因可以简单理解为生命性状出现的原因，分为编码蛋白质的基因、没有翻译产物的基因和不转录的DNA区段等三种类型。每个基因在染色体上都有自己特定的位置，储存着生命性状的遗传信息。其中，占据相同位置但有不同形态的基因称为等位基因。自然群体中占多数的等位基因称为野生型基因。相对于野生型基因，其他等位基因称为突变型基因。

基因既然是生命遗传性状的单元，与人类的一些疾病，如白化病、高血压、糖尿病、冠心病、癫痫、哮喘病等必然有着直接或间接关系，每个人的基因与生俱来携带患有某些疾病的“内因”。那么，是否有可能绘制出人类的基因组图谱，掌握人的生老病死规律、疾病的诊断和治疗，实现人类健康发展呢？这就是人类基因组计划，即最终测定组成人类染色体包含的30亿个碱基对组成的核苷酸序列，辨识其载有的基因及其序列，找出它们在染色体上的位置。

人类基因组计划由美国科学家于1985年提出，多个国家参与，于1990年正式启动，2003年正式完成人类基因图谱的绘制工作，对生物学、医药学乃至整个生命科学的发展产生了重要影响。例如，通过位置克隆，寻找未知生物化学功能的疾病基因，进而筛选药物的靶点，研发靶向药物，对与肿瘤相关的癌基因、肿瘤抑制基因等进行靶向治疗与研发等。

（3）微生物. 人类难以用肉眼直接观察的微小生物称为微生物，包括细菌、病毒、真菌和少数藻类等。微生物与人类的生产和生活息息有关，对地球气候的变化起着重要作用，与人类健康密切相关。例如，一些食品、工业品和药品等依赖于微生物发酵等。可以说，如果没有微生物，大量的生物就失去了其必需的营养来源，动物、植物的残体就无从分解，就没有自然界的繁荣与秩序。


（a）细菌



（b）COVID-19病毒

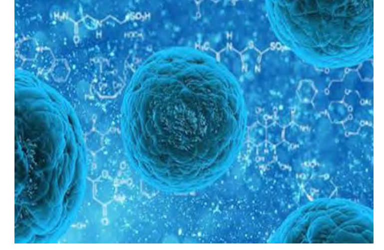

（c）真菌

图3.41

这当中，细菌是一类细胞细短、结构简单、胞壁坚韧，多以二分裂方式繁殖和水生性强、单细胞的原核生物，见图3.40（a）；病毒是一种没有细胞结构的最低级的生命体，只能寄生在某种特定的活细胞内才能生活。病毒一般由一个或多个核酸分子组成，其外面有一层蛋白或脂蛋白的保护性外壳，称为衣壳，由核酸和衣壳蛋白

所构成。较复杂的病毒外层由脂质和糖蛋白构成包膜。这当中，冠状病毒在分类上属冠状病毒科，像日冕，有包膜，包膜上存在棘突，不同的冠状病毒的棘突有明显的差异，引起的人类疾病主要是呼吸系统感染等。图3.40（b）所示的，是2019年起在全球传播的新型冠状病毒COVID-19。值得注意的是，在抗击COVID-19过程中，大多采取对病毒样本的基因进行测序溯源以了解病毒出现的源头、变种等情况，进而制订有针对性的防御措施；真菌是一类真核生物，其细胞不含叶绿体，也没有质体，是异养生物，包括寄生和腐生两种，即从动物、植物活体及其排泄物、动植物尸体以及土壤腐殖质中吸收和分解其中的有机物，分为酵母菌、霉菌和大型真菌等三类。人的肉眼可见的大型真菌，如蘑菇、木耳、竹荪等；藻类是原生的一类水生真核生物，分为浮游藻类、飘浮藻类和底栖藻类等三类。大多数的藻类在生活中需要氧气，用其各种叶绿体分子进行光合作用。

4.3.物种改良. 物种改良是利用生物遗传性能，改善其生长的正常指数、环境条件或是基因序列，如优育、杂交、转基因等方法，使生物某些遗传性状得到改良，如增强水稻抗倒伏、抗病虫害能力等，以维护生物多样性，实现增产增收的目的。

（1）杂交育种. 指不同种、属或品种的动、植物进行交配取得双亲基因重新组合后的子代的方法。杂种优势是生物界一种普遍现象，而如何利用这种优势提高农作物产量和品质是农业追求，其核心在于育种，一般包括择优选取杂交亲本、试验种植杂交亲本、种植世代杂种材料、择优选出高产、优质、性状好的品种等过程。

杂交水稻是农作物杂交增产的一个典型例子。与一般农作物不同，水稻是自花授粉作物，雌雄蕊生在同一朵颖花里。进行不同稻种的杂交，先要将一个品种的雄蕊去雄或杀死，再将另一品种的雄蕊花粉授给去雄的那个品种。例如，两系杂交水稻利用的是光温敏不育系水稻。这种水稻在夏季或长日照、高温条件下表现为雄性不育，在秋季、短日照、低温下又变成了正常的水稻，自己繁殖自己。

此外，杂交技术还普遍用于玉米、高粱、大米、甜菜、洋葱、菠菜、向日葵、西兰花等农作物的育种和增产。

（2）嫁接. 嫁接是将优良品种的枝或芽移接到另一植株上，使它们生长在一起而形成一个独立的新植株的培育方法。一般的，被接的枝、芽叫接穗，承受接穗的植株称为砧木。嫁接的原理在于，依靠接穗与砧木结合部位形成薄壁细胞的再生能力，形成愈合组织，使

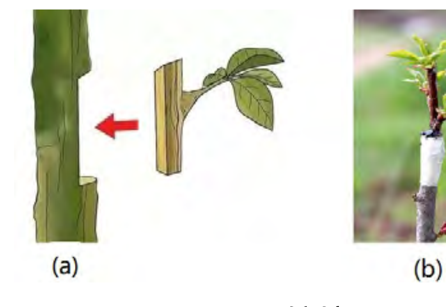


图3.42 嫁接

接穗与砧木密切结合，进而使接穗和砧木原来的输导组织相连接，使两者的养分、

水分上下沟通，形成一个新的植株。花木常用的嫁接方法分为枝接、芽接和根接等三种。嫁接后，植株可以增强抗病能力、提高耐低温能力、有利于克服连作危害，扩大了根系吸收范围和能力，进而提高农作物产量，满足人类的生存需求。

（3）**基因技术.** 确定了生物的基因图谱后，一种最直接的想法是经由物种的基因序列而改善物种，并由此开发出了转基因和基因编辑等基因技术，其实质是对物种基因序列，即基因的组合结构按既定目标进行改良。

转基因技术是把一个生物体的基因转移到另一个生物体DNA片段的一项生物技术。当一个DNA片段被转入另一个生物体，与该生物体本身的基因组进行重组，引发生物体性状、可遗传的修饰改变，再从重组体中进行人工选育，培育出高产、优质、抗病毒、抗虫、抗寒、抗旱、抗涝、抗盐碱、抗除草剂等的作物新品种，获得具有稳定表现的遗传性状的个体。



图3.43 转基因与基因编辑

基因编辑技术是一种利用基因图谱，通过操纵CRISPR/Cas9这把基因剪刀，像剪开纸条一样，删除或加入活体基因序列上的一小段DNA，对生物体基因组特定目标基因进行编辑，实现对特定DNA片段的修饰技术。这里，CRISPR/Cas9是细菌和古细菌在长期演化过程中形成的一种适应性免疫防御，可用来对抗入侵的病毒及外源DNA。

转基因与基因编辑的技术区别，在于基因编辑技术剪切或加入了哪一段DNA，以及在什么位置清楚，可控程度高；转基因在什么位置加入另一个生物体的DNA片段不清楚，不可控程度高。从这个意义上看，基因编辑技术比转基因技术有优势。但调整或修改自然形成的物种基因序列，不管是哪一种基因技术，欧阳博士对女儿说，都是人类自己对物种基因序列的局部认知或当下认知，需要经由长时期的实践检验。否则，都可能造成对物种与自然界不可逆的伤害，包括人类自己。

第5节 万物交织

自然界中，任何一种事物都不是孤立地出现或存在而是普遍联系与交织的。在这种情形下，把握事物全貌是认知事物本真的必经过程。然而，人在万物认识上的局限性造成人往往看不清一件事物的全貌，仅能对事物的一些度量特征由局部认知整体。例如，物种成员的个数、生存区域或空间尺度等。那么，有没有一种统一的方法由局部认知获取这类度量的整体特征呢？如果有，人类就可由这些局部认知扩展

到对事物的整体认知，进而在一定程度上把握事物的本真。对此，欧阳博士告诉惠子，组合学中有两个很重要的原理，称为容斥原理和鸽巢原理，可以一般性地解决由局部到整体的计数，断定种群某种性质的存在等。

5.1.种群计数. 计数又称为数数，即手指着计数对象一个个地数，用自然数$1, 2, 3, 4, \cdots$对计数对象逐一标号，构造一个序列$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$。给定一个种群或集合$S$，一个最基本的问题是知晓$S$中有多少个成员，记为$|S|$，又称为集合的势。例如，用$S$表示某动物园中的老虎，该动物园一共饲养了3只老虎，那么就有$|S| = 3$。

动物园饲养的动物可以一个个地数出来，野外动物则只能凭借人的观察、判别和预估，对应的计数情形相对复杂，因为野外动物行走无边界限制，且任何一种动物都有繁殖能力，人类需要在长期观察基础上总结其繁殖规律，得出种群的规模大小。斐波那契著名的兔子问题，就是这类种群计数问题的一个代表。

[**斐波那契问题**] 某个农夫最初养了一对小兔子，小兔子2个月就能长成大兔子，一对大兔子每个月能够生出一对小兔子。问在第12个月该农夫有多少对兔子？

按问题给定的条件，我们可以试着一步一步求解这个问题：

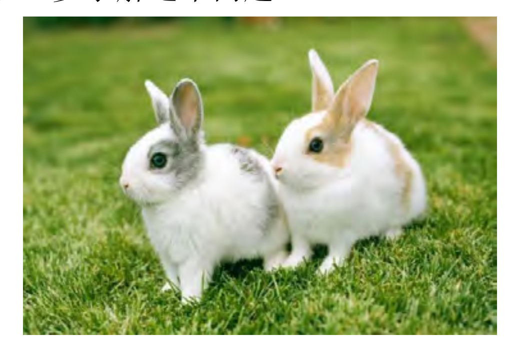


图3.43 一对兔子

首先，按假设农夫第1个月有一对小兔；第2个月小兔没长大，还是小兔，农夫在第2个月仍然只有一对兔子；第3个月，一对小兔长大并生出了一对小兔，这时农夫有$1 + 1 = 2$对兔子；第4个月，新出生的一对小兔还没长大，一对大兔又生出一对小兔。这样农夫就有$2+1 = 3$对兔子；第5个月，前面第3个月出生的小兔长大，具备生育能力，可以生出两对小兔。此时，农夫有$3 + 2 = 5$对兔子；第6个月，前面第4个月出生的小兔长大，具备生育能力，可以胜出三对小兔，共有$5 + 3 = 8$对兔子。

可以这样一直推算下去，即当月前两个月出生的小兔长大，具备了生育能力，当月农夫拥有的兔子对数为前两个月兔子对数加上前一个月的兔子对数，即第7个月有$5 + 8 = 13$ 对，第8个月有$8 + 13 = 21$对，第9个月有$13 + 21 = 34$对，第10 个月有$21 + 34 = 55$对，第11个月有$34 + 55 = 89$对，第12个月有$55 + 89 = 144$对。这样，就知道农夫在第12个月有144对兔子。

在这个问题中，对任意整数$n \geq 3$，是否可以求知第n个月农夫有多少对兔子呢？假设农夫在第n个月有F_n对兔子，上面的推导表明，$F_1 = F_2 = 1$，即第1个月、第2个月兔子对数为1，从第3个月开始，当月兔子对数F_n为前两个月兔子对

数F_{n-1}和F_{n-2}的和，即满足递推关系

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}。 \tag{3.1}$$

那么，怎样求解方程(3.1)得到F_n呢？假设

$$F(t) = \sum_{i \geq 0} F_i t^{i-1} = F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \cdots + F_n t^n + \cdots , \tag{3.2}$$

这里，$F_0 = 0$。则

$$\begin{aligned} F(t) - tF(t) - t^2 F(t) &= \left(F_1 t + F_2 t^2 - F_1 t^2\right) + \sum_{n \geq 3} \left(F_n - F_{n-1} - F_{n-2}\right) t^{n-1} \\ &= \left(F_1 t + F_2 t^2 - F_1 t^2\right) = t。 \end{aligned}$$

这样，就有

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{t}{1 - t - t^2} = \frac{t}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} t\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} t\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} t} - \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \geq 1} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] t^n 。 \end{aligned} \tag{3.3}$$

比较等式(3.2)和(3.3)，就有

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]。 \tag{3.4}$$

等式(3.4)很有意思，因为F_n是兔子的对数，是一个正整数，但却是采用的无理数$(1+\sqrt{5})/2$和$(1-\sqrt{5})/2$表示出来的。

斐波那契问题中，没有考虑兔子的生老病死以及资源的承载能力，即兔子可以无限制的增长，这当然不符合自然规律。假设兔子对数可以近似地采用函数$F(t)$模拟，设K是资源许可出现的最大种群成员数，即资源承载力，r是兔子的内禀增长率，则兔子的增长率为$rF\left(1 - \frac{F}{K}\right)$，这样，就有Logisitic方程

$$\frac{dF}{dt} = rF\left(1 - \frac{F}{K}\right) = \frac{rF(K-F)}{K} \ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{K-F}\right) dF = r dt 。 \tag{3.5}$$

对(3.5) 式两端积分，就有

$$\ln|F| - \ln|K-F| = rt + C \ \Rightarrow \ \ln\left|\frac{F}{K-F}\right| = rt + C \ \Rightarrow \ \left|\frac{F}{K-F}\right| = C_1 e^{rt}。$$

这里，$C_1 = e^C, C$是一个常数。从而，有

$$F(t) = \frac{KC_1e^{rt}}{1+C_1e^{rt}}。\tag{3.6}$$

假设$t=0$时有$F(0)=F_0$。这样由(3.6)式可算知$C_1 = \frac{F_0}{K-F_0}$，即

$$F(t) = \frac{KF_0e^{rt}}{(K-F_0)+F_0e^{rt}}。\tag{3.7}$$

对一个特定的地区，上述常数r, K可以经由实验测算出。例如，测出$K = 1.2\times 10^6$, $F_0 = 1$，$r = 0.2311$，则农夫在t时刻拥有的兔子对数为

$$F(t) = \frac{1.2\times 10^6 e^{0.2311t}}{(1.2\times 10^6 - 1) + e^{0.2311t}}。\tag{3.8}$$

5.2.容斥原理. 种群计数大多需要与其他种群共同计算。欧阳博士问女儿，假如你们班的一次期终考试，语文得95分以上的14人，数学得95分以上的18 人，两门课都在95分以上的12人。那么，两门课有一门课在95分以上的多少人？惠子想了想，说:“32人？因为语文在95分以上的14人，数学在95 分以上的18人”欧阳博士提醒她说:“这35人中，两门课都在95分以上的12人包括在语文成绩95分以上的14人中，还包括在数学成绩95分以上的21人中。这样，你的答案32人中，这12人被重复计算了，需要去掉重复计算的人数。”惠子说:“那是20人，可为什么是20人而不是32人呢？”欧阳博士回答说，这是集合元的计数问题。集合A, B上定义的“并运算∪”, 是类比数的“求和运算”，即把两个集合的元放在一起组成一个新集合，定义$A\bigcup B = \{\ x \mid x\in A$或者$x\in B\}$，见图3.45。那么，是否有$|A\bigcup B| = |A|+|B|$呢？如果$A, B$是数，求和等于每个数的相加是一项基本法则，但对于集合运算，$|A\bigcup B| = |A|+|B|$是有条件的，因为集合$A\bigcup B$中的一个元x可能是A中的元，可能是B中的元，也可能同时出现在集合A和B中。这最后一种情形称为集合A和B的交，记为$A\bigcap B = \{x|x\in A$且$x\in B\}$，见图3.45。一般地，有等式$|A\bigcup B| = |A|+|B|-|A\bigcap B|$，因为$A\bigcup B$的

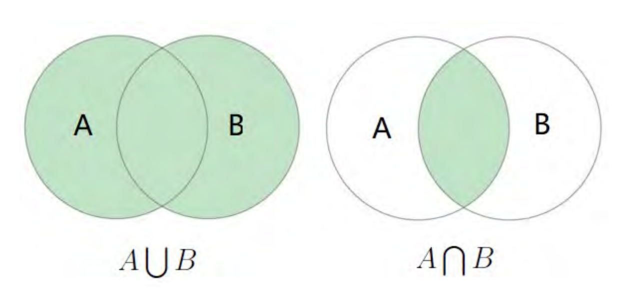


图3.45 集合并、交运算

元采用$|A|+|B|$计数时，$A\bigcap B$中的元重复计数了一次，需要减去$|A\bigcap B|$。故只有在$|A\bigcap B|=0$，即A和B的交是空集时，才有$|A\bigcup B|=|A|+|B|$。对上面那个计数问题，设集合A 和集合B 分别表示语文、数学分数在95 分以上的人，则$|A|=14, |B|=18$。$A\bigcap B$是语文和数学成绩都在95分以上的人，即$|A\bigcap B|=12$；$A\bigcup B$ 是语文或数学成绩在95 分以上的人，有$|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|=14+18-12=20$。

那么，一般情形是怎样的呢？先看三个集合的情形，即对A、B和C三个集合，在什么条件下有$|A\bigcup B\bigcup C|=|A|+|B|+|C|$。类似于两个集合的情形，此时需要三个交集$A\bigcap B$、$A\bigcap C$和$B\bigcap C$均为空集，即$|A\bigcap B|=|A\bigcap C|=|B\bigcap C|=0$，因为一般地，有等式$|A\bigcup B\bigcup C|=|A|+|B|+|C|-(|A\bigcap B|+|A\bigcap C|+|B\bigcap C|)+|A\bigcap B\bigcap C|$。

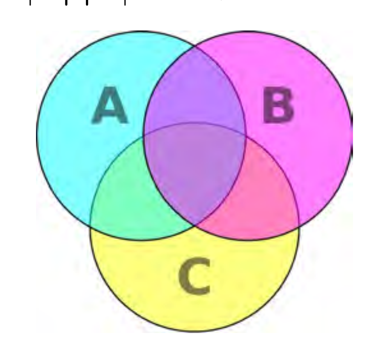


图3.46 三个集合

为什么会是这样呢？首先，由集合并和交的定义，有

$$A\bigcup B\bigcup C=\left(A\bigcup B\right)\bigcup C,\ \left(A\bigcap B\right)\bigcup C=\left(A\bigcup C\right)\bigcap\left(B\bigcup C\right)。$$

这样，按照两个集合元的计数公式，就有

$$\begin{aligned}\left|A\bigcup B\bigcup C\right| &= \left|\left(A\bigcup B\right)\bigcup C\right|\\ &= \left|A\bigcup B\right|+|C|-\left|\left(A\bigcup B\right)\bigcap C\right|\\ &= \left|A\bigcup B\right|+|C|-\left|\left(A\bigcap C\right)\bigcup\left(B\bigcap C\right)\right|\\ &= \left|A\bigcup B\right|+|C|-\left(\left|A\bigcap C\right|+\left|B\bigcap C\right|-\left|\left(A\bigcap C\right)\bigcap\left(B\bigcap C\right)\right|\right)\\ &= |A|+|B|+|C|-\left(\left|A\bigcap B\right|+\left|A\bigcap C\right|+\left|B\bigcap C\right|\right)+\left|A\bigcap B\bigcap C\right|。\end{aligned}$$

一般地，容斥原理即是等式

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}X_i\right|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le n}\left|X_{i_1}\bigcap X_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap X_{i_s}\right| \qquad (3.9)$$

对任何一个整数$n\ge 2$成立。其中，$n=2$和$n=3$的情形上面已经验证，且对$n=3$情形的验证方法可适用于整数$n\ge 3$的情形。实际上，假设(3.9)式已对整数$n=k$成立，

则对$n=k+1$的情形有

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} X_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right)\bigcup X_{k+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| + |X_{k+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right)\bigcap X_{k+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| + |X_{k+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{k}\left(X_i\bigcap X_{k+1}\right)\right| \\
&= \sum_{s=1}^{k}(-1)^{s+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le k}\left|X_{i_1}\bigcap\cdots\bigcap X_{i_s}\right| + |X_{k+1}| \\
&\quad -\sum_{s=1}^{k}(-1)^{s+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le k}\left|\left(X_{i_1}\bigcap X_{k+1}\right)\bigcap\cdots\bigcap\left(X_{i_s}\bigcap X_{k+1}\right)\right| \\
&= \sum_{s=1}^{k}(-1)^{s+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le k}\left|X_{i_1}\bigcap\cdots\bigcap X_{i_s}\right| + |X_{k+1}| \\
&\quad -\sum_{s=1}^{k}(-1)^{s+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le k}\left|\left(X_{i_1}\bigcap\cdots\bigcap X_{i_s}\right)\bigcap X_{k+1}\right| \\
&= \sum_{i=1}^{k+1}|X_i| + \sum_{s=2}^{k+1}(-1)^{s+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le k+1}\left|X_{i_1}\bigcap\cdots\bigcap X_{i_s}\right| \\
&= \sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le k+1}\left|X_{i_1}\bigcap X_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap X_{i_s}\right|。
\end{aligned}$$

即等式(3.9)对$n = k+1$也成立。这样，由数学归纳法知等式(3.9)对任意一个整数$n\ge 2$均成立。

对任意整数$n\ge 2$，集合$X_1, X_2, \cdots, X_n$上的交图$G\left[X_1^n\right]$的顶点集和边集定义为

$V\left(G\left[X_1^n\right]\right) = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$;

$E\left(G\left[X_1^n\right]\right) = \{(X_i, X_j)\,|X_i\bigcap X_j \ne \emptyset, 1\le i, j\le n\}$。

对任意的整数组$\{i_1,\cdots,i_s\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$，如果$X_{i_1}\bigcap X_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap X_{i_s}\ne\emptyset$，则$X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_s}$在$G\left[X_1^n\right]$中的导出子图是一个$s$阶的完全图。这样，容斥原理(3.9)可采用图$G\left[X_1^n\right]$的完全子图表示为

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\sum_{K_s\simeq G\left[X_{i_1}^{i_s}\right]\prec G\left[X_1^n\right]}\left|X_{i_1}\bigcap X_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap X_{i_s}\right|。\tag{3.10}$$

注意，如果交图$G\left[X_1^n\right]$中存在完全子图K_m，则一定存在阶数$\le m$的完全子图。

特别地，如果$G\left[X_1^n\right]$中没有同构于K_3的子图，则等式(3.9)和(3.10)可简化为

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i| - \sum_{(X_i,X_j)\in E\left(G\left[X_1^n\right]\right)} \left|X_i \bigcap X_j\right|。 \tag{3.11}$$

5.3.鸽巢原理. 鸽巢原理是种群成员个数达到一定数量后的一种成员间的性态表现，有许多重要的推广。这个原理最简单的三种形式如下：



图3.47 鸽巢

原理5.1. $n+1$只鸽子飞入n个鸽巢，至少有一个巢中有两只或更多的鸽子。

原理5.1的正确性不言而喻！因为如果每个鸽巢最多飞入一只鸽子，则n个鸽巢最多能飞入了n只鸽子。然而，现在飞进去了$n+1$只鸽子。所以，一定有一个鸽巢飞入了两只或更多的鸽子。

原理5.2 把$n(r-1)+1$个小球放入n个盒子中，至少有一个盒子中小球数量不少于r个。

假设每个盒子中小球的数量都不超过$r-1$，则最多有$n(r-1)$个小球，但现在有$n(r-1)+1$个小球，一定有一个盒子小球数量不少于r个。

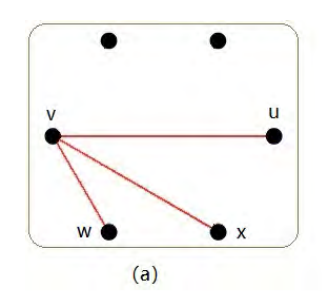
原理5.3 把无数的小球放入n个盒子中，至少有一个盒子里有无数个小球。

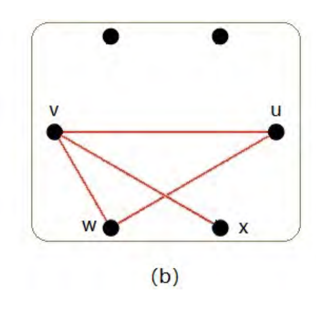
原理5.3的证明与5.2类似。如果每个盒子中的球数有限，则n个盒子中的小球总数一定有限，但现在n个盒子中放入了无数个小球，一定有一个盒子中的球数无限。

应用鸽巢原理可以得到许多有趣的结论。例如，在一间可容纳1500个座位的戏院坐满后，最少有5个观众同月同日出生，因如果最多有4个观众同月同日出生，则最多有$4\times 366 = 1464$个人，但现在$1500 > 1464$，故当戏院坐满时，最少有5个人同月同日出生；再如，少有人知道自己的头上有多少根头发，但应用鸽巢原理可以推知，中国大陆至少有14000个人头发数量是一样多的有趣结论，因为2021年国家统计显示，中国大陆总人口数为141178万，而黄种人头发数量平均在10万根左右，但$141178 > 14000\times 10$。故此，中国大陆至少有14000个人的头发数量是一样的。

Ramsey问题. 鸽巢原理刻画的，是种群成员数大到比平均数乘以鸽巢个数还要多时，存在一个鸽巢的鸽子数大于平均数的性态。类似的，这种性状还有很多。1958年6-7月号美国《数学月刊》上刊载了一个有趣的问题，作者Ramsey在这篇文章中给出了一个有趣的结论，即任何6个人的聚会，其中一定有3个人相互认识，或3个人相互不认识，后人称之为Ramsey问题。

应用鸽巢原理，可以很容易证明这个结论。首先，用平面上的6个点表示这6个人。如果两个人相识，则在它们之间连一条红线；如果不相识，则连一条绿线。在这6个点中任意选取一个点v。根据容斥原理，点v与另外的5个人中，至少有3个人认识或是至少3个人不认识。不失普遍性，假定v与u、w和x认识，即它们之间连的是红线，见图3.48（a）。此时，如果3个点u、w、x间有一条红线，不失普遍性，假设是在u与w之间，则v、u、w三个点间的连线均是红线，即v、u、w这3个人相互认识，如图3.48（b）。反之，三个点u、w、x之间练的全是绿线，即这3个人互不相识。这就证明了Ramsey的结论。





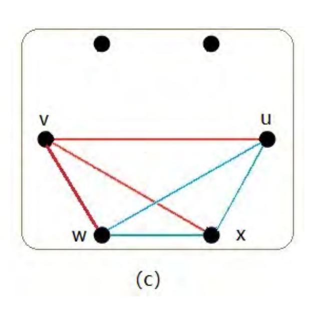


图3.48 六人相识关系

注意，整数6在Ramsey问题中具有最小性，即只要人数不少于6，一定存在3个人互相认识或是3个人互不相识，而5个人就不行。那么，对任意整数$m, n \geq 3$，是否存在一个最小整数$R(m, n)$，使得任意$R(m, n)$个人中，至少有m个人相互认识或是至少有n个人相互不认识呢？答案是肯定的！同时，Ramsey数具有对称性，即$R(m, n) = R(n, m)$，满足

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)。\tag{3.12}$$

这样，由$R(m, 2) = m$和$R(2, n) = n$，就可以得知$R(m, n)$的存在性。

然而，怎样证明不等式(3.12)呢？这与证明$R(3, 3)$的情形类似，用平面上的点表示人，用红边、绿边分别表示两个人相识或是不相识。首先，在$R(m-1, n)+R(m, n-1)$个人中任意选取一个人v。根据容斥原理，v与其他$R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1$个人中的至少$R(m-1, n)$个人相识或是至少与$R(m, n-1)$个人不相识，分别讨论如下：①如果$v$与至少$R(m-1, n)$个人相识，在这$R(m-1, n)$个人中，由定义或者有$m-1$个人相互认识，与人$v$合在一起就有$m$ 个人相互认识；或者存在n个人互不相识；②如果v与至少$R(m, n-1)$个人不相识，在这$R(m, n-1)$个人中，由定义或者存在m个人相互认识；或者存在$n-1$ 个人互不相识，与v合在一起就是n个人互不相识。综合这两种情形，就有$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$的结论，即对任意整数$m, n \geq 2$，Ramsey数$R(m, n)$存在。

用图论术语$R(m, n)$的存在性表明，用两种颜色，比如红色和绿色对完全图K_l进

行染色。这里，$l = R(m,n)$。则一定会出现单色的完全图K_m或K_n。注意，任何一个图G都是完全图$K_{|G|}$的子图。设G, H 是任意的两个图。那么，$R(m,n), m,n \geq 2$的存在性可以直接推出$R(G,H)$的存在性，即用两种颜色对定点数为$R(G,H)$ 的完全图染色，一定会出现单色的图G或H。

那么，是否可以确定出$R(m,n)$的值呢？欧阳博士告诉惠子，这是一个十分困难的问题。Ramsey自己仅确定了$R(3,3) = 6$。后来，人们陆续确定了$m,n \leq 5$ 的一些值，以及$R(m,n)$上界、下界的一些估值，但对整数$m,n \geq 5$确定$R(m,n)$时至今日仍是未解决的问题。表3.1列出了已知$R(m,n)$的值，其中的虚线表示尚未确定部分。

n \ m	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				
5	14	25					
6	18						
7	23						
8	28						
9	36						

表3.1 $R(m,n)$已知值

虽然一般地确定$R(m,n)$是个很困难的问题，但对一些图类G, H，确定$R(G,H)$有时则相对容易些。听到这里，惠子有点糊涂了，问欧阳博士："爸爸，容斥原理和鸽巢原理很有意思，可它们对科学认知种群有什么作用呢？"欧阳博士解释说，种群计数的核心在于不重复计数，容斥原理给出的，恰是成员间交叉重叠时的计数方法，这一点在科学研究中十分重要。例如，用(k,n) 表示整数k 和n 间的最大公约数。欧阳博士告诉惠子，欧拉定义了一个函数

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{Z}|(k,n) = 1,\quad 0 < k \leq n\ \}|。$$

如果n很小，$\varphi(n)$可以按照它的定义确定，可对于稍微大一点的n，确定$\varphi(n)$就是一件很复杂的事。有一个有名的计算公式，即

$$\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{l}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)。 \tag{3.13}$$

这里，$p_1, p_2, \cdots, p_l$为整数n的素数因子。应用容斥原理，我们可以很容易地证明这个公式。首先，对任意整数$i, 1 \leq i \leq l$，定义集合$X_i = \{k \in \mathbb{Z}|\ (k,n) = p_i, 0 < k \leq n\ \}$，

则由容斥原理(5.9)式，有

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= |\{k\in\mathbf{Z}|(k,n)=1, 0<k\le n\ \}| = \left|\{1,2,\cdots,n\}\setminus\left(\bigcup_{i}^{l}X_i\right)\right|\\ &= n-\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le l}\left|X_{i_1}\bigcap X_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap X_{i_s}\right|\\ &= n\left[1-\sum_{1\le i\le l}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\le i,j\le l}\frac{1}{p_ip_j}-\cdots+(-1)^l\frac{1}{p_1p_2\cdots p_l}\right]\\ &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_l}\right)=n\prod_{i=1}^{l}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)。\end{aligned}$$

鸽巢原理是对成员数大到一定程度后种群出现某种特征的判定，而Ramsey问题则可以看作是容斥原理的一种推广。欧阳博士告诉惠子，日常生活中，对人脸的特征，如人脸、眼睛、鼻子、嘴、牙齿的形状及变化等特征扫描、记忆和比对，进行人脸识别技术，就是鸽巢原理的一种应用。更进一步，应用Ramsey数$R(m,n)$的存在性可以得到一个有趣的结论，即当比对人数充分大的时候，人群中一定有两个长的一摸一样的人。惠子睁着大眼，有点吃惊地问欧阳博士:"不会吧！我怎么没遇到过和我长得一摸一样的人呢？"欧阳博士笑着告诉女儿，那是因为她遇见的人数还太少，还不是这里的充分大！那么，地球上有72.6亿多人口，是不是满足Ramsey数的条件呢？如果满足，惠子就一定能遇见与她长得一摸一样的人，还不是惠子的孪生姐妹。但一直没有遇见！说明什么？这说明72.6亿还不是所要求Ramsey数的充分大。换言之，让两个长得一摸一样的人出现的那个Ramsey数实在是太大，地球上的资源不足以养活这么多人口。

第6节 注释与评论

6.1. 人在对万物的认知中，"万物是组合的"是在哲学上解决人认知局限的一种思想，即将对一件事物不同的认知结果组合在一起，形成对该事物的完整认知，蕴含在"盲人摸象"寓言故事中那位智者给盲人们的总结，因为在对宇宙未知事物的认知上，人与寓言中的盲人类似，都是在对未知事物的局部感知上进行认知。历史上，这种组合认知思想称为"归元论"或"还原论"，将对物质的认知还原为认知中的最小单位-原子，属于科学哲学的范畴，包括物质构成理论、物质转化中的原子转化与重组规律等。现代科学中，将原子核中的质子、中子和介子等进一步细分为更

基本的粒子-夸克，正是基于质子、中子和介子内蕴的拓扑结构K_3, K_2进行的刻画，见文献[Nam]、[Mat] 和[XiL]。类似地，生物学中将生物还原为细胞和基因DNA，特别是对DNA双螺旋结构的认知等都是这种认知思想，见[Jin]和[Yan]。在这种思想引导下，拓扑学、组合数学、图论与拓扑图论中的定性、定量方法与技巧就是事物认知中的基本方法，包括对事物的抽象、组份间关系和组份行为的模拟与刻画等，见文献[Arm]、[ChL]、[GrT]、[GrW]、[Liu1]-[Liu2]和[MoT]等。这当中，最常用的模型是标号拓扑图，见文献[Mao10]、[Mao16]-[Mao17]、[Mao23]和[Mao39]。

6.2. 技术是为满足人类自身需求，在适应自然中遵从自然规律，不断积累的知识、经验、技巧和手段，是人类适应自然的方法、技能和手段的总和。那么，在“万物是组合的”思想指引下，怎样看待科学引领的技术本质呢？社会发展体现于人适应自然能力的提高，表现在人造器具、装置或设施的改进与创新上，而技术是促成这些器具、装置或设施的方法、技能和手段。与物质结构类似，技术也是由一个个集成块组合而成，有其自身的组合结构。这当中，集成块是由大分子组合而成且具特定功能的功能块，是次一级的技术；集成块再由次一级的集成块构成，是再次一级的技术。这样，一级一级地分解，最终到达技术构成中类似于基本粒子的基本零件，得到不同的技术均是由基本零件“功能”或“效应”的组合，见W.Brain Arthur的文献[Art]。对应地，科学与技术的关系，是一种在“组合结构”上相互促进的辩证关系，因为一方面，科学为技术提供原理，不同原理的组合对应于不同的技术，表现为不同的功能；另一方面，技术作为科学引领的实践产物，在推动人类物质文明进步的同时，又为科学发展提出需要进一步解决的问题，包括不同的组合结构、不同科学原理的组合引导的不同技术怎样实现人与自然协调共生等问题，因为科学与技术的宗旨是实现人类的终极目标，即与自然协调共生。

6.3. 确定生物种群规模是一种典型的组合计数，即确定集合中某一类元或具有某种特定结构元的个数问题，一般由递推或递归算式解决。组合学中有两个基本计数原理，一是容斥原理，确定一族重叠集合中元的总个数，实质是确定重叠集合元个数的一种原则，见文献[GrW]。容斥原理在数论中一般称为逐步淘汰原则，可直接推导出数论中一些重要的公式，如欧拉公式(3.13)等，见华罗庚[Hua]；二是鸽巢原理，又称为抽屉原理，在飞入鸽巢的鸽子数多于鸽巢数时判断有最多鸽子的鸽巢中最少的鸽子个数问题。Ramsey问题是鸽巢原理的推广，可以一般性地解决集合元的个数大到一定程度时某一类特殊子集的存在性问题，见文献[GrW]，并得到一些十分有趣的种群计数结论。

$C_{\mathscr{M}}$
万物组合

第 4 章

万物表征

****

草不谢荣于春风，

木不怨落于秋在。

谁挥鞭策驱四运？

万物兴歇皆自然。

— 唐.李白《日出入行》

第1节 相对表征

宇宙中的任何事物都是在不停地运动的，即客观事物运动是绝对的，静止是相对的。而人类在认知上的局限性，导致其对事物的认知是一种组合认知，是用组合思想对客观事物进行认知，把握其客观规律。在这种情形下，人类应怎样对一件事物表现出来的一些特征进行定量刻画呢？在一个天高云淡的夜晚，欧阳博士指着空中的月亮问惠子："你看，月亮在空中好像是一动不动的。那么，它到底是静止的还是运动的呢？"惠子回答说："月亮是运动的！老师在自然课上给我们讲过，月亮是绕着地球转动的一颗天然卫星。同时，它自己还在不停地转动着。欧阳博士继续问："我们脚下的地球是静止的还是运动的？惠子回答说："运动的！地球既要绕太阳公转，还要自转。"欧阳博士为了启发女儿思考，进一步问她："咱们俩站在这里一动不动，是静止的还是运动的呢？"惠子一笑说："既然咱俩一动不动，当然是静止的了！"欧阳博士又问："你再想想，咱俩看似不动，可地球在运动！咱俩站在地球上到底是静止的还是运动的呢？"欧阳博士这样一问，惠子有些糊涂了说："这我有点想不明白了，因为在我的眼中您是静止的，可要是把地球考虑在内，您和我又都是运动的。爸爸，为什么同样一件事物，既是静止的又是运动的呢？"欧阳博士告诉惠子，这就是客观事物运动的相对性！即人们说一件事物运动也好，静止也罢，其前提是看对哪一个参照物而言，即相对于这个参照物是运动的或静止的，这是讨论事物运动的基准。例如，为什么在惠子的眼中欧阳博士是静止的，是把惠子作为基准或参照物而言的。类似地，为什么说欧阳博士是运动的，是以地球外的某个星球或点，如太阳作为基准或参照物而言的。这就是为什么要建立坐标系$\{O;x,y,z\}$的原因，即假定是在一个统一的参照系下研究事物在x、y和z三个方向上的度量，又称为坐标(x,y,z)的变化行为。例如，点P在x、y和z轴上对应的值分别为5, 4和6，P点的坐标为$(5,4,6)$，见图4-2。这里，从坐标系原点O到点P的有向线段$\overrightarrow{OP}$称为点P的位置

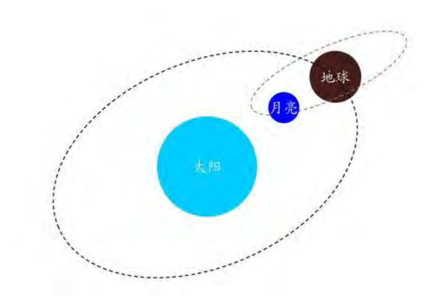


图4.1 相对运动

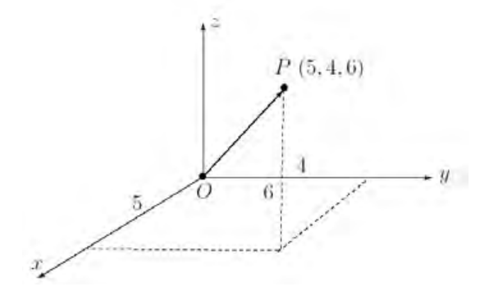


图4.2 坐标系

向量，记为$\mathbf{r}_P$。这样，点P就可以用坐标(x, y, z)或是位置向量$\mathbf{r}_P$进行刻画了。

更进一步，为刻画事物行为，在宇宙中建立这样一个坐标系，使人们易于刻画并把握事物行为就是一件十分有意义的事情。人类生活在地球上，从某种意义上看，以地球为原点建立的坐标系应当最便于人们认知和检验宇宙事物。但地球本身也在运动，既要绕太阳以速率$v = 29.8km/s$公转，还要以速率$\omega = 0.466km/s$自转，如图4.3 所示。

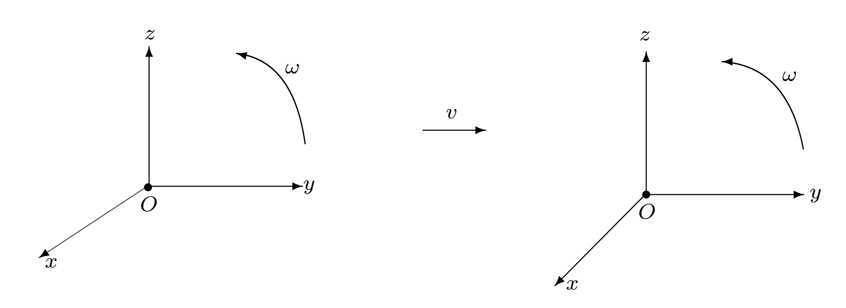


图4.3 运动中的坐标系

注意，在以地球为原点的坐标系中，刻画其他行星的运行轨迹相当复杂，远不像月亮绕地球做圆周运动那样简单。那么，宇宙中是否存在一个相对于万物永恒不动，即基于一个固定的坐标系原点描述宇宙万物的坐标系统$\{O;\ x, y, z\}$，称为绝对坐标系呢？理论上，这样的绝对坐标系一定存在，因为人们可以宇宙中选定某一个固定点为原点O，选定的三个不在一个平面上的空间方向为x、y和z坐标轴。但是，这样确定的绝对坐标系仅是一种理论选择而没有实践意义，因为运动是绝对的，人类对万物的所有观测结果都是在某一个相对坐标系中进行的，无法在这样建立的绝对坐标系中进行检验，也不利于把握事物行为。

1.1.仿射坐标. 一般地，刻画空间事物行为的坐标系称为仿射坐标系。在仿射坐标系中，坐标轴之间并不一定相互垂直，只要坐标轴不同时在维度更低的一个空间内即可。人眼的可视空间为3-维空间$\mathcal{T}^3$，即选3个不在一个平面的坐标轴可以唯一确定其中的点。这时，可取空间中任一个点为原点O，三个不共面的单位方向$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$，即长度$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = \mathbf{e}_3| = 1$为坐标轴方向，构建一个坐标系$\{O;\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$，又称为坐标架，满足对任一点P存在唯一的坐标值$x$、$y$和$z$，即几何点

$$P \in \mathcal{T}^3 \ \leftrightarrow \ (x, y, z) \ \text{ 或形式记为 } \ \mathbf{r}_P = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \tag{4.1}$$

是一种$1-1$对应关系。这里，x、y和z分别是点P在x-轴、y-轴和x-轴上的投影值。特别地，当坐标轴方向$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$间相互垂直时，称$\{O;\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$为直角坐标系，如图4.2 所示，这也是实践中最常用的一种坐标系。这种构建坐标系的思想可以一般化，拓广人的3-维可视范围为n-维$\mathcal{T}^n$，$n \geq 2$，即取n个单位方向$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$构建$n$-维坐

标系$\{O;\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$。此时，对应$P \in \mathcal{T}_n$的坐标为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，即$1-1$对应

$$P \in \mathcal{T}^n \ \leftrightarrow \ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \ \text{或形式记为}\ \mathbf{r}_P = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n。\quad (4.2)$$

这样，欧阳博士告诉惠子，任一个几何体是几何点的集合，利用几何点与坐标的$1-1$对应关系(4.1)和(4.2)，几何体可采用直角坐标系中的点集进行表示。

（1）线段. 线段，即空间某一条曲线γ上两个点A、B间的线段AB。特别地，如果γ为一条直线时称为直线段，见图4.4(a)和(b)。

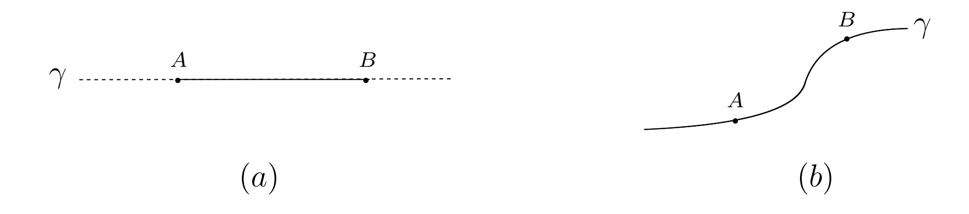


图4.4 线段

设曲线γ的自变量为t，即$\gamma(t), -\infty < t < +\infty$且$A = \gamma(a), B = \gamma(b), b \geq a$，则线段$AB$可以表示为$AB = \{\ x \in \gamma \mid a \leq t \leq b\}$。特别的，当$\gamma$是直线时，可以取$\gamma$为一个坐标轴，如$x$轴建立坐标系$\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$，假设点$A$和$B$在$x$-轴上的坐标分别为$(a, 0, 0)$，$(b, 0, 0)$且$b \geq a$，则线段$AB = \{\ (x, 0, 0) \mid a \leq x \leq b\}$。

（2）平面. 平面是空间中，与固定一个点$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$的连线垂直于固定方向(A, B, C)的所有点构成的集合。在一个坐标系$\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$中，平面可以用点集表示为$\{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | P_0P \perp (A, B, C)\}$。这里，符号$\perp$表示线段$P_0P$垂直于固定方向$(A, B, C)$。欧阳博士告诉惠子，等学习了向量内积的坐标表示后，平面还有更简洁的点集表示，即$\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 | Ax + By + Cz = D\}$。这里，$D$是一个常数，方程$Ax + By + Cz = D$称为平面方程。一般地，在欧氏空间$\mathbb{R}^n$中称$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$为超平面方程，其实质是一个$n-1$维的欧氏空间。

（3）长方体. 长方体Δ的每一个面是长方形，面与面相交的线称为长方体的棱，长方体条棱相交的点称为长方体的顶点。注意，长方体中，相交的两个面相互垂直，相交的两个棱相互垂直。故此，可以取三条棱的交点为原点O，三条棱分别为x、y和z轴建立直角坐标系，见图4.5。假设点C_1的坐标为(a, b, c)，则长方体在该坐标系中表示为点集

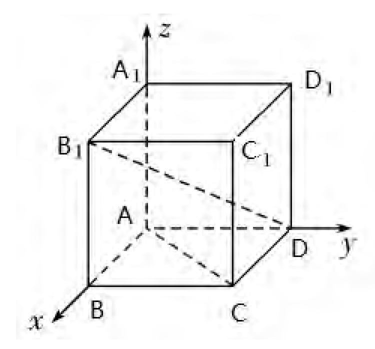


图4.5 长方体

$$\{\ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}。\quad (4.3)$$

如果x、y和z轴不是长方体的三条相交的棱而是与其三条相交棱平行的三个方向$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$，假设点A在这个坐标系中的坐标为$(a_1, b_1, c_1)$，点$C_1$的坐标为$(a_2, b_2, c_2)$，如图4.5所示，则长方体$\Delta$在该坐标系中的点集表示为

$$\{\ (x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2\}。\tag{4.4}$$

对任意整数$n \geq 3$，点集表示(4.4)可以推广至n-维直角坐标系，即在n-维直角坐标系中，长方体表示为

$$\{\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_1 \leq x_1 \leq a_2, b_1 \leq x_2 \leq b_2, \cdots, c_1 \leq x_n \leq c_2\}。\tag{4.5}$$

特别地，如果$a_2 - a_1 = b_2 - b_1 = \cdots = c_2 - c_1$，即长方体各棱长相等时，(4.5)式为一个正方体。

（4）球体. 空间中，到一个定点O的距离等于定长的所有点组成的图形叫做球面，由球面在空间围成的几何体称为球体。在3-维空间中，球面$\mathbb{S}^2$的典型特征是其上的点P到球心O的距离，即$|OP|$为一个常数R。那么，怎样确定空间两个点(x_1, y_1, z_1)与(x_2, y_2, z_2)间的距离呢？在数轴上可以很容易确定线段AB的长度，即A、B两点间的距离。设A、B在数轴上的坐标为x_1和x_2且$x_2 \geq x_1$，则线段AB的长度为$|AB| = |x_2 - x_1|$，见图4-7（a）。对应的，怎样确定3-维空间中两个点A、B间的距离，即线段$|AB|$的长度呢？

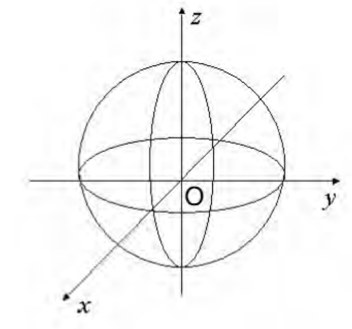


图4.6 球体

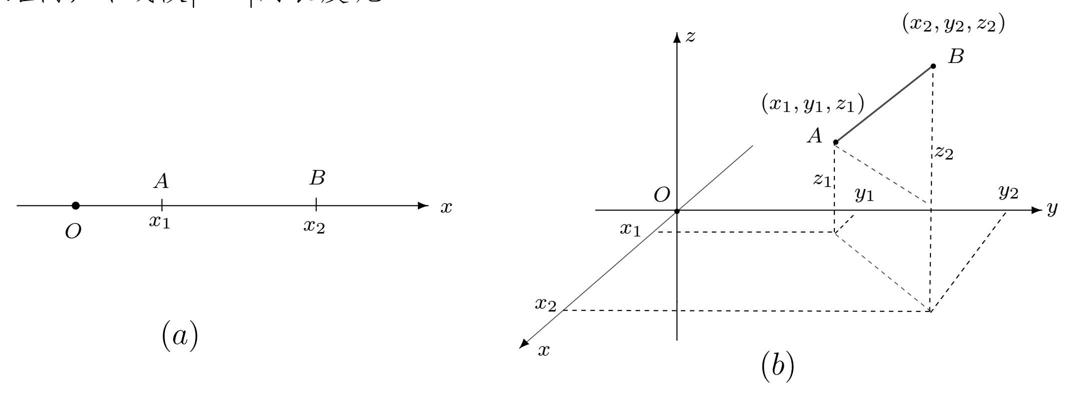


图4.7 两点间距离

利用初等几何学中的勾股定理，即直角三角形的斜边长为其直角边长平方和的平方根，由图4.7（b）易知

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}。\tag{4.6}$$

这样由定义，对以球心O为原点建立的坐标系，球面和球体的点集表示分别为

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^2 &= \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=R^2 \right\},\\ \mathbb{B}^3 &= \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2\le R^2 \right\}。\end{aligned} \tag{4.7}$$

类似地，半径为R的圆的点集表示为$\mathbb{S}=\{ (x,y) \mid x^2+y^2=R^2 \}$，圆盘为$\mathbb{B}^2=\{ (x,y) \mid x^2+y^2\le R^2 \}$。一般地，在$n$-维直角坐标系中，$n\ge 3$，球面和球体的点集表示分别为

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^{n-1} &= \left\{ (x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=R^2\right\},\\ \mathbb{B}^n &= \left\{ (x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le R^2\right\}。\end{aligned} \tag{4.8}$$

更一般地，如果坐标系原点不在球心，设球心的坐标为$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$，则球面和球体的点集表示分别为

$$\begin{aligned}&\left\{ (x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid \left(x_1-x_1^0\right)^2+\left(x_2-x_2^0\right)^2+\cdots+\left(x_n-x_n^0\right)^2=R^2\right\},\\ &\left\{ (x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid \left(x_1-x_1^0\right)^2+\left(x_2-x_2^0\right)^2+\cdots+\left(x_n-x_n^0\right)^2\le R^2\right\}。\end{aligned} \tag{4.9}$$

特别地，平面上的圆、2-维圆盘的点集表示分别为

$$\begin{aligned}&\left\{ (x,y) \mid \left(x-x^0\right)^2+\left(y-y^0\right)^2=R^2\right\},\\ &\left\{ (x,y) \mid \left(x-x^0\right)^2+\left(y-y^0\right)^2\le R^2\right\},\end{aligned} \tag{4.10}$$

以及2-维球面、3-维球体的点集表示分别为

$$\begin{aligned}&\left\{ (x,y,z) \mid \left(x-x^0\right)^2+\left(y-y^0\right)^2+\left(z-z^0\right)^2=R^2\right\},\\ &\left\{ (x,y,z) \mid \left(x-x^0\right)^2+\left(y-y^0\right)^2+\left(z-z^0\right)^2\le R^2\right\}。\end{aligned} \tag{4.11}$$

这里，(x^0,y^0)和(x^0,y^0,z^0)分别为2-维球心和3-维球心的坐标。

（5）柱体. 柱体$\mathcal{C}$是一个多面体，其中有两个面互相平行且全等，余下的每个相邻两个面的交线互相平行，见图4.7。柱体可以看作是(x,y)平面上一个2-维面在空间第3个维度z上的平移。这样一来，柱体可以用点集一般性地表示为

$$\mathcal{C}=\{ (x,y,z) \mid F(x,y)=0, a\le z\le b\}。$$

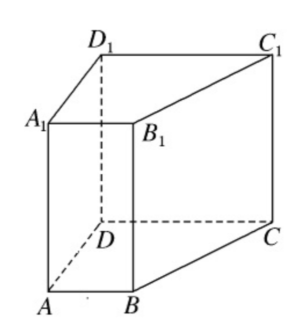


图4.7 柱体

这里，$F(x,y)=0$为(x,y)平面上一个2-维面，a,b为常数。例如，取$F(x,y)$为平面上的圆盘，则

$$\{\ (x,y,z)\mid \left(x-x^0\right)^2+\left(y-y^0\right)^2\le R^2, a\le z\le b\} \tag{4.12}$$

为圆柱的点集表示，其中，(x^0,y^0)为2-维圆心的坐标。

1.2.坐标变换. 为刻画一件事物的行为，构建仿射坐标系$\{O;\ \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$的方法有多种，包括选择不同的原点O和不同的坐标轴方向$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$等。这里，一个自然的问题是：对任意两个仿射坐标系$\{O;\ \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$和$\{O';\ \mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$，是否存在一个如图4.8所示的$1-1$变换$T$，

$$T:\{O;\ \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}\ \leftrightarrow\ \{O';\ \mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\},$$

使任一点P在坐标系$\{O;\ \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$、$\{O';\ \mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$中的坐标$(x,y,z)$ 和(x',y',z')间存在着关系

$$\left\{\begin{array}{lll}(x',y',z') & = & T(x,y,z),\\ (x,\ y,\ z) & = & T^{-1}(x',y',z'),\end{array}\right.$$

图4.8 坐标变换

欧阳博士告诉惠子，在几何上很容易地得到这样的变换T。首先，由图4.8，可施以平移变换，让两个坐标系的原点O和O'重合在一起。设O'在$\{O;\ \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 中的坐标为(x^0,y^0,z^0)，定义变换

$$T_p=\left\{\begin{array}{lll}x' & = & x+x^0,\\ y' & = & y+y^0,\\ z' & = & z+z^0\end{array}\right. \tag{4.13}$$

即可；其次，旋转坐标轴$\mathbf{e}_1$与$\mathbf{e}'_1$重合而保持$\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$不变，记这一个变换为$T_1$；再其次，旋转$\mathbf{e}_2$与$\mathbf{e}'_2$重合而保持$\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}_3$不变，记这一变换为$T_2$；最后，旋转$\mathbf{e}_3$与$\mathbf{e}'_3$重合而保

持$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$不变，记为$T_3$。这样，经由变换平移$T_p$和旋转$T_1, T_2, T_3$就得到变换$T$，即

$$T = T_3T_2T_1T_p。 \tag{4.14}$$

注意，上面构造T_p和T_1, T_2, T_3的每一步都是可逆的，从而T是可逆的，即T^{-1}存在。

更进一步，欧阳博士告诉惠子，还可以推导出上述变换T的代数表示式。首先，假设变换T_1, T_2, T_3 分别为

$$\begin{cases} T_1 : \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3, \\ T_2 : \mathbf{e}_2' = a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3, \\ T_3 : \mathbf{e}_3' = a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3。 \end{cases} \tag{4.15}$$

这里，a_{ij}，$1 \leq i, j \leq 3$分别为$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$三个方向的变换系数；其次，设点$P$在坐标系$\{O;\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$和$\{O';\ \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$中的坐标分别为$(x, y, z)$和$(x', y', z')$，由图4.8和上面的几何变换知

$$\begin{aligned} x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 &= \left(x^0\mathbf{e}_1 + y^0\mathbf{e}_2 + z^0\mathbf{e}_3\right) + (x'\mathbf{e}_1' + y'\mathbf{e}_2' + z'\mathbf{e}_3') \\ &= x^0\mathbf{e}_1 + y^0\mathbf{e}_2 + z^0\mathbf{e}_3 + x'\left(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3\right) \\ &\quad + y'\left(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3\right) + z'\left(a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3\right) \\ &= \quad \left(x^0 + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z'\right)\mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left(y^0 + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z'\right)\mathbf{e}_2 \\ &\quad + \left(z^0 + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'\right)\mathbf{e}_3。 \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{cases} x = x^0 + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y = y^0 + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z = z^0 + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{cases}$$

或矩阵表示

$$(x, y, z)^t = (x^0, y^0, z^0)^t + (a_{ij})_{3\times3}\,(x', y', z')^t_。 \tag{4.16}$$

这里，

$$(x, y, z)^t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (a_{ij})_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (x', y', z')^t = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

为点P在坐标系$\{O;\ \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$中的坐标转置、方向变换矩阵和点P在$\{O';\ \mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'\}$中的坐标转置，其中的矩阵加法、乘法定义为

$$
\begin{aligned}
(a_{ij})_{3\times3}+(b_{ij})_{3\times3} &= (a_{ij}+b_{ij})_{3\times3}\,,\\
(a_{ij})_{3\times3}\ (b_{ij})_{3\times3} &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{3}a_{1i}b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{3}a_{1i}b_{i2} & \sum\limits_{i=1}^{3}a_{1i}b_{i3}\\ \sum\limits_{i=1}^{3}a_{2i}b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{3}a_{2i}b_{i2} & \sum\limits_{i=1}^{3}a_{2i}b_{i3}\\ \sum\limits_{i=1}^{3}a_{3i}b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{3}a_{3i}b_{i2} & \sum\limits_{i=1}^{3}a_{3i}b_{i3} \end{pmatrix}。
\end{aligned}
$$

特别地，欧阳博士告诉惠子，如果坐标系$\{O;\ \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$和$\{O';\ \mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'\}$为直角坐标系，则易于验证(4.16)中的矩阵$A$满足$AA^t=I_{3\times3}$，这样的矩阵$A$称为正交矩阵，源于其为直角坐标系变换的缘故。

在直角坐标系中，点坐标(x,y,z)中的x,y,z是这个点在x-轴、y-轴和z-轴上距原点O的距离，但一般地，x,y,z也可以不完全采用长度度量。例如，极坐标系就是这样。极坐标是在直角坐标基础上延申的一种坐标系。设P为空间中的任一点，连接P与原点O，作xOy面上点P的正射投影点P'，设OP'与Ox的夹角为α $(0\le\alpha<2\pi)$，OP与xOY 平面的夹角为β $(-\pi/2\le\beta\le\pi/2)$，OP的长度为ρ，则称(ρ,α,β)为点P 的极坐标，如图4.9所示。

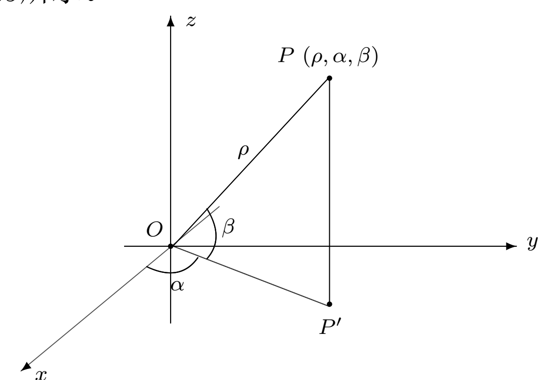


图4.9 极坐标系

那么，怎样确定点P的直角坐标(x,y,z)与极坐标(ρ,α,β)间的关系呢？由图4.9中的点P对应的$|OP|=\rho$和α,β，很容易确定(x,y,z)与(ρ,α,β)间的变换

$$
\begin{cases}
x=\rho\cos\alpha\cos\beta,\\
y=\rho\sin\alpha\cos\beta,\\
z=\rho\sin\beta
\end{cases}
\tag{4.17}
$$

也是一种坐标变换，即$T:(x,y,z)\leftrightarrow(\rho,\alpha,\beta)$。

1.3.相对性原理. 一般地，不同的坐标系对同样一件事物的刻画方程是不一样的。例如，如以原点O或是坐标系中的点(x^0, y^0, z^0)为球心，球面和球体分别由方程(4.7)或(4.11)刻画，具有不同的表现形式。但球面还是那个球面，球体也还是那个球体，并没有实质上的不同。故此，这里的方程(4.7)与(4.11)的不同，是因建立的坐标系不同而导致的方程形式不同，并非刻画的球面或球体存在差异。换言之，采用方程刻画事物行为依赖所构建的坐标系，是一种相对于坐标系的表现。

这在认知上涉及一个基本的哲学问题，欧阳博士告诉惠子，就是客观事物是否会以人的意志为转移呢？如果是，人类就可以操控宇宙万物而成为宇宙中至高无上的权力拥有者，想怎么样就怎么样！这也是一些科幻影片表达的主题。然而，老子在《道德经》中有言，即天地视万物为刍狗！这里的“天地”指宇宙。人类几千年的文明史表明，人类不仅不能主宰宇宙，且还需要效法、受制于天地，即老子说的“人法地、地法天、天法道、道法自然”，因为人在自然的面前等同于“蝼蚁”，十分渺小。在这种情形下，消除人类认知中对自然的盲目崇拜或幻想，包括因人类为认知需要而引入的一些辅助手段，例如，为刻画事物行为而引入的坐标系等，进而真正把握事物行为就是一件十分重要的事情了。那么，怎样消除因构建的坐标系不同而导致的刻画事物行为的方程不同，还原事物本真呢？欧阳博士告诉惠子，回答这一问题的前提是对人类引入的辅助手段，如坐标系等辅助手段的正确认知。对此，爱因斯坦于1916年发表的广义相对论，又称为协变性原理，是对人类认知万物而引入的辅助手段的反思，其实质是“客观事物不以人的意志为转移”这一哲学思想在万物认知上的体现，具体表述如下：

相对性原理 描写一个客观事物发展规律的方程式应当在所有的坐标系中具有相同的表现形式。

那么，应怎样理解爱因斯坦的广义相对论或是相对性原理呢？欧阳博士说，正确理解爱因斯坦的广义相对论涉及两个事项：一是刻画客观事物发展规律的方程形式；二是客观事物发展规律的内涵。对于第一个事项，爱因斯坦提出描写物理定律的方程应当在所有坐标变换T作用下形式不变，即协变形式，并在“引力作用与惯性作用等价假设”的基础上提出了协变形式的引力场方程。这里。爱因斯坦使用的协变形式，实际上是微分形式不变性的一种推广。那么，什么是微分形式不变性呢？欧阳博士解释说，设$y=f(x)$，$x=\phi(t)$即$y=(\phi(t))$为可微函数，则由复合函数求导法则，有

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \ \Leftrightarrow \ dy=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}dt=\frac{dy}{dx}dx=\frac{dy}{dt}dt, \tag{4.18}$$

即微分$dy=y'_x dx$与$dy=y'_t dt$形式一样，不受坐标变换$x=\phi(t)$的影响。对任意一个整数$n\geq 3$，将(4.18)这种变换不变性推广到n-维空间，得到n-维张量空间，并在其

上讨论几何性质，这就是黎曼几何。对应的，采用协变形式改写人们已知的事物发展方程，如质点运动方程、电磁场方程等，得到的结果一定满足相对性原理，这是二十世纪爱因斯坦本人及其众多追随者采用相对性原理完成的主要工作。

那么，采用相对性原理改写人们已知的事物发展规律的方程，到底是形式上的革命还是对事物认知上的提升呢？欧阳博士告诉惠子，可以肯定地说，这是一场方程形式上的革命而非人类认知能力上的提升，其实质是将坐标系隐含在每个点的邻域中，在形式上表现得紧凑和规整，但丝毫没有改变或拓展人们对事物发展已知规律的认知。那么，应当怎样理解或评价坐标系在对万物认知上的功用呢？注意，爱因斯坦提出的广义相对论并非是否定坐标系在万物认知上的功用而是在重申客观事物发展不以人的意志为转移，不应当依赖于坐标系的不同导致的表现形式不同而阐释万物变化规律，丝毫没有否决坐标系的含义，因为坐标系是人类定量刻画事物发展变化的基准框架。故此，欧阳博士说，由相对性原理可以自然地得出下面的平权性原理，对人类认知万物不无益处。

平权性原理 任何一个坐标系在描写事物发展规律时具有同等重要性，均可在其中用方程刻画事物的发展规律。

平权性原理表明，人类对万物的认知中，重要的在于对事物的发展变化的认知而不局限于表现形式。故此，对广义相对论或是坐标系相对性原理的一种新的理解，不是说要抛弃坐标系这个人类认知万物的基准框架，单纯追求事物发展变化方程的协变形式，而是要针对事物发展的特点和认知需要构建那种便于观测，便于对认知结果检验的坐标系以把握事物的发展与变化，这才是人类引入坐标系的宗旨。

第2节 向量运算

自然中的事物大都是沿着某一个方向发展变化的。例如，河水流动、风力及其朝向，以及刻画物体运动的力、速度、位移等。这种既有大小又有方向的量称为“向量”，是刻画万物变化行为中一种重要的抽象概念，一般用一条带有箭头的线段“$\overrightarrow{AB}$”或是黑体字母$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \cdots$ 表示。对应的，那些只有大小而没有方向的量，如行星个数、田野面积、水塘容量等称为标量。

一天下午放学后，惠子高兴地告诉欧阳博士，说下午在运动场上她们在拔河比赛中战胜了二班，老师给班上每个参赛同学奖励了一面小红旗。欧阳博士想给女儿普及点向量知识，问她：“拔河比赛时，参赛同学用力是向着哪个方向拽绳子的？”惠子回答



图4.10 拔河比赛

说："当然是向着自己这个方向用力拽，因为只有绳上吊着的红绸子进入自己这方界内才算赢！"欧阳博士继续问她："你们班上有没有人向着对方同学的方向拽绳子？"惠子一愣："当然没有，那样的人不是叛徒么，不是在帮助对方取胜了吗？"欧阳博士解释说，每个人拔绳子的力都有大小和方向，是一种向量。如果有参赛同学向着对方的方向用力，就会抵消自己这一方的拔河合力。只有当班上所有参赛同学都向着自己这一方用力拔时，力的方向一致，合力等于每个人拔河力的和，且只有拔河合力大于对方合力时才能在比赛中获胜，这是拔河比赛获胜的条件。

一般地，规定长度相等、方向相同的有向线段表示同一个向量$\mathbf{a}$，即向量$\mathbf{a}$可以在空间平行移动，可以任何一个点为起点。向量$\mathbf{a}$的大小即其长度，记为$|\mathbf{a}|$；长度为0的向量称为零向量，记为$\mathbf{0}$。注意，零向量的方向不确定；长度为1的向量称为单位向量。例如，(4.1)、(4.2)中的单位方向$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$即为单位向量；与向量$\mathbf{a}$长度相同但方向相反的向量称为$\mathbf{a}$的反向量，记为$-\mathbf{a}$。

欧阳博士告诉惠子，反向量的主要特征，在于与正向量同时作用的效果为零向量。例如，她们中参加拔河的同学中，如果有人向着对方的方向用力拔绳子，即会抵消她们自己这一方的拔河合力，可能会输掉比赛。那么，是否可以把这种力的作用一般化，类比数的运算总结它们的作用规律，刻画万物中的作用或关系呢？欧阳博士说，这种一般化就是向量加法、数乘和向量的内积、外积。

2.1.向量加法. 一个数与另一个数相加是纯数量相加，如$2+3=5$，因为数2和3没有方向。但一个向量与另一个向量相加，欧阳博士告诉惠子，既要考虑数量，还要考虑方向，以保证其和仍是一个向量。注意，向量可以空间中任一点为起点。这样，对于向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$，可以假设向量$\mathbf{b}$的起点为向量$\mathbf{a}$ 的终点，定义向量$\mathbf{a}+\mathbf{b}$为由向量$\mathbf{a}$的起点到向量$\mathbf{b}$的终点的一个向量，如图4.11(a)所示。当然，也可以假设向量$\mathbf{a}$和向量$\mathbf{b}$ 的起点O相同，以$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$为相邻边构造一个平行四边形。那么，平行四边形中起点为O的那条对角线就是向量$\mathbf{a}+\mathbf{b}$，如图4.11(b)所示。



图4.11 向量加法

这样，由三角不等式，知一般地有$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$且等式成立当且仅当向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的方向一致。对于惠子所在学校组织的拔河比赛，因任意一对的队员拔力方向一致，拔河合力为其队员各自拔力的求和，即$|\mathbf{a}_1|+|\mathbf{a}_2|+\cdots+|\mathbf{a}_s|$。这里，$s$为各

队参与拔河的人数。那么，如果某个人的拔力方向与自己这对相反，即向着对方的方向使力，其拔力就是一个反向量$-\mathbf{F}$，效果是抵消而不是贡献拔河合力，需要在上面的拔河合力中减去$\mathbf{F}$。特别地，一个向量$\mathbf{a}$与其反向量$-\mathbf{a}$的和，即$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$为一个零向量。

一般地，欧阳博士说，对向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$定义向量$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$。这样，一个向量$\mathbf{a}$与其反向量$-\mathbf{a}$的和又可以写成$\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{0}$。

对任意的向量$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$，由向量加法的定义可以很容易地得到：

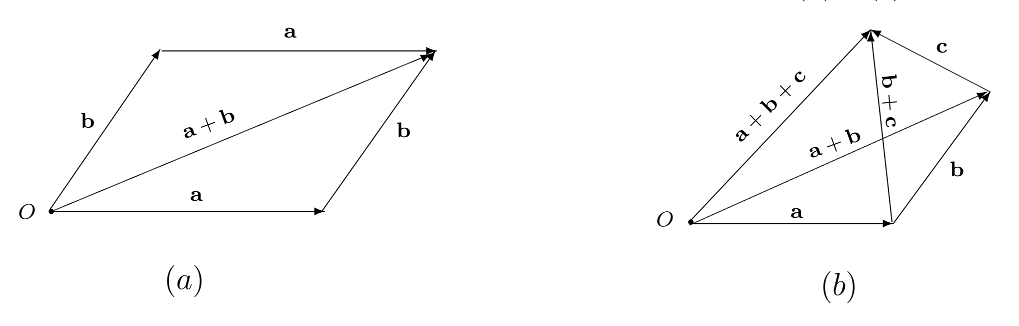
(1) 交换律，即$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$;

(2) 结合律，即$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$;

(3) 零向量唯一，即对任意一个向量$\mathbf{a}$，存在唯一一个$\mathbf{0}$向量使得$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$;

(4) 反向量唯一，即对任意一个向量$\mathbf{a}$，存在唯一一个向量$-\mathbf{a}$使得$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$。

这当中，向量加法的交换律和结合律可分别由图4.12中的(a)和(b)图示得知。



(a) (b)

图4.12 向量加法图示

那么，怎样知道向量$\mathbf{0}$的唯一性呢？欧阳博士说，假设还有一个向量$\mathbf{x}$使得$\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{a}$，式子两端均减去向量$\mathbf{a}$有$\mathbf{x}=\mathbf{0}$，即这个向量一定是$\mathbf{0}$。类似地，假设存在一个向量$\mathbf{y}$使得$\mathbf{a}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$，式子两端均减去向量$\mathbf{a}$有$\mathbf{a}-\mathbf{a}+\mathbf{y}=\mathbf{0}-\mathbf{a}$，进一步简化后就有$\mathbf{y}=-\mathbf{a}$，即反向量一定是$-\mathbf{a}$。这就说明了向量$\mathbf{0}$的唯一性，以及对给定的向量$\mathbf{a}$，向量$-\mathbf{a}$的唯一性。

2.2.向量数乘. 向量数乘又称为向量的倍乘，欧阳博士说，与数与数相乘类似，即对给定的实数λ和向量$\mathbf{a}$，定义$\lambda\mathbf{a}$ 为一个向量，它的长度为$|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda||\mathbf{a}|$。当$\lambda>0$时，这个向量的方向与向量$\mathbf{a}$相同；当$\lambda<0$时，这个向量的方向与向量$\mathbf{a}$ 相反。

对任意实数λ和向量$\mathbf{0}$，由定义有$|0\mathbf{a}|=0|\mathbf{a}|=0$，故$0\mathbf{a}=\mathbf{0}$。类似地，有$\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$。一般地，对任意向量$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$和实数$\lambda$、$\mu$，有下述等式

(1) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$, $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$;

(2) $\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$;

(3) $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$;

(4) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$。

这样，有了向量加法和数乘的概念，欧阳博士告诉惠子，前面(4.1)和(4.2)中的位置向量$\mathbf{r}_P = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$和$\mathbf{r}_P = {}_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$就不再是点$P$位置的一种形式标记而是向量$\mathbf{r}_P$或$\overrightarrow{OP}$。相应的，对3-维仿射坐标系中的两个向量$\mathbf{r}_{P_1} = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3$，$\mathbf{r}_{P_2} = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3$，有向量加法

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{P_1} + \mathbf{r}_{P_2} &= (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3) + (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3)\\ &= (x_1 + x_2)\,\mathbf{e}_1 + (y_1 + y_2)\,\mathbf{e}_2 + (z_1 + z_2)\,\mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

即$\mathbf{r}_{P_1} + \mathbf{r}_{P_2}$的坐标表示为

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)。 \tag{4.19}$$

注意，(4.19)式是向量加法或平行四边形法则在坐标系下的表现，即向量求和等于每个向量坐标分量的求和。这一结果对于任一个$n \geq 2$的n-维空间均成立。

值得注意的是，两个向量$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$间存在一个夹角θ，见图4.13。利用这个夹角θ，向量$\mathbf{b}$在向量$\mathbf{a}$方向上的投影为$\mathbf{b}\cos\theta$。同时，在与向量$\mathbf{a}$的垂直方向上的投影为$\mathbf{b}\sin\theta$，这在一定程度上可反映出向量$\mathbf{b}$对向量$\mathbf{a}$的影响，刻画万物中的相互作用行为，欧阳博士告诉惠子，这需要引入向量内积与外积。

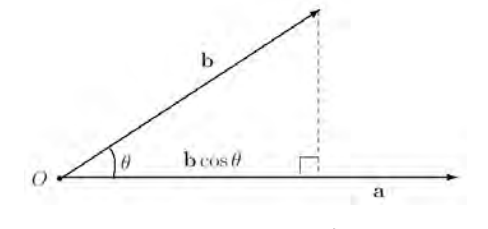


图4.13 向量投影

2.3.向量内积. 向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的内积是一个标量$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，对应的是向量$\mathbf{a}$与向量$\mathbf{b}\cos\theta$的长度乘积，即$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$。由向量$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$的内积的定义，可导出$\cos\theta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$。故此，向量内积的提出可以解决与向量长度或向量间夹角相关的问题。特别地，如向量$\mathbf{a}$与向量$\mathbf{b}$垂直即$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$，则有$\theta = 90°$，即$\cos\theta = 0$。从而有$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = 0$，且反之亦然。故有

$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0。 \tag{4.20}$$

任意向量$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$的内积具有以下性质：

(1) 正定性，即$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0$且等号仅当$\mathbf{a} = \mathbf{0}$时成立；

(2) 对称性，即$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$；

(3) 线性关系，即对任意实数λ，有$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$；

(4) 分配律，即$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$。

这当中，等式(1) − (3)均由向量内积的定义可以直接得知。对于(4)，注意$\mathbf{b} + \mathbf{c}$在$\mathbf{a}$方向上的投影等于$\mathbf{b}$在$\mathbf{a}$方向上的投影$\mathbf{b}\cos\alpha$与$\mathbf{c}$在$\mathbf{a}$方向上的投影$\mathbf{c}\cos\alpha$求和，

见图4.14。故有

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}+\mathbf{c}|\cos\gamma = |\mathbf{a}|(|OM|+|MN|)\cos\gamma \\ &= |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}|\cos\alpha+|\mathbf{c}|\cos\beta) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha+|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos\beta \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}。\end{aligned}$$

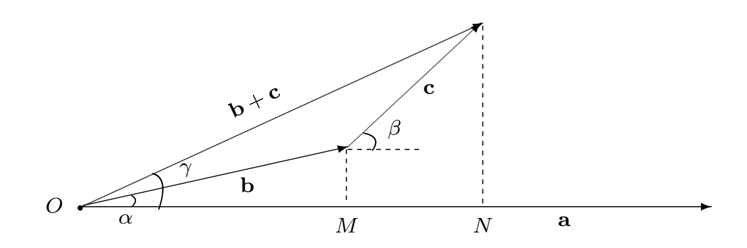


图4.14 向量投影

类似地，还有$\mathbf{a}\cdot\lambda\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$，$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$等。

在一个直角坐标系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$中，因有$\mathbf{e}_1\perp\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_1\perp\mathbf{e}_3$，$\mathbf{e}_2\perp\mathbf{e}_3$，即$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2=0$，$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3=0$，$\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3=0$，向量内积还有更简单的表现形式。例如，设向量$\mathbf{a}=x_1\mathbf{e}_1+y_1\mathbf{e}_2+z_1\mathbf{e}_3$，$\mathbf{a}=x_2\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+z_2\mathbf{e}_3$。则由向量内积的性质有

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (x_1\mathbf{e}_1+y_1\mathbf{e}_2+z_1\mathbf{e}_3)\cdot(x_2\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+z_2\mathbf{e}_3) \\ &= x_1x_2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1+y_1y_2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2+z_1z_2\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3+x_1y_2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 \\ &\quad +x_1z_2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3+y_1x_1\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1+y_1z_2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3+z_1x_2\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1+z_1y_2\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 \\ &= x_1x_2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1+y_1y_2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2+z_1z_2\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,\end{aligned}$$

即由向量$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$的坐标表示，有

$$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2。\tag{4.21}$$

注意，(4.21)是向量内积在直角坐标系中的表现，即向量内积等于每个向量对应坐标分量相乘后求和。特别地，向量$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$当且仅当它们对应的坐标分量乘积和为0。例如，向量$\mathbf{a}=(3,0,5)$与$\mathbf{b}=(0,6,0)$正交。类似地，(4.21)式对任一$n$-维直角坐标系都成立，这里，$n\geq 2$ 为整数，即有

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot(x_1',x_2',\cdots,x_n')=x_1x_1'+x_2x_2'+\cdots+x_nx_n'。\tag{4.22}$$

现在，欧阳博士告诉惠子，我们可以证明为什么欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的超平面方程是一次方程$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$了。首先，看一看$n=3$的情形。根据平面

的定义，设点$P_0=(x_0,y_0,z_0)$，$P=(x,y,z)$是平面上的任意一点，给定的方向为向量$\mathbf{v}=(A,B,C)$，则由$P_0P\perp\mathbf{v}$ 有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P}\perp\mathbf{v} &\Rightarrow (x-x_0,y-y_0,z-z_0)\perp(A,B,C)\\ &\Rightarrow (x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(A,B,C)=0\\ &\Rightarrow Ax+By+Cz=D,\end{aligned}$$

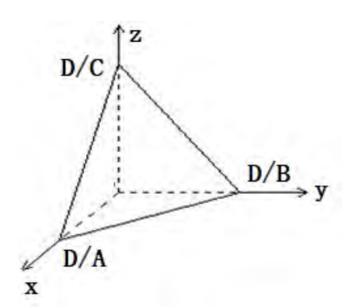


图4.15 平面

即3-维欧氏空间的平面方程为一次方程$Ax+By+Cz=D$，这里，$D=Ax_0+By_0+Cz_0$为一个常数，见图4.15。

类似地，设$P'_0=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$是$n$-维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的一个给定点，$P'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$\mathbb{R}^n$中超平面上的任意一点，给定的方向为向量$\mathbf{v}'=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则可以推出$\mathbb{R}^n$中的超平面方程为一次方程$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$，这里，$b=a_1x_{10}+a_2x_{20}+\cdots+a_nx_{n0}$为一个常数。

2.4.向量外积. 两个向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的外积$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$仍是一个向量，其长度定义为$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$，方向为与向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$均垂直，并使得$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$为一个右手系。什么是右手系，什么又是左手系呢？欧阳博士让惠子伸开右手，让右手食指按向量$\mathbf{a}$的指向，中指按向量$\mathbf{b}$的指向，两指间夹角小于180^o，大拇指的指向为向量$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$的方向，如图4.16所示则称为右手系。反之，上面三个向量与左手食指、中指和拇指的指向一致，则称为左手系。这里，θ为向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$之间的夹角。

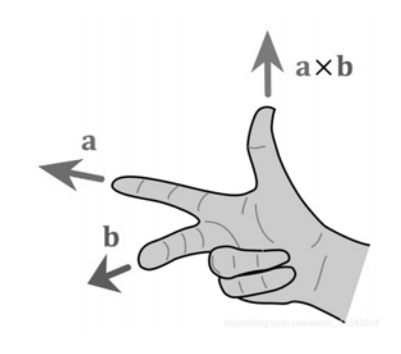


图4.16 右手系

由定义，如果$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$，即零向量，则有$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta=\mathbf{0}$。故有$|\mathbf{a}|=0$，$|\mathbf{b}|=\mathbf{0}$或者$\sin\theta=0$。如果$|\mathbf{a}|=0$或$|\mathbf{b}|=\mathbf{0}$，则向量$\mathbf{a}$或向量$\mathbf{b}$是零向量；如果$\sin\theta=0$，则向量$\mathbf{a}$与向量$\mathbf{b}$之间的夹角为0，即$\mathbf{a}$与向量$\mathbf{b}$平行或共线，记为$\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$。这样，就知

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{a}=\mathbf{0}，\mathbf{b}=0 \text{ 或 } \mathbf{a}/\!/\mathbf{b}。\tag{4.23}$$

注意，当向量$\mathbf{a}$不与向量$\mathbf{b}$平行时，平移使它们的起点为同一点O。则向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$构成一个平行四边形的临边，而$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$的长度，即$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$正好是这个平行四边形的面积，向量$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$垂直于这个平行四边形。故此，由向量内积的定义，有$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$，$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$。

更进一步，由向量外积的定义，如果$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$是一个右手直角坐标系，即

有$\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3$，欧阳博士说，这样就有

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2。 \tag{4.24}$$

一般地，对任意向量$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$和实数λ，向量的外积运算遵从下列规律：

(1) 反交换律，即$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$。为什么是这样呢，因为$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$与$\mathbf{b} \times \mathbf{a}$的长度相等但按右手系，它们的方向正相反；

(2) 线性关系，即$(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$。为什么是这样呢，因为设向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角为$\theta$，则由向量外积的定义有$|(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\lambda\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta = |\lambda||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$，且若$\lambda > 0$ 则$\lambda\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$同向，故$\lambda\mathbf{a} \times \mathbf{b}$与$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$同向；若$\lambda < 0$则$\lambda\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$反向，从而$\lambda\mathbf{a} \times \mathbf{b}$与$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$反向，故$\lambda\mathbf{a} \times \mathbf{b}$与$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$同向。这样，$(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$。类似地，有$|\mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})| = |\lambda||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$；

(3) 分配律，即$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$（左分配律），$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$（右分配律）。

首先，不失普遍性，由(4.23)式，假设左分配律中$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$、$\mathbf{a}\perp\mathbf{c}$。因如若不然，可将向量$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$沿$\mathbf{a}$方向及与其垂直方向进行分解$\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\perp} + \mathbf{b}^{/\!/}$，$\mathbf{b} = \mathbf{c}^{\perp} + \mathbf{c}^{/\!/}$，$\mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{b} + \mathbf{c})^{\perp} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})^{/\!/}$。这里，$\perp$和$/\!/$分别表示分解后与向量$\mathbf{a}$垂直或平行的分量。则由(4.23)式，有$\mathbf{a} \times \mathbf{b}^{/\!/} = \mathbf{0}$，$\mathbf{a} \times \mathbf{c}^{/\!/} = \mathbf{0}$，以及$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})^{/\!/} = \mathbf{0}$。故仅需$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})^{\perp} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}^{\perp} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}^{\perp}$即可，见图4.17；其次，假设左分配律中，$\mathbf{a}$ 是单位向量，即$|\mathbf{a}| = 1$。如若不然，因$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{a}^*$，这里，$\mathbf{a}^*$为一个单位向量，即$|\mathbf{a}^*| = 1$。这样，由(2)中的线性关系，如$\mathbf{a}^* \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}^* \times \mathbf{b} + \mathbf{a}^* \times \mathbf{c}$，则有$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$。

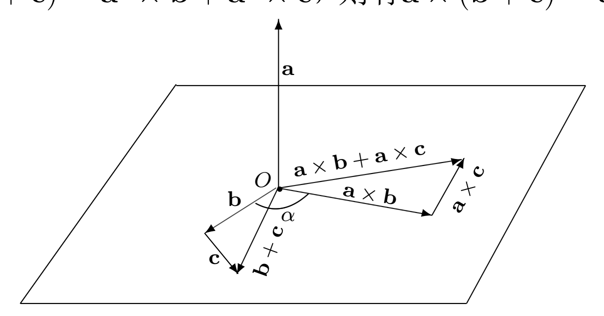


图4.17 外积分配律

这样，由向量外积的定义，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$是将$\mathbf{b}$绕$\mathbf{a}$右旋$90^o$得到的向量$\mathbf{b}$，$\mathbf{a}\times\mathbf{c}$是将$\mathbf{c}$绕$\mathbf{a}$右旋$90^o$得到的向量$\mathbf{c}$，因为$|\mathbf{a}| = 1, \sin 90^o = 1$。由向量加法，$\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}$构成一个三角形$\triangle$。故将其绕$\mathbf{a}$右旋$90^o$也是一个三角形$\triangle'$。这个三角形的边由两个顺次相接的向量$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$和$\mathbf{a} \times \mathbf{c}$构成，第三条边则是向量$\mathbf{b} + \mathbf{c}$绕向量$\mathbf{a}$右旋$90^o$的结果，即$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$，见图4.17。注意，在$\mathbf{a}$为单位向量的假设下，三角形$\triangle'$是三角形$\triangle$绕$\mathbf{a}$右旋$90^o$的结果，而由向量加法，第三条边在三角形$\triangle'$中为$\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times c$。故有$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$。

对于右分配律$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$，可以直接由左分配律得知，因为

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} &= -\mathbf{c}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=-(\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{b})\\ &= -(\mathbf{c}\times\mathbf{a}+(-\mathbf{c}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}。\end{aligned}$$

欧阳博士告诉惠子，在直角坐标系中向量外积可以有更简单得坐标表示。例如，设$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$为一个直角坐标系，向量$\mathbf{a}=x_1\mathbf{e}_1+y_1\mathbf{e}_2+z_1\mathbf{e}_3$，$\mathbf{b}=x_2\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+z_2\mathbf{e}_3$。则由向量外积的线性关系、分配律和(4.24)式知

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (x_1\mathbf{e}_1+y_1\mathbf{e}_2+z_1\mathbf{e}_3)\times(x_2\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+z_2\mathbf{e}_3)\\ &= x_1x_2\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1+y_1x_2\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1+z_1x_2\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1+x_1y_2\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\\ &\quad +y_1y_2\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2+z_1y_2\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2+x_1z_2\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3+y_1z_2\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3+z_1z_2\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3\\ &= (x_1y_2-x_2y_1)\,\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2+(z_3x_1-x_1z_3)\,\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1+(x_2z_3-z_3x_2)\,\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3\\ &= (x_2z_3-z_3x_2)\,\mathbf{e}_1+(z_3x_1-x_1z_3)\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2+(x_1y_2-x_2y_1)\,\mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

即向量$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$的坐标为

$$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)=(x_2z_3-z_3x_2,z_3x_1-x_1z_3,x_1y_2-x_2y_1)。\qquad(4.25)$$

第3节 线性空间

向量既有长度又有方向，是人们刻画万物变化行为的一种抽象。欧阳博士告诉惠子，人类对万物的认知遵循着从具体到抽象上升为理论，再从理论认知指导实践的过程。例如，向量运算的加法和数乘性质称为“线性”，遵循单位事物的堆磊或增长和平移不改变空间的特性，可以抽象化构造一种空间，即线性空间刻画向量及其相互关系，进而认知事物行为。这就是人类对万物认知中的“实践→认识→再实践→再认识”的一般过程。

例如，在坐标系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$中将一点$P$对应于向量$\overrightarrow{OP}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3$，或将一件事物的几何形体对应点$P$构成的集合等，其实质是以原点$O$为基准点，以向量$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$和$\mathbf{e}_3$为单位，将点$P$在三个方向$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$上投影对应的值$x$、$y$和$z$为点坐标$(x,y,z)$，是用一种分别以$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$为标架进行线性组合或堆磊的方法刻画点$P$或事物的外形，见图4.18。故此，在遵从向量线性特征的基础上，可以将向量视作一

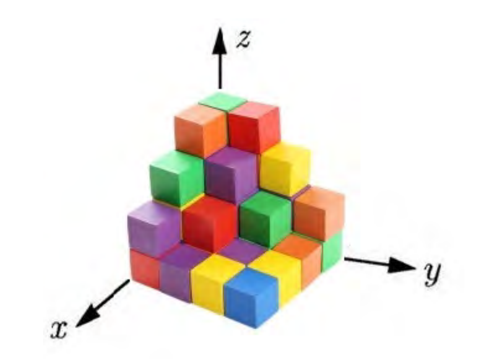


图4.18 线性组合

种既有大小又有方向的“抽象概念”进行一般性研究，进行定量刻画。那么，给定基元向量，是否可以从线性特征上得到所有向量进而刻画事物行为呢？答案是肯定的！这就是引入线性空间要解决的问题。

3.1.数与域. 与向量不同，欧阳博士告诉惠子，数，包括自然数、整数、有理数、实数和复数，是刻画万物的一种纯数量特征，又称为标量。这里，自然数是数数（shǔshù）的结果，整数是自然数的拓广，包括0和负的自然数；有理数是整数的拓广，即可表示为两个整数比m/n的数。特别地，当分母$m=1$ 时，有理数就是整数。早期人们认知万物时，认为万物数的特征只有自然数、整数和有理数而无他。例如，古希腊的毕达哥拉斯学派遵守着通约原则，即遵从毕达哥拉斯的一个断言：“万物皆数”。这里的“数”指整数。据此，任意两个几何量Q与V间的比率可以表示成两个整数m和n的比，见图4.19。



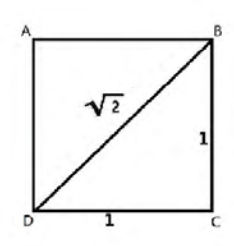


图4.19 希伯斯$\sqrt{2}$惹的祸

然而，毕达哥拉斯一个叫希伯斯的门人发现，边长为1 的正方形对角线长度为$\sqrt{2}$，但$\sqrt{2}$不能表示为两个整数的比，因为如果存在两个这样的整数m 和n 使得$\sqrt{2}=m/n$，不失一般性，可以假设m和n间的最大公约数为1。如若不然，可以用它们之间的最大公约数同时除以m和n而使其互素。注意，如果$\sqrt{2}=m/n$则有$m^2=2n^2$，这样，m一定是偶数，设$m=2s$。则$4s^2=2n^2$，即$2s^2=n^2$，故n也一定是偶数。这样一来，m和n之间至少存在一个公约数2，与上面假设其最大公约数为1相矛盾。故此，整数m和n不可能存在。希伯斯的这一发现摧毁了毕达哥拉斯万物皆数的断言，证实了无理数的存在。同时，希伯斯的结论动摇了毕达哥拉斯学派的基础，也给他自己带来了杀身之祸。为维护学派的尊严，毕达哥拉斯学派几个忠实的门徒在抓到希伯斯后将其沉入了地中海以惩戒西伯斯对学派的“不忠诚”。

整数运算特点，在于对加法“+”和乘法“×”运算后仍是整数，即整数集$\mathbb{Z}$对运算“封闭”。同时，存在加法单位元0和乘法单位元1，加法逆元$-k$，以及$k\neq 0$时的乘法逆元k^{-1}，使得$k+0=0+k=0$，$k\times 1=1\times k=k$和$k+(-k)=0$，$k\times k^{-1}=1$，称为整数域$\mathbb{Z}$。欧阳博士解释说，整数的这种性质进一步提炼，就有了数域或域的概念。一般地，对实数集$\mathbb{R}$中的任意一个对加法和乘法运算封闭且包含单位元0和1的子

集S，如果对其中任意一个元λ，在S 中存在加法逆元$-\lambda$和$\lambda \neq 0$时的乘法逆元λ^{-1}，则S称为一个域。例如，有理数集$\mathbb{N}$ 或实数集$\mathbb{R}$ 在加法"$+$"和乘法"$\times$"运算下满足这些性质，称为有理数域和实数域。

注意，整数域、实数域中有无限多个元，称为无限域。那么，是否存在有限个元的域呢？欧阳博士告诉惠子，答案是肯定的！例如，在2-元集$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$上定义加法和乘法运算

$$\begin{aligned} &0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0; \\ &0\times 0=0,\ 0\times 1=0,\ 1\times 0=0,\ 1\times 1=1。\end{aligned} \tag{4.26}$$

则0和1分别为$\mathbb{Z}_2$上的加法、乘法单位元，且$-0 = 0, -1 = 1$ 和$1^{-1} = 1$。故2-元集$\mathbb{Z}_2$在(4.26)式定义的运算下为一个只有2个元的有限域。

一般地，设p是一个素数，则由除以p的余数构成的集合$p\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{p-1}\}$在加法运算$\overline{k} + \overline{l} = \overline{k+l}$和乘法运算$\overline{k} \times \overline{l} = \overline{kl}$，即运算结果取除以$p$后的余数，如$\overline{1} + \overline{p-1} = \overline{0}, \overline{2} + \overline{p-1} = \overline{1}, \cdots$，以及$\overline{1} \times \overline{p-1} = \overline{p-1}, \overline{2} \times \overline{p-1} = \overline{p-2}, \cdots$等，是一个$p$个元的有限域，其加法单位元为$\overline{0}$，乘法单位元为$\overline{1}$，且任一元$\overline{k}$的逆元$\overline{x}$为满足$kx = pl + 1$的最小正整数解$x$，是唯一的。例如，$p = 3$时，$\overline{1}$和$\overline{2}$的逆元分别为$\overline{1}$和$\overline{2}$，即$\overline{1}^{-1} = \overline{1}$，$\overline{2}^{-1} = \overline{2}$因为方程$1x = 3l + 1$和$2x = 3l + 1$的最小正整数解分别为$x = 1$和$x = 2$。

3.2.线性张成. 向量的线性张成，欧阳博士解释说，是在给定一组向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \cdots$的基础上，采用向量加法或是用标量$\lambda$对每个向量数乘寻求新的向量。这当中的标量$\lambda$可以是一个整数、有理数、实数和复数，或是域$\mathscr{F}$中的一个元。一般地，向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\cdots$构成的集合记为$\mathcal{C}$，称为向量生成集，域$\mathscr{F}$中的元$\lambda$为标量，则向量张成即是由

$$\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} + \cdots \tag{4.27}$$

生成的元。这里，向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\cdots$为集$\mathcal{C}$中的元，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$均为域$\mathscr{F}$中的标量。通常，人们把由$\mathcal{C}$中的向量按(4.27)生成的所有向量记为$\langle\mathcal{C}\rangle$，即

$$\langle\mathcal{C}\rangle = \{\ \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} + \cdots \mid \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\cdots \in \mathcal{C}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots \in \mathcal{F}\ \}。 \tag{4.28}$$

一般地，如果$\mathcal{C}$或$\mathscr{F}$ 为无限集，则向量张成$\langle\mathcal{C}\rangle$一定是无限集；反之，如果$\mathcal{C}$或$\mathscr{F}$都是有限集，则$\langle\mathcal{C}\rangle$一定是有限集。例如，假设$\mathcal{C}$由三个相互垂直的单位向量$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$和$\mathbf{e}_3$构成，数域$\mathcal{F}$为整数域$\mathbb{Z}$，则$\langle\mathcal{C}\rangle$为无限集。此时，不失一般性，设三个单位向量$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$交于点$O$，则向量张成$\langle\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$是由原点$O$到所有空间格点$P$，即坐标为整数点的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 构成的集合。反之，如果域$\mathscr{F} = \mathbb{Z}_2$，即2-元有限域，此时$\lambda = 0$或1，则

由(4.28) 式，此时$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ 仅有图4.20所示的8个向量，即

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}。$$

这样，欧阳博士告诉惠子，向量的线性张成中有两类问题需要解决：一是给定标量$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$等按(4.27)式确定张成的向量$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} + \cdots$。这是一个简单的计算问题；二是确定一个给定的向量$\boldsymbol{\alpha}$如何由$\mathcal{C}$中的向量张成，即在域$\mathscr{F}$中确定$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$等标量使得$\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} + \cdots$。

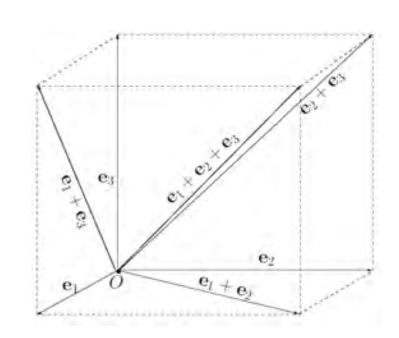


图4.20 向量张成

对一个给定的坐标系$\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$, $n \geq 2$，这两个问题都可以化为坐标计算而解决。例如，取

$$\mathbf{e}_1 = (1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-2}), \cdots, \mathbf{e}_n = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, 1),$$

则有

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n\} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \tag{4.29}$$

得到张成向量的坐标$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，即第一个问题的解。对于第二个问题，假设向量$\boldsymbol{\alpha}$在坐标系$\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$中的坐标为$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，则有

$$\boldsymbol{\alpha} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n。 \tag{4.30}$$

3.3.线性空间. 注意，向量的线性张成$\langle \mathcal{C} \rangle$是封闭的，即对$\langle \mathcal{C} \rangle$中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$和域$\mathscr{F}$中的标量$\lambda, \mu$，线性组合$\lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta}$是$\langle \mathcal{C} \rangle$中的向量。这样，由$\mathcal{C}$中的向量线性张成$\langle \mathcal{C} \rangle$中的所有向量，进而可以定量刻画向量的张成关系，把握万物变化的特征。欧阳博士告诉惠子，进一步提炼这一思想，可以得到线性空间的概念：

一个线性空间$(V; \mathscr{F})$称为域$\mathscr{F}$上的线性空间，或不强调域$\mathscr{F}$时简称为线性空间V，一般由以下要素构成：

(1) 一个由向量构成的集合V；

(2) 一个由标量构成的域$\mathscr{F}$；

(3) 向量加法“+”，即对V中的任意两个向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$，在$V$中存在一个和向量$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$满足以下性质：

1) 交换律，即$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$；

2) 结合律，即$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$。这里，$\boldsymbol{\gamma}$是$V$中的一个向量；

3) 存在唯一一个向量$\mathbf{0}$，称为零向量，使得对V中的任一个向量$\boldsymbol{\alpha}$有$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

4) 对V中的任意一个向量$\boldsymbol{\alpha}$，V中存在唯一一个向量$-\boldsymbol{\alpha}$，称为$\boldsymbol{\alpha}$的反向量，使得$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$；

(4) 向量数乘，即对V中的任一个向量$\boldsymbol{\alpha}$和域$\mathscr{F}$中的标量λ，在V中存在一个数乘向量$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 满足以下性质：

1) 对V中的任一个向量$\boldsymbol{\alpha}$，有$1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

2) 对$\mathscr{F}$中的标量λ_1,λ_2，有$(\lambda_1\lambda_2)\,\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\,(\lambda\boldsymbol{\alpha})$；

3) 对V中的任意两个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$和域$\mathscr{F}$中的标量$\lambda$，有$\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$;

4) 对V中的任一个向量$\boldsymbol{\alpha}$和域$\mathscr{F}$中的标量λ_1,λ_2，有$(\lambda_1+\lambda_2)\,\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}$。

例如，一些常见的线性空间如下：

例1. 域. 给定一个域$\mathscr{F}$，例如，整数域$\mathbb{Z}$、有理数域$\mathbb{N}$或实数域$\mathbb{R}$，其中的元满足向量空间的所有条件，是域$\mathscr{F}$上的一个线性空间$(\mathscr{F};\mathscr{F})$。

例2. n-元组. 对整数$n\geq 2$和域$\mathscr{F}$，由$\mathscr{F}$中的元组成的n-元组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$构成的集合记为$\mathscr{F}^n$。定义n-元组的加法运算

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

和数乘运算
$$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)。$$

这里，λ为域$\mathscr{F}$中的标量。则$(\mathscr{F}^n;\mathscr{F})$为一个线性空间。特别地，取$\mathscr{F}=\mathbb{R}$，则$\mathbb{R}^n$即对应于直角坐标系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\}$上的所有点坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$构成的线性空间，称为欧氏空间$\mathbb{R}^n$。

例3. 矩阵. 对整数$n\geq 2$和域$\mathscr{F}$，设$\mathscr{F}^{n\times n}$为由$\mathscr{F}$中的元组成的矩阵$(a_{ij})_{n\times n}$构成的集合。设矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n},B=(b_{ij})_{n\times n}$，$\lambda$为$\mathscr{F}$中的一个标量，定义

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{n\times n},\quad \lambda A=(\lambda a_{ij})_{n\times n}。$$

则$\mathscr{F}^{n\times n}$为一个线性空间。特别地，$\mathscr{F}^{1\times n}=\mathscr{F}^n$，即$\mathscr{F}$中元组成的$n$-元组构成的线性空间。

例4. 映射. 设$\mathscr{F}$为一个域，S_1和S_2为两个对加法“$+$”和乘法“$\cdot$”运算封闭的集合，$F(S_1,S_2)$为由$f:S_1\to S_2$即由S_1到S_2的映射构成的集合。对$F(S_1,S_2)$中的映射f,g和$\mathscr{F}$中的元λ，定义

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (\lambda f)(x)=\lambda f(x),$$

这里，x为S_1中的元。则$F(S_1,S_2)$为一个线性空间。取$S_1=S_2=\mathbb{R}$，则$F(\mathbb{R},\mathbb{R})$为$\mathbb{R}$上的一个实函数空间。

欧阳博士告诉惠子，线性空间虽源于力、速度等自然界中的向量，但它是在线性组合基础上的提炼和抽象，是把握事物行为的一种应用普遍的概念或工具。实际上，人类认知任何一件事物，几乎都是从构建其线性空间模型开始或是在线性空间上引入不同的度量，进而刻画事物行为的，下面介绍的内积空间就是这样一个例子。

设V是实数域$\mathbb{R}$上的一个线性空间，对V中的任意两个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，引入它们间的度量，称为内积$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$，即$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}\to\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$。内积是一个标量，且对$V$中的向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$和实数$\lambda$满足：

1) $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\geq 0$且等号仅当$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$时成立；

2) $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle$；

3) $\langle\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\lambda\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$；

4) $\langle\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle+\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle$。

内积满足上面$1)-4)$项性质的线性空间V称为内积空间。由于$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\geq 0$，可以定义向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度为$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle}$，又称为范数。

在内积空间中有一个著名的不等式，称为柯西-施瓦茨不等式，即对V中的任意两个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，有

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle^2\leq\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle \tag{4.31}$$

且等号仅当$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关时才成立。那么，怎样才能看出这一不等式呢？首先，如果$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关，则一定有$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$或$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$。此时，直接验算有$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle^2=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle$；其次，如果$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性无关，即对任意实数$t$，$t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，故有

$$\langle t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\rangle\geq 0\ \Rightarrow\ t^2\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle+2t\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle+\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle\geq 0。 \tag{4.32}$$

注意，(4.32)式是关于t的一个一元二次式且对任意实数t成立。故它的判别式一定小于零，即

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle^2\leq\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle。$$

这样，就一般性地得到了柯西-施瓦茨不等式(4.31)。

对于n-维欧氏空间$\mathscr{R}^n$中的向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，由性质$1)-4)$其内积计算结果与(4.22)式一致，即设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则有

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\cdot(b_1,b_2,\cdots,b_n)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n。$$

特别地，$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，故向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度为

$$|\boldsymbol{\alpha}|=|(a_1,a_2,\cdots,a_n)|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}, \tag{4.33}$$

与几何上点$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$到原点O的距离一致。对应地，柯西-施瓦茨不等式化为

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)。\quad (4.34)$$

称为柯西不等式。

由柯西不等式(4.34)，可以进一步得到三角不等式

$$|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}| \le |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|, \quad (4.35)$$

这在几何上是一个已知结论，即三角形中的任意两边的长度大于第三边的长度。那么，怎样从柯西不等式看出这一点呢？首先，将不等式(4.35)写成坐标形式

$$\begin{aligned}&\sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + \cdots + (a_n+b_n)^2}\\ &\qquad \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}\end{aligned}$$

并两边同时平方，有

$$\begin{aligned}&(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + \cdots + (a_n+b_n)^2\\ &\qquad \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) + \left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)\\ &\qquad +2\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}。\end{aligned}$$

进一步化简，有

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right),$$

即柯西不等式。然而，我们已知柯西不等式(4.34)成立而上述推理过程可逆。这样，逐步逆推回去就得到三角不等式(4.35)。

第4节 基与维数

线性空间中，有的向量可以由其他向量线性生成，有的则不能。欧阳博士告诉惠子，把握一个线性空间V，一种自然的想法是找出V中那些不能由其他向量张成的向量，即基元构成的集合$\mathcal{C}$。这里有两个基本准则：一是$\mathcal{C}$中不存在冗余向量$\mathbf{x}$，即那些在$\mathcal{C}$中去掉向量$\mathbf{x}$不影响向量张成结果$\langle\mathcal{C}\rangle$的向量。这一准则实际上是要求$\mathcal{C}$最小或最经济；二是向量间的关系便于计算或确定向量张成。

例如，n-维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的n个生成向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$且$|\mathbf{e}_i| = 1$，$\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$，$1 \le i, j \le n$就符合这两个准则。为什么这样说呢？首先，生成向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$中不存

在冗余向量，因为去掉其中任何一个向量都张成不了欧氏空间$\mathbb{R}^n$；其次，条件$|\mathbf{e}_i|=1$，$\mathbf{e}_i\perp\mathbf{e}_j$，$1\leq i,j\leq n$使得确定$\mathcal{C}$中的向量生成结果计算与坐标$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$等价，即向量

$$\mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{e}_n \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{a}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\quad \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$$

由实数集$\mathbb{R}$可以确定向量$\mathbf{a}$的生成关系。

那么，对给定的向量生成集$\mathcal{C}$，是否存在符合这两项准则的生成子集$\mathcal{C}'$呢？欧阳博士解释说，在直觉上，这样的生成集$\mathcal{C}'$ 应当是存在的，因为可以逐一验证$\mathcal{C}$中的每个向量$\mathbf{x}$是否冗余。如果冗余就去掉，即在生成集$\mathcal{C}\backslash\{\mathbf{x}\}$ 上考虑同样问题，直到剩下来的向量不再是冗余为止，这些剩余向量称为基向量。同时，上面欧氏空间的例子表明，生成向量间相互垂直可以极大地简化计算。那么，如何让基向量间相互垂直呢？这需要对生成基$\mathcal{C}'$中的元正交化。在几何上，这一点很容易做到。例如，可以先选定一个基向量，旋转另一个基向量与它垂直，得到两个相互垂直的基向量。然后，在剩余基向量中逐一旋转那些不与已相互垂直的基向量垂直的基向量，使其与那些基向量相互垂直，直到所有基向量都相互垂直为止，如图4.21所示。这样就得到一个正交的生成基$\mathcal{C}'$。

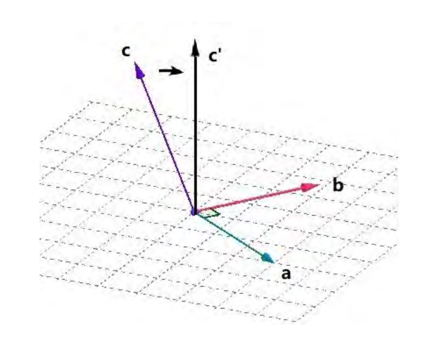


图4.21 基向量旋转图

4.1.线性独立. 向量间的线性独立或相关，是确定线性空间生成基中的重要概念。设$(V;\mathscr{F})$是一个线性空间，$\mathcal{C}$是该线性空间的一个生成集。如果$\mathcal{C}$ 中存在冗余向量$\mathbf{x}$，其条件是$\mathcal{C}\backslash\{\mathbf{x}\}$ 中存在向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$，域$\mathscr{F}$ 中存在不全为0的标量$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$使得

$$\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_k\mathbf{a}_k, \tag{4.36}$$

即$\mathbf{x}$的生成作用可以由向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$替代。这里，$k\geq 1$为整数。反之，如果$\mathbf{x}$的生成作用不能由$\mathcal{C}\backslash\{\mathbf{x}\}$ 中的向量替代，则$\mathbf{x}$就不是$\mathcal{C}$中的一个冗余向量。欧阳博士告诉惠子，这种思想的进一步提炼就有线性相关和线性独立的概念。

对任意整数$n\geq 1$，线性空间V中的向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$称为是线性相关的，如果域$\mathscr{F}$中存在不全为0的标量$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$使得

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}。 \tag{4.37}$$

反之，如果域$\mathscr{F}$中没有不全为0的标量$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$使(4.36)式成立，即如果(4.37)式成立则有$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，则向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$称为是线性独立的。

例如，欧氏空间$\mathbb{R}^3$中，向量

$$\mathbf{a}_1 = (3, 0, -3),\ \mathbf{a}_2 = (-1, 1, 2),\ \mathbf{a}_3 = (4, 2, -2)$$

是线性相关的，因为存在实数$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$使得

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 &= (6, 0, -6) + (-2, 2, 4) - (4, 2, -2) \\ &= (6 - 2 - 4, 0 - 2 + 2, -6 + 4 + 2) = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

而向量

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1),\ \mathbf{b}_2 = (0, 1, 1),\ \mathbf{b}_3 = (0, 0, 1)$$

则是线性独立的，因为如果存在实数$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$使

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \lambda_3\mathbf{b}_3 = (0, 0, 0)\ \Rightarrow\ (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0),$$

得到线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) &= 0。 \end{cases}$$

从而，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$，即向量$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$是线性独立的。

由向量线性相关和线性独立的定义，有以下简单的结论：

1) 任一个含有线性相关向量的向量集是线性相关的；

2) 任一个线性独立向量的子集仍是线性独立的；

3) 任一个含有零向量$\mathbf{0}$的向量集是线性相关的，因为对域$\mathscr{F}$中的任一标量λ，有$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$;

4) 一个向量集S是线性独立的，则它的每个有限子集是线性独立的，且反之亦然，即如果它的每个有限子集是线性独立的，则S是线性独立的。

4.2.基与维数. 欧阳博士告诉惠子，在线性生成条件下寻找线性空间V的生成基，是刻画V中向量的一种有效方法。一个线性空间V的生成基，是指V 中一个线性独立子集$\mathcal{C}$，其中的元生成V。按生成基$\mathcal{C}$ 中含有无限或有限多个元的不同，线性空间分为无限维线性空间和有限维线性空间，即$|\mathcal{C}| < +\infty$两类。这里主要讨论有限维线性空间性质。

首先，一个有限维线性空间V无论有多少个生成基均具有相同个数的元。如其不然，假设$\mathcal{C}_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$和$\mathcal{C}_2 = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m\}$为$V$的两个生成基，$m >$

n且$\mathbf{b}_j = \gamma_{1j}\mathbf{a}_1 + \gamma_{2j}\mathbf{a}_2 + \cdots + \gamma_{nj}\mathbf{a}_1$。这里，$1 \leq j \leq m$。对$\mathscr{F}$中的任意$n$个标量$x_1, x_2, \cdots, x_m$，有

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_m\mathbf{b}_m &= \sum_{j=1}^{m} x_j\mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}\mathbf{a}_i \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} (\gamma_{ij}x_j)\,\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}x_j\right)\mathbf{a}_i。\end{aligned}$$

注意$m > n$，即线性方程组

$$\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}x_j = 0, \qquad 1 \leq i \leq n \tag{4.38}$$

中的方程数少于变量数，故方程组(4.37)存在非0解$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$。这样，就有

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_m\mathbf{b}_m = \mathbf{0},$$

与$\mathcal{C}_2$是V的生成基矛盾。故不能有$m > n$，即$m \leq n$。类似地，将上面的$\mathcal{C}_1$用$\mathcal{C}_2$替换知$n \leq m$。这样，就有$m = n$，即V的任一个生成基中具有相同个数的元，称为线性空间V的维数，记为$\mathrm{dim}V$。例如，$\mathrm{dim}\mathbb{R}^n = n$，即$\mathbb{R}^n$为$n$-维线性空间。

对于V的任一个线性独立的子集W_0，一定有$|W_0| \leq \mathrm{dim}V$。那么，是否可以将W_0拓广为V的一个生成基呢？欧阳博士说，答案是肯定的！首先，如果W_0生成V则结论自不在话下。如其不然，V中一定存在一个不能由W_0中的元生成的元，设$\boldsymbol{\alpha}_1$是这样的一个元。取$W_1 = S_0\bigcup\{\boldsymbol{\alpha}_1\}$。同样，如果$W_1$生成$V$，得到想要的结论。如其不然，$V$中一定存在一个不能由$W_1$中的元生成的元，记为$\boldsymbol{\alpha}_2$，取$W_2 = W_0\bigcup\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$并重复这一过程。由于$\mathrm{dim}V$有限，最多经过$s \leq \mathrm{dim}V - 1$步得到一个线性独立集

$$W_{s+1} = W_0\bigcup\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} \tag{4.39}$$

生成V，即在线性独立集W_0基础上增加$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，将其拓广为$W_{s+1}$即为$V$的一个生成基。这里，$|W_0| + s = \mathrm{dim}V$。

一般地，对V的生成集$\mathcal{C}$中任意两个子集U_0, W_0，由第3章中的“容斥原理”有

$$|U_0| + |W_0| = \left|U_0\bigcup W_0\right| + \left|U_0\bigcap W_0\right| \tag{4.40}$$

这一等式。现在，假设U_0、W_0张成的线性空间分别为U和W，则有$|U_0| = \mathrm{dim}U$，$|W_0| = \mathrm{dim}W$。记$U + W = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} | \mathbf{a} \in U, \mathbf{b} \in W\}$，$U\bigcap W = \{\mathbf{c} | \mathbf{c} \in U\bigcap W\}$。那么，欧阳博士问惠子，线性空间中是否有维数等式

$$\mathrm{dim}U + \mathrm{dim}W = \mathrm{dim}\,(U + W) + \mathrm{dim}\left(U\bigcap W\right) \tag{4.41}$$

成立呢？欧阳博士解释说，答案是肯定的！因为$U_0\bigcup W_0$是线性独立的且$U+W$中的任一个向量可以由$U_0\bigcup W_0$中的元生成，故有等式$\dim(U+W)=|U_0\bigcup W_0|$；类似地，还有等式$\dim(U\bigcap W)=|U\bigcap W|$。这样，由容斥原理(4.40)可以直接得到维数等式(4.41)。当然，等式(4.41)也可由拓广上面$U_0\bigcap W_0$中的元为V的一个生成基的方法得到，但其实质是容斥原理(4.40)的应用。

为了消除线性空间之间因向量符号不同而导致的向量表示上的人为差异，欧阳博士告诉惠子，对向量的线性张成还有一个分类问题，即给定域$\mathscr{F}$，判断由不同的生成基$\mathcal{C}$和$\mathcal{C}'$张成的线性空间V和W是否一致。为此，需要先明确这里的两个线性空间一致是什么意思。既然这里讨论的是线性空间，"一致"一词的含义应界定为是两个线性空间的元之间的对应关系且维持线性结构一致，即"同构"。一般地，线性空间V和W称为是"同构"的，指存在一个$1-1$映射$T:V\to W$ 维持两个空间的线性关系，即对任意线性空间V中的向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$有

$$T(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda T(\mathbf{a})+\mu T(\mathbf{b}),\tag{4.42}$$

其中，λ,μ为域$\mathscr{F}$中的标量。

对线性空间而言，判断V和W是否同构可以由其维数是否相同直接判定，即如果$\dim V=\dim W$则线性空间V和W同构！那么，怎样由线性张成得到这一结论呢？首先，假设$\dim V=\dim W=n$，V的生成基$\mathcal{C}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，$W$的生成基$\mathcal{C}'=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$；其次，定义映射$T$在遵从线性关系(4.42)的条件下，满足

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\beta}_1,\ T(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ T(\boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{\beta}_n。$$

则T是一个$1-1$映射，即

$$T:x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\ \leftrightarrow x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n。\tag{4.43}$$

这样，由(4.43)可知，如$\dim V=n$则$(V;\mathscr{F})$同构于$\mathscr{F}$中元构成的n-元组形成的线性空间，即$\mathscr{F}^n$。同时，可以定义一个向量$\boldsymbol{\alpha}$在生成基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$下的坐标

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\ \leftrightarrow\ (x_1,x_2,\cdots,x_n),\tag{4.44}$$

即$\boldsymbol{\alpha}$在仿射坐标系$\{O;\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$中的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，与(4.2)式一致。

4.3.基正交化. 类似于(4.43)式，线性空间V的生成基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$与仿射坐标系的标架$\{O;\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$间存在着$1-1$对应，即在标架$\{O;\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$中向量$\boldsymbol{\alpha}$的坐标为(4.43)式确定的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。欧阳博士告诉惠子，这当中最简

单的当属n-维欧氏空间的坐标系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\}$，称为法坐标系。对应的基向量$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\}$称为标准正交基。这里

$$\mathbf{e}_1=(1,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1}),\ \mathbf{e}_2=(0,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-2}),\ \cdots,\ \mathbf{e}_n=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},1),$$

即对任意整数i,j，$1\le i\ne j\le n$，基向量$|\mathbf{e}_i|=|\mathbf{e}_j|=1$为单位向量且不同基向量间

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=(\underbrace{0,\cdot,0}_{i-1},1,\underbrace{0,\cdot,0}_{n-i})\cdot(\underbrace{0,\cdot,0}_{j-1},1,\underbrace{0,\cdot,0}_{n-j})=0+0+\cdots+0=0,$$

即$\mathbf{e}_i\perp\mathbf{e}_j$，基向量$\mathbf{e}_i$与$\mathbf{e}_j$垂直。注意，任一个向量$\boldsymbol{\alpha}$的单位化很容易做到，因为

$$\left|\frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\right|\ =\ \frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{|\boldsymbol{\alpha}|}\ =\ 1, \tag{4.45}$$

即$\boldsymbol{\alpha}/|\boldsymbol{\alpha}|$是一个单位向量。那么，对$V$的任一个生成基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，是否可由其导出一个$V$的正交基呢？欧阳博士说，答案是肯定的！这就是格瑞姆-史密特正交化，其实质是正交化的几何直观，即图4.21中所示的向量正交化过程，步骤如下：

第1步. 取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，则有$\boldsymbol{\beta}_1\ne\mathbf{0}$且$\boldsymbol{\beta}_1$为$\boldsymbol{\alpha}_1$的线性组合。

第2步. 定义

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1,$$

即$\boldsymbol{\beta}_2$是基向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$的线性组合。注意，$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$线性独立，故$\boldsymbol{\beta}_2\ne\mathbf{0}$且

$$\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle=0,$$

即$\boldsymbol{\beta}_2$与$\boldsymbol{\beta}_1$正交。

第3步. 一般地，对整数$1\le k\le n$，如已构造出两两正交的向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$，且每个向量$\boldsymbol{\beta}_i$为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i$的线性组合。这里，$1\le i\le k$。定义

$$\boldsymbol{\beta}_{k+1}=\boldsymbol{\alpha}_{k+1}-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\cdots-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_k\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_k,\boldsymbol{\beta}_k\rangle}\boldsymbol{\beta}_k, \tag{4.46}$$

则向量$\boldsymbol{\beta}_{k+1}$是向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$的线性组合。注意，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$两两正交，故对任意整数$i,1\le i\le k$有

$$\langle\boldsymbol{\beta}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_i\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_i\rangle-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_i\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i\rangle}\langle\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i\rangle=0,$$

即对任意整数$i,1\le i\le k$，向量$\boldsymbol{\beta}_{k+1}$与$\boldsymbol{\beta}_i$正交。这样，向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{k+1}$是一个两两正交的向量组。

第4步. 如果$k+1<n$，重复第3步构造，直到$k+1=n$终止。

这样，由线性空间V的一个生成基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$经由第1步-第4步就得到了$V$的一个两两正交的生成基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$。进一步，应用(4.45)对每个$\boldsymbol{\beta}_i$单位化为$\boldsymbol{\beta}'_i$，$1\leq i\leq n$，就得到$V$的一个法坐标系$\{O;\boldsymbol{\beta}'_1,\boldsymbol{\beta}'_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}'_n\}$。

第5节 质点方程

当一个物体的尺度大小与其他相邻物的距离相比极小，或是物体构成中的各组分运动相同，其任一组分的运动都可以代表整个物体运动时，欧阳博士告诉惠子，这时，可以不考虑物体的内部结构而将该其抽象为一个几何点，把物体质量集中在这个几何点上进行刻画。这样的点称为质点，即有质量但没有体积或形状的抽象点。这样，在认知这类物体运动时，可以在坐标系中用质点模型刻画其运动行为。例如，人们在地球上遥望星空，它们有的像展翅飞翔的天鹅，有的像双夹高举翘着尾巴的蝎子，时大时小、或明或暗，在人眼中呈现出绚丽多姿的形态。然而，当进一步放大观测尺度，例如2亿光年、3亿光年或10亿光年即在宇宙学尺度上观测，则宇宙在任一点及其上的任一方向是不可分辨完全一致的。这时，行星体积相比于行星间距极小而可以忽略，将其视为为一个质点P。这样，可以先构建法坐标系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$，并在这个法坐标系中采用位置向量



图4.22 星空

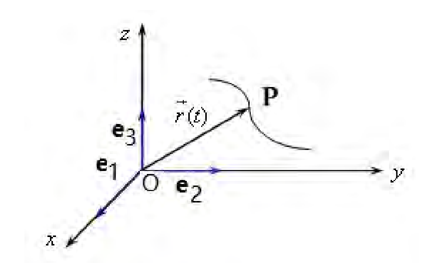


图4.23 质点运动轨迹

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)\quad \text{或者}\quad \mathbf{r}=x(t)\mathbf{e}_1+y(t)\mathbf{e}_2+z(t)\mathbf{e}_3 \tag{4.47}$$

刻画行星P的运动行为。这里，质点运动方程(4.46)也可以写成标量或参数形式

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad x=z(t)。\tag{4.48}$$

这样，当时间t变动时，矢量$\overrightarrow{OP}$的端点P随时间t变化描绘的空间曲线即完整地刻画出P的运动轨迹，如图4.23所示。故此，向量方程(4.47)或参数方程(4.48)称为质点P的运动方程，且可由参数方程(4.48)消去参数t而得到一般形式的曲线方程。例

如，对向量方程$\mathbf{r}=R\sin t\mathbf{e}_1+R\cos t\mathbf{e}_2+s\mathbf{e}_3$或参数方程

$$\begin{cases} x(t)=R\sin t,\\ y(t)=R\cos t,\\ z(t)=c \end{cases}$$

消去参数t得到一般形式的方程

$$x^2(t)+y^2(t)=R^2,\quad z(t)=c, \tag{4.49}$$

即为空间$\mathbb{R}^3$中$z=s$平面上半径为R的圆。这里，$0\le t\le 2\pi$，c为一个常数。特别地，如果质点的运行轨迹为一条直线时，称为直线运动；反之，则称为曲线运动。

注意，方程(4.47)或(4.48) 是质点P在坐标系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$，即一个静止不动的坐标系中的运动方程。这样的坐标系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$又称为运动参照系。一般地，选择不同的参照系质点$P$的运动方程有不同的表现形式。例如，对在一列作匀速直线运动的火车，即该火车在单位时间内行走的路程是一个定常值上一个自由落下的物体P，如以火车为参照系，则P的运行轨迹是一条垂直的直线；但如以大地为参照系，则P的运行轨迹为一条抛物线。然而，依据本章第1节中的相对性原理或平权性原理，这些方程在刻画质点P的运动上并没有本质的不同。然而，欧阳博士告诉惠子，选择火车为质点P的运动参照系则P的运动方程相对简单，为一条直线即一次方程。

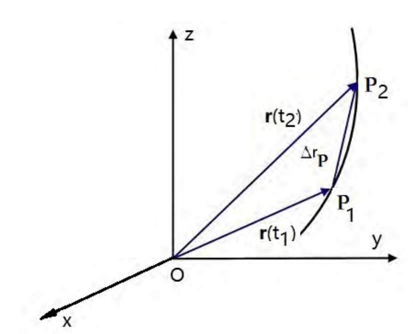


图4.24 运动位移

5.1.位移变化. 物体运动的一个本质在于空间位置的变化。一个质点P相对于参照系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$的运动是$P$在不同的时间位置向量$\mathbf{r}_P$或坐标的变化，见图4.24。设质点$P$在时刻$t_1$位于点$P_1$，坐标为$(x_1,y_1,z_1)$；时刻$t_2$位于点$P_2$，坐标为$(x_2,y_2,z_2)$，则质点$P$由时刻$t_1$到时刻$t_2$的位移定义为向量差

$$\Delta\mathbf{r}_P=\mathbf{r}_P(t_2)-\mathbf{r}_P(t_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1), \tag{4.50}$$

即向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，如图4.24所示。如果质点P的位移变化率是常向量$v_c=(c_x,c_y,c_z)$，即质点P在x-轴、y-轴和z-轴三个方向单位时间内的位移分别是常数c_x,c_y,c_z，则v_v、位移和时间三者间存在关系

$$v_c=\frac{\Delta\mathbf{r}_P}{t_2-t_1}=\left(\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1},\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1},\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}\right)=(c_x,c_y,c_z), \tag{4.51}$$

这里的v_c称为质点P的运动速度。但一般地，质点P在x-轴、y-轴和z-轴三个方向单位时间内的位移不是常数，又应怎样确定质点P位移的变化率或速度呢？欧阳博士告

诉惠子，这个问题可以这样思考，即将时间差$\Delta t = t_2 - t_1$逐渐缩小或是让时刻t_2无限的接近t_1，$t_2 \to t_1$。这样一来，质点P的位移差$\Delta \mathbf{r}_P$也会随着时刻t_2接近t_1而逐渐减小。当时间差Δt小到一定程度时，可以近似地认为质点P在Δt 这个时段上的位移变化是一个常向量。这样，采用微分取代等式(4.51)的位移和时间变化后就仍应当成立。故此，质点P在任一时刻t的速度定义为

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_P}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}_P = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (v_x, v_y, v_z)。 \tag{4.52}$$

这里，(x, y, z)是质点P在时刻t的坐标，$\dot{\mathbf{r}}_P = d\mathbf{r}_P/dt, \dot{x} = dx/dt, \dot{y} = dy/dt, \dot{z} = dz/dt$。对应的，由(4.33)式质点$P$的速度大小为

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}。 \tag{4.53}$$

例如，假设质点P的位置向量为$\mathbf{r}_P = (R\sin t, R\cos t, c)$，其中$R > 0$。则速度向量$\mathbf{v}(t) = (R\cos t, -R\sin t, 0)$，大小为$v(t) = \sqrt{(R\sin t)^2 + (-R\sin t)^2 + 0^2} = R$。

速度向量$\mathbf{v}(t)$不一定是常向量。那么，怎样刻画速度向量的变化呢？欧阳博士说，与引入速度向量的思想类似，即考虑速度向量$\mathbf{v}(t)$在时刻t和$t + \Delta t$的情形，让时间段$\Delta t \to 0$无限缩小。这样，当时间差Δt小到一定程度时可以近似地认为$\mathbf{v}(t)$在这个时段上的变化是一个常向量，采用

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}}(t) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \tag{4.54}$$

衡量速度向量$\mathbf{v}(t)$的变化，称为质点P的加速度，其大小为

$$a(t) = |\mathbf{a}(t)| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{x}^2}。 \tag{4.55}$$

这里，$\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt, \ddot{x} = d^2x/dt^2, \ddot{y} = d^2y/dt^2, \ddot{z} = d^2z/dt^2$。例如，对向量$\mathbf{r}_P = (R\sin t, R\cos t, c)$的质点$P$，其加速度$\mathbf{a}(t) = (-R\sin t, -R\cos t, 0)$且$a(t) = R$。

5.2.牛顿力学. 质点的位移变化是质点运动的外在“象”，没有揭示质点运动的原因。那么，为什么说万物运动是永恒的，引起物体运动变化的原因是什么？欧阳博士告诉惠子，为揭示物体运动的原因，牛顿力学引入了力$\mathbf{F}$和质量m这两个概念回答这一问题。那么，什么是力？力$\mathbf{F}$是物体间的相互作用，是一个有作用位置、有

大小和方向的向量；什么是质量？质量m是物体固有的量，等于物体密度乘以其体积，是度量物体惯性大小的一个量。例如，杠铃有一定的质量，在地球引力作用下形成重力，其方向向下。对应的，举重运动员单手举起杠铃必须克服重力而向上用力，且只有运动员向上的作用力大于杠铃自身重量的时候，才能成功举起杠铃，见图4.25。这里，无论是地球对杠铃向下吸引的引力，还是运动员向上的举重力，都是一种相互作用，而运动员举起杠铃则是这种作用的外在表现。



图4.25 力

(1) 基本定律. 牛顿力学的三个基本定律揭示了力与运动的关系，依次为：

第一定律.（惯性定律） 一个物体在未受到其他物体作用时将保持静止或匀速直线运动状态，这种性质称为物体的惯性。

第二定律. 物体受到外力$\mathbf{F}$作用时，物体所获得的加速度$\mathbf{a}$与外力大小成正比，与物体的质量m成反比且加速度的方向与外力的作用方向一致。

在适当选择力、质量和加速度的单位，如取质量m的单位为“千克（kg）”，加速度$\mathbf{a}$的单位为“米/秒^2（m/s^2）”，力的单位为“千克·米/秒^2（kgm/s^2）”，又称为“牛顿（N）”后，牛顿第二定理可以表示为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}。 \tag{4.56}$$

第三定律.（作用反作用定律） 两个物体间的相互作用力总是大小相等，方向相反且沿着同一条直线上相互作用。

例如，在图4.24中，运动员对杠铃的反作用力$-\mathbf{W}$与杠铃的重力$\mathbf{W}$大小相等但方向相反，均在一条与地球表面垂直的直线上。对应的，运动员的举重力$\mathbf{F}$ 作用在杠铃上，与杠铃重力方向相反。这样，运动员举起杠铃的条件是$|\mathbf{F}-\mathbf{W}|>0$，即举重力大于杠铃自身重量。注意，物体的重量是物体在此处受到的地球引力大小。设$k, k\geq 1$个质量分别为$m_1, m_2, \cdots, m_k$的物体在同一点受到的地球引力分别为$\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \cdots, \mathbf{W}_k$。由(4.56) 式，应有$\mathbf{W}_1 = m_1\mathbf{a}_1, \mathbf{W}_2 = m_1\mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{W}_k = m_1\mathbf{a}_k$。然而，经试验证实$|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = \cdots = |\mathbf{a}_k|$，其大小为$g = 9.80665m/s^2$，即

$$\left|\frac{\mathbf{W}_1}{m_1}\right| = \left|\frac{\mathbf{W}_2}{m_2}\right| = \cdots = \left|\frac{\mathbf{W}_k}{m_k}\right| = g = 9.80665\ m/s^2\ 。 \tag{4.57}$$

这样，一个质量为m的物体P重量为$|\mathbf{W}| = mg$。

当物体P作直线运动时，作用力与运动加速度都沿着直线方向，力与加速度的关系(4.55)可以写成标量形式$|\mathbf{F}| = m|\mathbf{a}|$或简化为$F = ma$。然而，当物体$P$作曲线运动时则不能这样简化。欧阳博士告诉惠子，这时可以建立法坐标系$\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$，设力$\mathbf{F}$沿坐标轴的分量为$\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z$，且为变量$x, y, z$及其微商和时间$t$的函数。由加速度的分量形式(4.54)，牛顿第二定律(4.56)可以写成力$\mathbf{F}$沿坐标轴的分量形式

$$\begin{cases} \mathbf{F}_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{x}, \\ \mathbf{F}_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{y}, \\ \mathbf{F}_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{z}, \end{cases} \tag{4.58}$$

称为质点动力学基本方程。这是一个二阶常微分方程组，未知函数为质点P的位置向量$\mathbf{r}_P(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3$或质点$P$的坐标$(x(t), y(t), z(t))$。这样，求解方程组(4.58)就可得知质点$P$的运行轨迹。



图4.26 自由落体运动

例如，对一个质量为m的质点P无初速地从空中竖直落下，以初始位置为原点O，向下为正建立坐标系$\{O; x\}$，见图4.26。那么，怎样确定质点P的运动轨迹呢？欧阳博士解释说，首先，假设没有空气阻力，即P在真空中自由落下，初速度$v_0 = 0$。由方程(4.58)，此时质点P的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg, \\ x(0) = 0, \ \ \dot{x}|_{t=0} = 0。 \end{cases}$$

对方程中的第一式直接积分，有$x(t) = mgt^2/2 + c_1 t + c_2$。这里，$c_1, c_2$为常数。由初始条件$x(0) = 0, \dot{x}|_{t=0} = 0$知常数$c_2 = 0, c_2 = 0$。故有$x(t) = gt^2/2$。

其次，考虑空气阻力。假设空气阻力与与下落速度成正比，阻力系数为k，则质点P下落时受到空气阻力为$-mk\dot{x}$。由方程(4.58)，质点P下落的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - mk\dot{x}, \\ x(0) = 0, \ \ \dot{x}|_{t=0} = 0。 \end{cases}$$

设$\dot{x} = u + g/k$，则方程第一式简化为$\dot{u} + ku = 0$，即$du/u = -kdt$。对此式积分有$\ln|u| = -kt + c$，$u = c_1 e^{-kt}$。这里，$c, c_1 = e^c$ 为常数。这样，有$\dot{x} = c_1 e^{-kt} + g/k$。由初始条件$\dot{x}|_{t=0} = 0$，知常数$c_1 = -g/k$。故有

$$\dot{x} = -\frac{g}{k}e^{-kt} + \frac{g}{k} = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)。 \tag{4.59}$$

对(4.59)再积分，有

$$x(t)=\frac{g}{k}t+\frac{g}{k^2}e^{-kt}+c_2,$$

其中c_2为常数。根据初始条件$x(0)=0$，知常数$c_2=-g/k^2$，即一般地有

$$x(t)=\frac{g}{k}t-\frac{g}{k^2}\left(1-e^{-kt}\right)。$$

对一个匀速圆周运动的质点P，利用弧长与弧角的关系，即弧长L等于弧角θ与半径R乘积$R\theta$，可知角速度$\omega=\theta/t=2\pi/T$，线速度$v=2\pi R/T$。这里，T 为运动的周期。这样，线速度$v=R\omega$。为确定线速度的方向，类似于质点曲线运动，让时间间隔$\Delta t\to 0$，则Δv 指向圆心，即为向心速度，如图图4.27所示。这样，对一般情形的圆周运动有向心速度$dv=vd\theta$，向心加速度$a(t)=\dot{v}=v\dot{\theta}=v\omega=v^2/R$。从而，质量为$m$的质点，其向心力$\mathbf{F}$的大小为

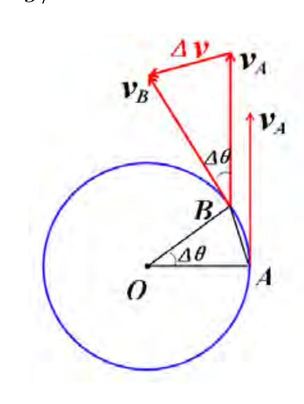


图4.27 圆周运动

$$F=ma(t)=\frac{mv^2}{R}。\tag{4.60}$$

(2) 保守力场. 一个力$\mathbf{F}$作用于物体P上，使得P产生了$\Delta\mathbf{r}$的位移，这一作用效果可以用功W的大小衡量，即

$$W=\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}=|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta。\tag{4.61}$$

这里，θ为$\mathbf{F}$作用方向与位移$\Delta\mathbf{r}$方向的夹角。一个物体具有作功的能力称其为具有能，包括动能和势能两种。其中，动能$\mathcal{T}$ 是因物体有一定速度而具有的能量。一个质量为m、速度为v的质点的动能为$\frac{1}{2}mv^2$；势能V是因物体间的相对位置发生变化所具有的能量。一个质点P所具有的动能和势能的和称为机械能E。

如果一个力$\mathbf{F}$作功仅与其位置有关，与中间路径无关，则称$\mathbf{F}$为一个保守力，其对应的场称为保守场。这时，存在一个势函数$\mathcal{V}$使得$\mathbf{F}=\mathcal{V}(x_0,y_0,z_0)-\mathcal{V}(x_1,y_1,z_1)$。这里，$(x_0,y_0,z_0)$和$(x_1,y_1,z_1)$为$\mathbf{F}$作功，质点$P$的始点、终点坐标。例如，在地球上，把质点$P$从高度$z_1$举到$z_2$，举重力对$P$作的功为$-mg(z_2-z_1)$，即标量函数$mgz$的减少，即保守力对一个质点作的功等于质点位置上的标量函数$\mathcal{V}$的减少。现在，设质点P的质量为m，受到一个保守力$\mathbf{F}$的作用，且P在始点、终点的速度分别为v_0,v_1。注意，$\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}=vdv$，由牛顿第二定律，有

$$m\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}\ \Rightarrow\ m\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}}\ \Rightarrow\ m\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}},$$

即

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}。 \tag{4.62}$$

注意，力$\mathbf{F}$是保守力，与中间路径无关。对(4.61)式积分，有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \mathcal{V}(x_0,y_0,z_0) - \mathcal{V}(x_1,y_1,z_1),$$

即
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \mathcal{V}(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 + \mathcal{V}(x_1,y_1,z_1) = E \tag{4.63}$$

是个常数，称为机械能守恒定律。

(3) n**-体问题.** 欧阳博士告诉惠子，牛顿力学的一个主要应用领域是确定行星运行轨迹。宇宙中，质量分别为m_1, m_2 的两个物体P_1, P_2间存在引力，其大小与它们质量的乘积成正比，与它们距离的平方成反比，即引力$F = G\cdot m_1\cdot m_2/r^2$，这就是牛顿的万有引力定律。其中，$G = 6.67\times 10^{-11}N\cdot m^2/kg^2$为引力常数，$r$为物体间的距离。天体运行中，相比于行星引力，其他作用均微不足道，可以假设行星之间的作用力主要为引力。那么，在三维空间$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$中，对任意整数$i$，$1\le i\le n$，给定$n$个行星的初始位置$\mathbf{r}_{P_i}(t_0)$、速度$\mathbf{v}(t_0)$和质量$m_i$，怎样得到这$n$个行星$P_i$在后续某一时间$t$的运动状态呢？这就是天体力学中著名的$n$-体问题。实际上，对第$i$个行星应用牛顿第二定律和万有引力定律，可以得到微分方程

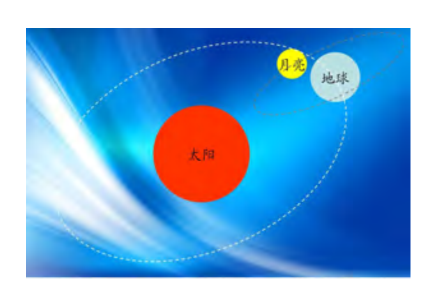


图4.28 3-体问题

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_{P_i} = \sum_{j\ne i}\frac{Gm_im_j\left(\mathbf{r}_{P_j}-\mathbf{r}_{P_i}\right)}{\left|\mathbf{r}_{P_j}-\mathbf{r}_{P_i}\right|^3},$$

其中，$\mathbf{r}_{P_i}$和m_i分别为第i个行星的位置向量和质量，$1\le i\le n$。这样，n-体问题对应的就是微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\ddot{\mathbf{r}}_{P_i} = \sum\limits_{j\ne i}\dfrac{Gm_j\left(\mathbf{r}_{P_j}-\mathbf{r}_{P_i}\right)}{\left|\mathbf{r}_{P_j}-\mathbf{r}_{P_i}\right|^3},\\ \mathbf{r}_{P_i}\big|_{t=t_0} = \mathbf{r}_{P_i}^0,\ \dot{\mathbf{r}}_{P_i} = \mathbf{r}_{P_i}^1,\ 1\le i\le n。\end{cases} \tag{4.64}$$

一般性的求解方程组(4.64)的解析解是十分困难的，人们至今除了一些特殊情形外，还没有得到$n=3$的解析解，更不用说$n>3$的情形了。对于2-体问题，上面的方程组(4.64)为

$$\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} = \frac{Gm_2\left(\mathbf{r}_{P_2}-\mathbf{r}_{P_1}\right)}{\left|\mathbf{r}_{P_2}-\mathbf{r}_{P_1}\right|^3},\quad \ddot{\mathbf{r}}_{P_2} = \frac{Gm_1\left(\mathbf{r}_{P_1}-\mathbf{r}_{P_2}\right)}{\left|\mathbf{r}_{P_1}-\mathbf{r}_{P_2}\right|^3}。 \tag{4.65}$$

设$\mathbf{r}=\mathbf{r}_{P_2}-\mathbf{r}_{P_1}$，则由方程(4.65)有

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_{P_2}-\ddot{\mathbf{r}}_{P_1}\\ &= \frac{Gm_1\left(\mathbf{r}_{P_1}-\mathbf{r}_{P_2}\right)}{\left|\mathbf{r}_{P_1}-\mathbf{r}_{P_2}\right|^3}-\frac{Gm_2\left(\mathbf{r}_{P_2}-\mathbf{r}_{P_1}\right)}{\left|\mathbf{r}_{P_2}-\mathbf{r}_{P_1}\right|^3}\\ &= -G\left(m_1+m_2\right)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},\end{aligned}$$

即

$$\ddot{\mathbf{r}}=-G\left(m_1+m_2\right)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}。\tag{4.66}$$

这样，可以先求出方程(4.66)的解析解$\mathbf{r}$，代入方程(4.65)而得到$\mathbf{r}_{P_1}$和$\mathbf{r}_{P_2}$的方程

$$\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} = Gm_2\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},\quad \ddot{\mathbf{r}}_{P_2} = -Gm_1\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}。\tag{4.67}$$

对(4.67)式分别积分，就有

$$\mathbf{r}_{P_1}(t)=Gm_2\int\left(\int\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}dt\right)dt,\quad \mathbf{r}_{P_2}(t)=-Gm_1\int\left(\int\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}dt\right)dt。\tag{4.68}$$

这样，就得到了2-体问题的解析解。

那么，对于一般的n-体问题，怎样得到其解呢？欧阳博士告诉惠子，按照经典的方程求解观念，一般性的求解方程组(4.64)的解析解是一件几乎不可能完成的事情，需要换一个角度思考这个问题。注意，n个行星间引力的组合结构是完全图K_n，n-体问题的解需要对每个顶点$v\in V\left(K_n\right)$的标号。图4.28中的太阳、地球、月亮构成地日月系统，其引力关系即3-体问题，对应的标号图K_3^L见第3章图3.16(a)。

注意，力的作用是独立的，即由几个力作用于同一个物体上所产生的加速度等于每一个单独力作用于该物体上产生的加速度的向量和，称为*力的独立作用定律*。按照这一定律，引力具有可加性，作用在第i个行星上的引力等于其他每个行星作用于其上的引力和。类似地，向量也具有可加性，$\mathbf{r}_{P_i}$为其他每个行星作用于其上的引力确定的$\mathbf{r}_{P_i}$位置向量和。采用用符号表示，即

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i &= \mathbf{F}_1+\cdots+\mathbf{F}_{i-1}+\mathbf{F}_{i+1}+\cdots+\mathbf{F}_n,\\ \mathbf{r}_{P_i} &= \mathbf{r}_{P_1}+\cdots+\mathbf{r}_{P_{i-1}}+\mathbf{r}_{P_{i+1}}+\cdots+\mathbf{r}_{P_n}。\end{aligned}\tag{4.69}$$

故可对n-体问题分解，将其他行星作用于行星v的引力分解为$n-1$个2-体问题$\{v,u_1\}$，$\{v,u_2\},\cdots,\{v,u_{n-1}\}$。这样，利用2-体问题的解可得到点$v_i$的位置向量

$$\mathbf{r}_{P_i}(t)=G\sum_{j\neq i}m_j\int\left(\int\frac{\mathbf{r}_{ji}}{\left|\mathbf{r}_{ji}\right|^3}dt\right)dt。\tag{4.70}$$

这里，i为整数，$1 \leq i \leq n$，$\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_{P_j} - \mathbf{r}_{P_i}$，$j \neq i, 1 \leq j \leq n-1$。

(4) 宇宙速度. 研究n-体问题的目的，在于把握天体运行规律，进而服务于人类社会。然而，欧阳博士告诉惠子，一般性的求解n-体运动方程(4.64)是一件十分困难的事情，这再次表明了人类认识上的局限性或是宇宙中始终存在人类不可认知领域。然而，即便仅对2-体问题完全求解，已使人类可以模拟小型天体运行，发射自己的卫星服务于生产和生活实践。这当中的一个基本问题，是确定发射人造卫星时，卫星需要多大的初始速度，即初始速度多大时可以绕着地球旋转，多大时可以摆脱地球束缚而绕着太阳旋转，又需要多大时可以摆脱太阳的束缚而飞出太阳系，分别称为第一宇宙速度v_1、第二宇宙速度v_2和第三宇宙速度v_3，见图4.29。这一问题等同于在地球表面上的某一点依水平角α，速度$v_i, 1 \leq i \leq 3$发射一个质量为m的物体P。那么，怎样确定第一、第二和第三宇宙速度$v_i, 1 \leq i \leq 3$ 的大小呢？

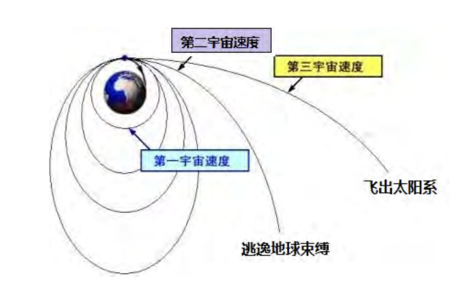


图4.29 飞向太空

首先，卫星在距地面h高处绕地球旋转是在作圆周运动，所需的向心力由万有引力提供。这样，由(4.59)式知

$$\frac{mv^2}{R+h} = G\frac{mm_{earth}}{(R+h)^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Gm_{earth}}{R+h}}。 \tag{4.71}$$

这里，$R = 6400km$为地球半径，$m_{earth} = 5.965 \times 10^{24}kg$为地球质量。注意，卫星一般在近地空飞行，$h$远小于$R$，即$h \ll R$。故可以近似地用$R$取代$R+h$。这样，在(4.71)式中代入数值计算，有

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_{earth}}{R}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.965 \times 10^{24}}{6.4 \times 10^6}} \approx 7.9km/s,$$

这就是第一宇宙速度。

对于第二宇宙速度v_2的计算，假设卫星发射后，其产生的动能可以脱离地球引力，飞到无穷远处。这样就有

$$\frac{1}{2}mv_2^2 \geq \int_{x=R}^{\infty} \frac{Gmm_{earth}}{x^2}dx = \frac{Gmm_{earth}}{R},$$

即，

$$v_2 \geq \sqrt{\frac{2Gm_{earth}}{R}} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{Gm_{earth}}{R}} = \sqrt{2}v_1。$$

代入$v_1 = 7.9km/s$计算，知第二宇宙速度$v_2 = \sqrt{2}v_1 = 11.2km/s$。

对于第三宇宙速度v_3，先计算在地球上发射卫星并脱离太阳引力需要多大的发射速度。这实际上是第二宇宙速度计算中，将m_{earth}替换为太阳质量m_{sun}，地球半径R替换为地球与太阳的距离R'计算。已知太阳质量是地球的333400倍，地球绕太阳轨道半径的平均值约为地球半径的23400倍。这样，由第二宇宙速度的计算知第三宇宙速度应满足

$$\frac{1}{2}mv_3^2 \geq \frac{Gmm_{sun}}{R'} \quad \Rightarrow \quad v_3 \geq v_2\sqrt{\frac{m_{sun}R}{mR'}} = 11.2 \times \sqrt{\frac{333400}{23400}} \approx 42.27km/s$$

的条件，这是一个相当大的发射速度。然而，注意到地球公转速度为$29.8km/s$，如选择卫星发射方向与地球公转一致，则可以减少发射速度为$42.27-29.8 = 12.47km/s$。同时，从地球上发射卫星还要摆脱地球的引力作用，即发射的初始速度满足

$$v_3^2 - \frac{2Gm_{earth}}{R} \geq 12.47^2 \quad \Rightarrow \quad v_3 \geq \sqrt{2\times 7.9^2 + 12.47^2} \approx 16.7km/s,$$

即$v_3 \geq 16.7km/s$即可摆脱太阳引力的束缚，这就是第三宇宙速度。

5.3.时长膨胀. 坐标系作为度量事物变化的基准，本章第1节中的坐标变换，是假设一个坐标系在另一个坐标系中的原点O和坐标轴方向是固定的，进而确定同一个点P在两个坐标系中的坐标，即相互间的坐标变换关系(4.16)，那是一种线性关系。然而，运动是永恒的，原点和坐标轴方向的固定仅是一种相对固定。如果一个坐标系相对另一个坐标系是运动的，怎样确定它们坐标之间的变换关系呢？欧阳博士让惠子思考。例如，设$\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$在坐标系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$中沿着$x$-轴方向以速度$v$作匀速直线运动，如图4.30所示。那么，应当怎样确定坐标系$\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$中的点$(x',y',z')$在$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$中的坐标呢？假设人们可以同时测量质点$P$在坐标系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$和$\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$中的坐标，这个问题可以这样考虑，在时刻$t$，质点$P$在两个坐标系中有$y'=y, z'=z$。由于$P$沿$x$-轴方向运动，坐标值$x$由两部分组成：一是$P$在$\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$中的坐标$x'$；二是坐标系$\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$原点$O'$在$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$中的坐标，即其运动平移的距离$vt$。这样，有$x = x'+vt$。故在时刻$t$，质点$P$在坐标系$\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$中的坐标为

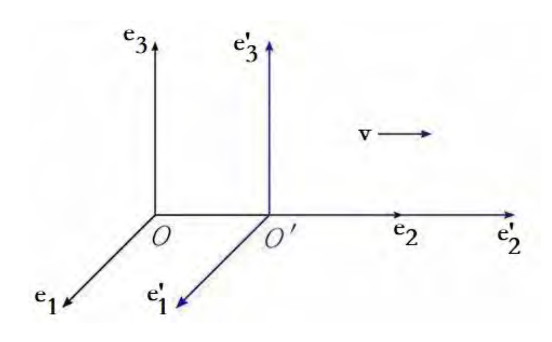


图4.30 坐标系运动

$$x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z。 \tag{4.72}$$

如果两个坐标系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$、$\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$仅是空间位置上的差异，这样的计算无疑是正确的。但在一个运动的坐标系$\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$中，怎样保证测量的时间

相同，又怎样保证测量出的长度在两个坐标系中是相等的呢？欧阳博士问惠子听没听过“天上一日地上一年”这个说法，惠子回答说：“听过！《西游记》中有这样的说法。”欧阳博士进一步提示说：“这是不是意味着天上的时钟比地上的时钟要走得满些呢？”惠子想了想说：“好像是这样的，爸爸！”停顿了一下，惠子反问欧阳博士：“可这样一来，人在天上不是要比在地上长寿吗？比如，把一个宇航员送上太空，在天上生活两个月，两个月后他回到地球上，相当于在地上生活了60年，不是比他的小女儿还要年轻吗，这怎么可能呢！”欧阳博士告诉她，小说这样写是表明天宫生活与人世间的差别。实际上，时间测量的长短与时钟的运行速度有关，即把时钟看作质点运动，它运行得越快测得的时间越慢，这个现象称为时间的膨胀效应。例如，地球上时钟的运行速度随地球公转为$29.8km/s$，测量出的时间是地球时间。此外，即便是在地球上两个不同地点放置两个时钟，且其中一个时钟在运动，也实现不了时间测量的一致性，因为测量结果是时钟上显示的时间在人眼中的反映，传递媒介是光，在真空中的速度为$c\approx 3\times 0^5km/s$，其传递与接收存在时间差，这是造成时间膨胀的原因。类似地，长度也存在这种膨胀效应，即时间或长度仅是相对于选定的参照系中的产物。一般地，对运动中的坐标系，质点P的相对坐标并非由(4.72)式确定，而是

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\tag{4.73}$$

称为洛伦茨变换，即长度和时间的膨胀与系数$\sqrt{1-(v/c)^2}$有关。这里，v为P的运行速度。那么，为什么人们在生活中感知不到长度或时间的膨胀呢？因为生活中的物体运行速度v远小于光速，即$v\ll c$可以忽略不计，得到(4.72)的计算结果。

为进一步启发惠子对人类认知相对性的理解，欧阳博士问她：“你在学校有没有感觉过，有时时间过得特别慢，有时又过得特别快？”惠子回答说：“有过！老师讲课枯燥，我不感兴趣时就觉得时间太慢，盼望着早一点下课。而课下与同学们一起做游戏时又觉得时间过得太快，不一会儿上课铃就响了。爸爸，这是不是时间膨胀效应呢？”欧阳博士告诉她，这种情形属于她自己的心理作用而不是时间膨胀，类似感知与个人的喜好有关而不是一种客观的时光流逝。

第6节 注释与评论

6.1. 人认知万物是经由对万物的特征进行刻画，以对事物特征向量或“名”的把握为对事物的认知，需要在一个固定的参照系中进行。一般地，在线性空间，特

别是笛卡尔坐标系中刻画一件事物的发展相对简单，见文献[Hok]、[Qiu]和[Zho]。但不同的人视角不同，参照系不同得到刻画事物特征向量的形式不同。这种刻画形式的不同是由参照系不同造成的，并非事物的本来面目。那么，怎样解决参照系不同导致的特征向量形式上的不同呢？这就是爱因斯坦的广义相对论，即描写一个客观事物发展规律的方程式应当在所有的坐标系中具有相同的表现形式，见文献[Car]、[Ein1]-[Ein2]和[Fei]等，因为客观事物的发展规律不因人构建的参照系不同而不同，即不同参照系得出的不同方程式是人为形式的不同，并非事物真实。广义相对论提出后，人们纷纷效法爱因斯坦，调整已有物理定律为协变形式，这是需引以重视的一个问题，即要求方程形式不变的实质是在坐标系变换下方程的数学形式为一个不变量，并非客观事物规律。这样，对刻画一件客观事物发展规律而言，无论是哪种参照系得到的方程式内涵都应是事物发展规律，并非一定要局限在协变形式，这就是文献[Mao52]中提出平权性原理的意义所在。

6.2. 有限维线性空间生成基中的元有限。这样，与一般的线性代数教程中证明线性空间的维数公式(4.41)不同，采用容斥原理，可以由有限维线性空间生成基构成的集合发现并得到这个公式，更具有启发性。

6.3. 牛顿力学是在笛卡尔坐标系下刻画宏观物体的低速运动规律，见文献[New1]-[New2]和[Zhy]。这当中，要求物理方程在洛伦茨变换下不变即是爱因斯坦的狭义相对论。注意，牛顿力学中的“低速”和“宏观”条件表明，牛顿力学是在局部地刻画物体运动，包括牛顿万有引力定律。但人在认知上的局限性更愿意接受并应用这种局部规律，因其与人的感知一致，这也是为什么在地面发射卫星时，人们仍习惯于用牛顿万有引力定律而非爱因斯坦引力场方程计算宇宙速度的原因。

第5章
系统识物

****

万物各有役，无心独风云；
遂令幽居客，日与山云亲；
植桂比芳操，佩兰思洁身；
何必濯於水，本无缨上尘。

— 宋.欧阳修《送朱生》

************************** 毛林繁. 万物组合论 **************************

第1节 系统认知

宇宙万物不是孤立存在而是相互依存、相互联系的，需要采用整体观或系统观认知万物。这时，惠子已养成独立思考的习惯，对盲人摸象寓言中，为什么分别摸到大象的腿、尾巴、鼻子、耳朵、肚子和牙齿的盲人形容大象的样子像一个柱子、绳子、树枝、蒲扇、墙或管子的认知不正确仍有疑惑，欧阳博士告诉她，盲人用手触摸大象身体对大象形状的认知不正确的原因，在于盲人的认知是局部认知，而那位智者告诉那盲人的，即大象的形状应当是他们每个人对大象形状认知的总和则是对万物的系统或整体认知。

对万物认知的实质是寻求因果关系，即由事物表象“果”到事物基元、组合结构、动态规律“因”的溯源，进而把握事物行为，包括物理认知和事理认知两大类，其核心在于对事物行为的刻画。注意，对事物系统认知的实质，是在微观层面，即基元上寻找“事因”。万物的系统认知，是将一件事物等同于由内蕴一个空间组合结构的基元组成的系统，这由万物的物理组合上看无疑是正确的，因为宇宙万物由基本粒子组合而成。但是，构成系统的基元一定是物理组合中的基本粒子吗？欧阳博士告诉惠子，答案是否定的！这一点至少已在人类研究生物系统中得到证实，因为生物的基元是细胞和基因或生物大分子DNA片段，即基本粒子的组合物而不单是基本粒子本身。从人类认知万物的需求看，系统认知应当更符合人类的认知需要，因为系统的基元可以视人的认知需要而选择，进而逾越在认知基本粒子中不确定性的那条鸿沟。例如，人类通过解剖研究，对牛消化的认知是一种对其从进食、反刍、吸收与排泄的系统认知，如图5.1所示。

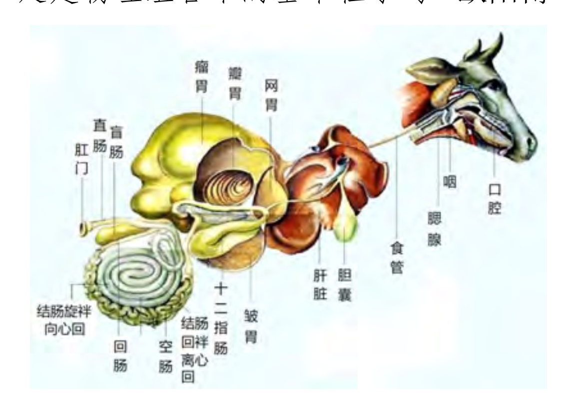


图5.1 牛消化系统

1.1.系统特征. 系统是认知万物的一个重要概念，大到宇宙万物，小到河里一粒沙子，都是系统，包括与系统外没有能量、信息等交换的封闭系统和系统行为受外界影响的开放系统等两类。欧阳博士告诉惠子，人类讨论的所有系统都应该是开放系统，因为都是万物系统中的子系统。这也正是人类对事物的认知是局部认知的表现。那么，什么条件下可以采用封闭系统认知事物行为呢？欧阳博士告诉惠子，只有当其他事物及外部环境对该事物行为的影响或作用极小，可以忽略不计时才能采用，即用封闭系统认知事物是一种近似而不一定是事物本真。正因为此，人类认知

万物在大多数情形采用开放系统模型，有一定输入，即其他相关事物和外部环境对该事物的作用；有一定输出，即外部可观测的情形，如图5.2所示。

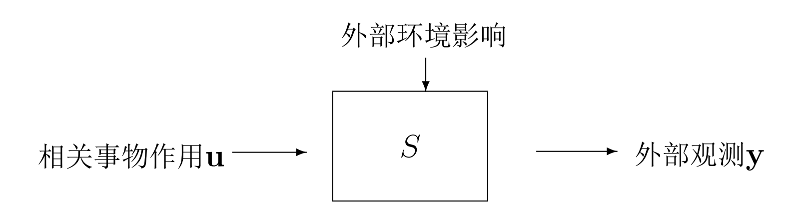


图5.2 系统输入与输出

注意，如果在图5.2中将系统S看作一个“黑箱”，即不考虑系统S基元间的作用而仅依赖于相关事物作用$\mathbf{u}$、外部环境影响和外部观测结果$\mathbf{y}$把握系统S的变化行为，所建立的理论就是第2章讨论的“唯像理论”。人们一般是希望在完全知晓S内部基元作用的基础上把握系统S行为，这在万物认知中只能是一种理想状态，只能是人类对某一自然系统的模拟、仿真，即人工系统。

欧阳博士告诉惠子，一个系统S可以抽象定义为：①S由一组元素构成，$|S|\geq 2$；②S中的元素按规则R 相互联系和作用；③S具备人类可感知的某一功能表象，则称S为一个系统，S中的元素为系统的基元。注意，系统的抽象定义可以进一步形象化为一个标号图$G^L[S]$，即

$$V\left(G^L[S]\right)=\{\ v\mid v\in S\},\ \ E\left(G^L[S]\right)=\{\ (v,u)\mid (v,u)\in R\},$$
$$L: v\in S\rightarrow v,\quad (v,u)\rightarrow v\overset{R}{\sim}u。\tag{5.1}$$

一般地，如果基元v对u作用可以量化，引入作用函数$f(v,u)$，则在标号图$G^L[S]$的边标号中，用$f(v,u)$取代$v\overset{R}{\sim}u$，如图5.3所示。这样一来，一个系统S就等同于一个标号图$G^L[S]$。相应地，对万物的系统认知也就等同于两种情形，一是对系统标号图$G^L[S]$自身动态行为的刻画；二是在外界作用下系统标号图$G^L[S]$的动态行为，即动力学刻画。

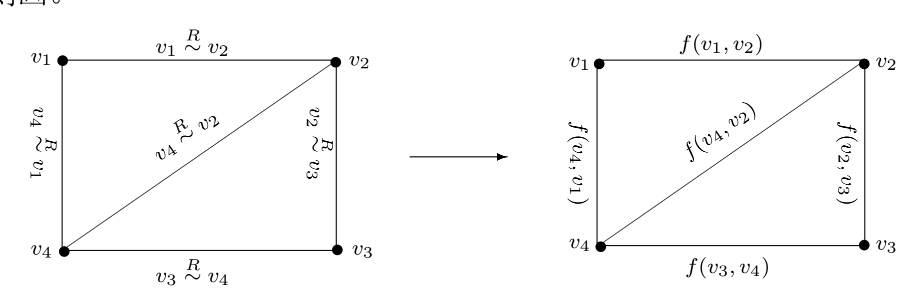


图5.3 系统标号图

一个系统S的特征主要体现在三个方面：①系统是由一组基元组成，这些基元

可以是微观粒子、细胞，也可能其相对较高一级系统时是一个子系统，但其通常又是较低一级基元构成的系统。一般地，人类认知一件事物M，选择的观测或研究基点不同，直接影响着观测结果是孤立行为还是一个系统行为。当观测者站在M的外部，从宏观视角观测M的行为时，仅能观测到事物M的外在表现或行为。至于M的内部结构与联系，则只能凭借人的大脑假设或推断。此时，对事物M可以抽象为一个点或基元进行研究；但如果观测者站在事物M的内部，从微观视角观测M的行为时，M的内部结构展现在观测者眼前，即M自身内蕴了一个组合结构需要研究。这时，基元相对于内部便成了子系统。例如，人体系统由运动子系统、神经子系统、内分泌子系统、循环子系统、呼吸子系统、消化子系统、泌尿子系统、生殖子系统等八大系统构成；②系统有一定的内蕴组合结构。一个系统是其构成基元的集合，基元之间相互联系、相互制约，有一定的组织秩序及失控关系的内在表现形式，即系统的内蕴结构$G^L[S]$。例如，图3.3给出的大象外形树状结构，以及图3.24所示强子的内蕴组合结构等，这种内蕴结构反映了基元间的相互影响、相互作用，决定着系统的状态；③系统整体功能或目的性。这里，功能指系统与外部环境相互联系和作用中展现出来的性质、能力和功用。注意，系统的整体功能是基元组合成为这个系统时才有，否则不具有系统的功能与表征。例如，人体虽然由运动子系统、神经子系统、内分泌子系统、循环子系统、呼吸子系统、消化子系统、泌尿子系统、生殖子系统等八大系统构成，但只有这些子系统按照人的系统结构构成一个人时才具有人的特征，如人独有的创造意识等。否则，虽然这八大系统可以组合成一个活体，但那只能称为一个动物而不是一个人。

系统既然是由基元组合而成。那么，对基元行为及其组合结构变化的认知，是把握系统行为，进而由系统表象溯“因”的基本思想。

1.2.系统基元. 对系统基元的认知，一般是忽略其内部构成和结构，抽象为空间中的一个点认知，以相应特征构成的向量进行标定，类似于质点，见图5.4。这里，符号$t_1, t_2, \cdots, t_s$表示基元v的性质或特征。例如，基元v的位置、质量、速度、电荷、自旋角动量、同位旋等物理性质，酸碱性、可燃性、稳定性、氧化性、腐蚀性等化学性质，以及生长、生殖、新陈代谢、遗传与变异等生物特征。那么，怎样刻画一个基元的行为呢？一般地，人们用显函数$f(t_1, t_2, \cdots, t_s)$刻画基元v的变化，把握其变化行为，即有等式

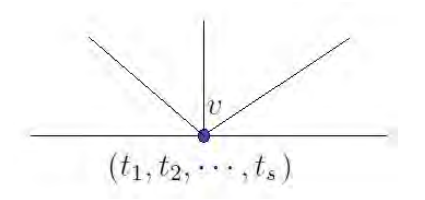


图5.4 基元点

$$v(t_1, t_2, \cdots, t_s) = f(t_1, t_2, \cdots, t_s) \text{ 。} \tag{5.2}$$

例如，基元v在平面$\mathbb{R}^2$上沿直线$f(t) = 3t+2$运动或在3-维空间$\mathbb{R}^3$中沿曲面$f(t_1, t_2, t_3)$

$= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_1t_2 + t_2t_3$运动等。但一般地，直接得到$f(t_1, t_2, \cdots, t_s)$十分困难，因为人们对基元$v$ 的行为刻画依赖于观测数据，只能就观测数据进行模拟与推演。而且，欧阳博士告诉惠子，对基元特征$t_i, 1 \le i \le s$的观测量是一个相对量，即特征的差值Δt_i变化而非绝对量。同时，观测结果是一些离散数值。这样一来，无论采用哪一种方法模拟基元t_i的变化规律，都只能是一种近似刻画，需要事先假设基元v的变化满足一定的数学条件，可以采用相应的数学方法得到模拟函数$v(t_1, t_2, \cdots, t_s)$。一般地，对等式(5.2)的两侧相对于特征t_i求偏微分，得到隐式方程

$$\frac{\partial}{\partial t_i} v(t_1, t_2, \cdots, t_s) = h\left(\frac{\partial v}{\partial t_1}, \frac{\partial v}{\partial t_2}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial t_s}\right)。 \tag{5.3}$$

这样，基元v的变化$v(t_1, t_2, \cdots, t_s)$对应于一阶偏微分方程上的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t_i} v(t_1, t_2, \cdots, t_s) = h\left(\dfrac{\partial v}{\partial t_1}, \dfrac{\partial v}{\partial t_2}, \cdots, \dfrac{\partial v}{\partial t_s}\right), \\ v|_{t=t_0} = v_0,\ 1 \le i \le s。 \end{cases} \tag{5.4}$$

类似地，等式(5.2)的两侧对t_i求二阶偏微分，可以得到基元v的变化对应的二阶偏微分方程上的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t_i^2} v(t_1, t_2, \cdots, t_s) = g\left(\dfrac{\partial v}{\partial t_1}, \dfrac{\partial v}{\partial t_2}, \cdots, \dfrac{\partial v}{\partial t_s}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial t_1^2}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial t_2^2}, \cdots, \dfrac{\partial^2 v}{\partial t_s^2}\right) \\ v|_{t=t_0} = v_0,\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial t_i}\right|_{t=t_0} = v_{i1},\ 1 \le i \le s。 \end{cases} \tag{5.5}$$

例如，假设基元v是一个微观粒子场，其变化$v(\mathbf{r}, t)$遵循场$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, 0)e^{-i\omega t}$的变化规律。这当中，$\mathbf{r}$为$v$的位置矢量，$\omega$为频率。对时间$t$求微分，则有

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi(\mathbf{r}, 0)(-i\omega)e^{-i\omega t} = -i\omega\left(\psi(r, 0)e^{-i\omega t}\right) = -i\omega v。$$

这样，基元v的变化对应于一阶偏微分方程上的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = -i\omega v \\ v(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \psi(\mathbf{r}, 0)。 \end{cases} \tag{5.6}$$

而微观粒子场中能量E与频率ω间的关系是$E = \hbar\omega$。这里，$\hbar$是普朗克常数。则有

$$Ev = -i\hbar(-i\omega\psi) = -i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar\frac{\partial v}{\partial t}。 \tag{5.7}$$

现在，(5.7)式两侧对t_i求微分，并应用(5.6)式就有

$$i\hbar^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + E^2 v = 0。$$

这样一来，初值问题(5.5)等价于二阶偏微分方程上的初值问题

$$\begin{cases} i\hbar^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}+E^2v=0 \\ v(r,t)|_{t=0}=\psi(\mathbf{r},0),\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi'(\mathbf{r},0)。\end{cases} \tag{5.8}$$

现在的问题是，欧阳博士告诉惠子，我们并不知道显函数$v(t_1,t_2,\cdots,t_s)$，仅是在假设$v(t_1,t_2,\cdots,t_s)$具有的形式上推算，且需由观测结果确定(5.4)或(5.5)式中的

$$h\left(\frac{\partial v}{\partial t_1},\frac{\partial v}{\partial t_2},\cdots,\frac{\partial v}{\partial t_s}\right),\quad g\left(\frac{\partial v}{\partial t_1},\frac{\partial v}{\partial t_2},\cdots,\frac{\partial v}{\partial t_s},\frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2},\frac{\partial^2 v}{\partial t_2^2},\cdots,\frac{\partial^2 v}{\partial t_s^2}\right),$$

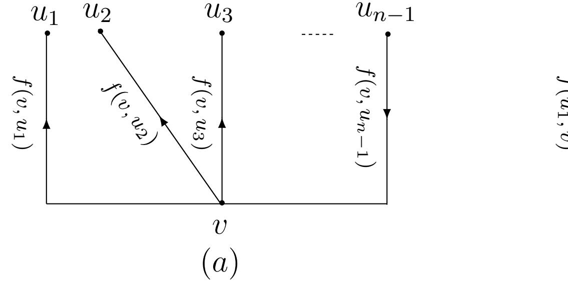
即建立微商

$$\frac{\partial v}{\partial t_1},\frac{\partial v}{\partial t_2},\cdots,\frac{\partial v}{\partial t_s}\text{或}\frac{\partial v}{\partial t_1},\frac{\partial v}{\partial t_2},\cdots,\frac{\partial v}{\partial t_s},\frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2},\frac{\partial^2 v}{\partial t_2^2},\cdots,\frac{\partial^2 v}{\partial t_s^2}$$

之间的关系，构建方程(5.4)或(5.5)。接下来的问题，是想办法求解方程(5.4)或(5.5)，得到函数$v(t_1,t_2,\cdots,t_s)$的表示式。

1.3.系统结构. 人类对系统S的认知中，将基元抽象为空间中的一个点。对应的，系统结构就是嵌入空间中的一个标号图$G^L[S]$。这里，G为基元间的组合结构，L为对G的顶点和边的标号映射。忽略标号图$G^L[S]$上的标号，得到的是一个抽象图G，即基元的组合结构。例如，完全图K_n，完全二部图$K(n,m)$，圈C_n 等。这里，$n=|G|$。

那么，怎样确定一个系统S的组合结构G^L呢？欧阳博士告诉惠子，系统S内蕴的组合结构$G^L[S]$由基元间的作用，即基元v作用于基元u上的作用函数$f(v,u)$决定。实际上，基元间的组合关系有两种表示方法：一种是抽象图G，即基元v与基元u间有作用关系$f(v,u)$或$f(u,v)$，则有边$(v,u)\in E(G)$或$(u,v)\in E(G)$；另一种方法是借助于作用函数$f(v,u)$和$f(u,v)$，采用完全图K_n，$n=|G|$表示，即K_n^L中去掉标号为$\mathbf{0}$的边得到的标号图就是G^L，如图5.5所示。这当中，(a)是基元v的变化对其他基元$u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$的变化影响，(b)是其他基元$u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$的变化对基元v的变化影响示意，且$f(v,u_i)\neq\mathbf{0}$或$=\mathbf{0}$，$1\leq i\leq n-1$。



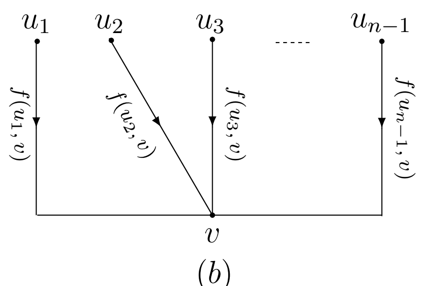


图5.5 基元作用图

采用第二种表示方法不用再纠结G的具体结构，可以统一假设系统内蕴的组合结构为K_n。这里，n为系统中基元的个数。

确定系统S组合结构的核心，在于确定任意一个基元v与其他基元间的相互影响，进而发现系统S一种表象或“果”T的“因”，即“因果关系”，找寻致使表象T出现的那些基元v，构建方程以确定因果关系$\{v\} \to T$。注意，这样的基元$\{v\}$可能是一个，也可能是多个$\{v\}$相互影响、共同作用的结果。那么，怎样看待图5.5中基元v对基元u的作用$f(v,u)$进而构建方程呢？有一种直觉的方法，将$f(v,u)$看作经由边(v,u)上的一种从v 传递到u 的“作用流”。例如，一条大河中的水流，一条电缆中的电流等，即一种流动量的刻画。自然中流动的“作用流”主要有两种，即“能量”和“信息”。

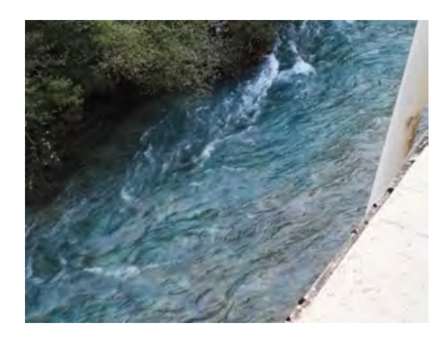


图5.6 河水流

（1） **能量.** 万物是运动的，而能量衡量物质运动的转换，是表征物理系统做功能力的量度。能量可以描写一个基元v的变化过程。对应的，一个系统的能量可定义为从一个零能量的状态转换为该系统现状的功的总和。在这种意义下， 基元v对基元u做功，借由传递物质将能量$f(v,u)$传递到基元u中，因物质的质量等价于能量。人类最早体验的能量是“火”即燃烧能，是材料燃烧或遇到火时所发生的物理和化学变化。无论是宇宙起源的大爆炸，还是现如今人们观测所见，宇宙中的能量大多为核聚变反应释放出的能量，如图5.7所示。例如，太阳能是太阳内部氢原子之间发生氢氦聚变释放出的核能。实际上，地球上的植物、动物，包括人类所需能量的绝大部分都直接或间接地来源于太阳能。



图5.7 宇宙核聚变

欧阳博士告诉惠子，能量有多种表现形式，包括机械能、热能、电能、化学能与核能等，其中，机械能包括动能和势能。第4章讲过，一个质量为m的物体以速率v运动时，动能为$\frac{1}{2}mv^2$；势能是物体由于位置或位形而具有的相对能量。如果把地面选作零势能位置，在高度h的物体的重力势能为mgh。这里，$g = 9.80665m/s^2$为重力mg的加速度；热能是物质内部分子热运动的动能；类似地，电能是带电粒子运动对应的能量；光能是光子运动对应的能量；化学能是物质发生化学反应释放或吸收的能量，是原子的外层电子变动导致电子结合能的改变而吸收或释放出的能量。核

能，是原子核内质子、中子的结合能E，可以在原子核发生裂变或聚变中释放出来。对此，爱因斯坦的质能方程$E=mc^2$揭示了核能与质量的关系。这里，c为光在真空中的速率。一般地，物质的运动形式相同时，物质的运动特性可以用物理量或化学量进行描述。

例如，物体的机械运动可以用速度、加速度、动量等描述，电流可以用电流强度、电压、功率等描述。但如果物质的运动形式不相同，只能用能量变化刻画物质的运动。故此，能量是一切运动物质的共同特性。能量可以由一种形式转换成另一种形式，如图5.8所示。例如，中国古人的“钻木取火”，即是利用物体间的摩擦，由动能产生燃烧能。对于一个封闭系统S，在能量转换过程中，总能量保持不变，原因在于系统的能量是在各基元间的能量转移。当基元某种形式的能量减少，必定会有另一个基元得到这部分能量，且减少量和增加量一定相等，能量的总量不发生变化，这就是能量守恒定律。能量守恒定律在一个封闭系统S中又称为连续流定律，即在系统S的任意一个基元v上，流入基元v的能量与流出v的能量差等于基元v上的能量，即对系统的任意一个基元v，有



图5.8 能量形式转化

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(u_i, v) - \sum_{i=1}^{n-1} f(v, u_i) = v(t_1, t_2, \cdots, t_s)。\tag{5.9}$$

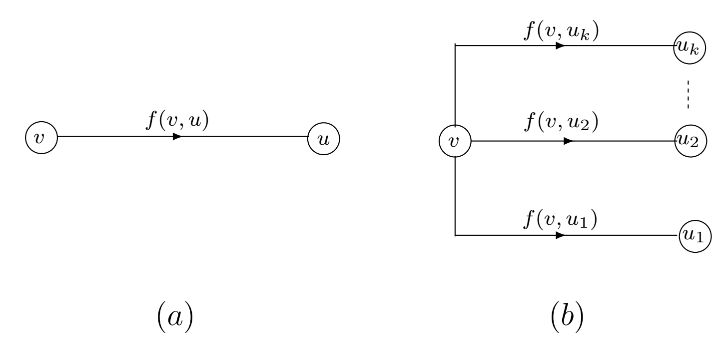
这里，n为系统S中的基元个数，$v(t_1, t_2, \cdots, t_s)$为基元v的能量函数。

（2） 信息. 信息，指音讯、消息、通讯系统传输和处理的事项等，泛指人类社会传播的一切内容。例如，人与人之间采用语言、表情、书信、通讯等方式表达思想、意见、情感、事实等，是在相互间传递信息。故此，信息是人类为适应自然而对客观世界中各种事物的运动状态和变化的反映，又称为数据。信息表征的是事物间的相互联系和相互作用，即事物运动状态和变化的实质。信息不是物质，信息的特点在于其必须依托信息载体而不能独立存在。信息传递时需要一定的能量，但信息自身并不具有能量。


图5.9 信息与传递

信息量的单位是比特，记为bit。例如，一个100bit的数据包，它的信息量就是100bit。信息传递，一般是指一个基点v传递给另一个基点u的信息，如图5.10(a)所示，指点对点发出的信息量。即便是在一个基点v传递给多点$u_1, u_2, \cdots, u_k$的情形，

如图5.10(b)所示，也是指v发送的携带信息的符号，至于这些符号能携带多少信息量，与这些符号发生的概率有关，



(a) (b)

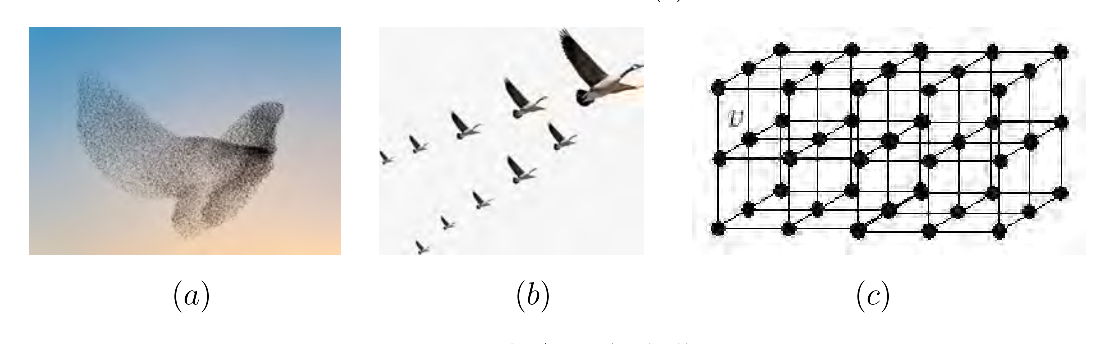
图5.10 信息传递

而对于任何接收端$u_i, 1 \leq i \leq k$来说，这些符号发生的概率是一样的，即基点v传递的信息满足

$$f(v,u_1) = f(v,u_2) = \cdots = f(v,u_k) \tag{5.10}$$

而不再满足守恒律(5.9)。换言之，流入一个基点v的信息量与流出基点v的信息量不一定在数量上相等。

当系统基元的个数n相对较小时，计算基元v的作用次数与值$n-1$差异不大。但当n很大时，例如成年人的人体细胞数为$4\times 10^{14}-6\times 10^{14}$，如采用细胞为基元时，则人体系统的基元个数为$4\times 10^{14}-6\times 10^{14}$，计算基元作用次数用$n-1$就很不经济，因为一个细胞$v$仅影响它的相邻细胞，向相邻细胞传递信息。此外，即便基元个数n不是很大，例如鸟群从散乱到聚集，再到同步地飞出一个漂亮的几何图案，如图5.11(a)所示，或图5.11(b)所示大雁V字飞行等，都涉及信息传递问题。一般地，一个鸟v仅是与其邻鸟之间传递信息，类似于图5.11(c)所示的那种空间结构。



(a) (b) (c)

图5.11 相邻信息传递

鸟群飞行由头鸟领队，决定飞行方向、速率和降落地点，其他鸟通过对邻鸟飞行的方向和速率的辨析，与临鸟保持一定距离，跟随头鸟同步飞行。头鸟体力不佳时，由其他鸟替代，领航飞行作用一样，即头鸟领航，决定飞行方向和速率；其他

鸟观测上、下、左、右和前鸟的飞行方向、速率，决定自己飞行方向、速率，以及与临鸟的距离，见图5.12(a)和(b)。其中，(a)是大雁V字形飞行时的信息传递，(b)是图5.11(c)鸟群中鸟v的飞行信息传递。

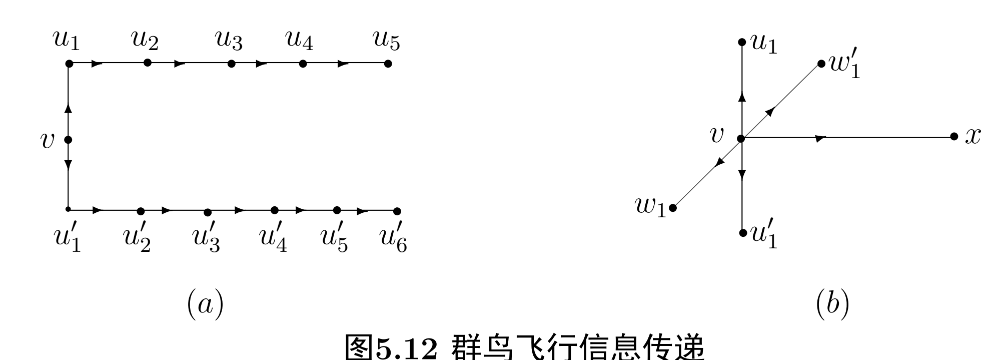


图5.12 群鸟飞行信息传递

欧阳博士告诉惠子，病毒是一种在活细胞内寄生并复制的非细胞生命形态。病毒从传染源排出体外，经必要的传播途径，如空气、水、食物或接触等侵入新的易感者细胞并不需要能量，而是病毒的蛋白质外壳吸附在细胞表面，将遗传物质注入宿主细胞，发出指令在细胞中合成新代病毒，与图5.12(b)中的信息传递类似。

第2节 物理量纲

量纲是事物特征的一种自然属性，是事物特征的线性组合化。在此基础上，对一件事物的认知即是对事物特征的度量，测量该量与一个设定为单位的同类量进行对比，确定特征量的单元或基准倍数即线性组合关系，进而分析自变量和因变量间的因果关系。例如，物体长、宽、高，运动中的时间、质量、速率、力、动能、功等。故此，量纲是人类讨论事物因果关系的基础。

量纲既然反映的是度量中的线性属性，那么，只有那些量纲相同的特征或事物才能相加减。欧阳博士对惠子说："你知道1 + 1 = 2这个算术式子。用这个式子推理，就有1个苹果+1个苹果=2个苹果和1个梨+1个梨=2个梨而无论苹果、梨的大小。"接着，欧阳博士又问她："那么，1个苹果+1个梨=2个什么？还有，《西游记》中有猪八戒背媳妇的场景，是1个人和1头猪。那么，1个人 + 1头猪= 2个什么？是2个人还是2头猪呢？"惠子睁着大眼疑惑地问欧阳博士："爸爸，它们不能加在一起，它们不是同一类事物！"欧阳博士肯定了她的回答："正确！一个事物加上另一个事物，一般情形是同类事物相加，但



图5.13 猪八戒背媳妇

也可能是事物的共同特征相加。比如上面的问题，1个苹果+1个梨=2水果，因为苹果和梨都是水果。类似地，1 个人+1头猪=2个动物，因为人和猪都是动物。这里，苹果、梨、水果和人、猪、动物都是事物的抽象特征或量纲。如果用人或猪作为量纲，那么，1个人+1头猪没有意义，因为它们的量纲不同。但如果拿动物作为他们的特征或量纲，就可以相加，因为人和猪虽然长相不同但都属于动物类。”

欧阳博士告诉惠子，对万物的特征进行度量的方法是采用计量工具进行测量，测得的数量称为物理量。采用的基准不同，测得不同的物理量值但它们之间有着密切的关系，分为基本量和导出量。这里，基本量指那些具有独立的物理量；导出量是指可以表示为基本量纲组合的物理量。例如，中国古人使用的度量衡中，长度、重量是基本量，体积是导出量。国际单位制中，选定了由七个基本量构成的量制，其他物理量均可由这七个基本量导出，这七个基本量的量纲分别为长度L、质量M、时间T、电流强度I、温度Θ、物质量n和光强度J，则任一个物理量D的量纲$\widehat{D}$可以用基本量纲的幂表示为

$$\widehat{D}=L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}I^{\delta}\Theta^{\varepsilon}n^{\zeta}J^{\eta}, \tag{5.11}$$

即基本量纲的组合。这当中，$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$和$\eta$称为量纲指数。例如，速度$v=ds/dt$的量纲$LT^{-1}$中，$\alpha=1,\beta=-1,\gamma=\delta=\varepsilon=\zeta=\eta=0$。

2.1. 基本量纲. 国际单位制的基本量纲，即长度、质量、时间、电流强度、温度、物质量和光强度等七个基本量纲。

（1）长度. 长度是衡量几何形体大小的一维度量，即从一点到另一点的直线距离。农耕社会中，丈量耕地大小是进行土地交易、播种和预估产量的一件头等大事。为此，各国都颁布有自己的长度计量单位。美洲国家用英尺，中国古代还有尺、丈、里等长度单位。首先，测量是否有条件，是否有温度、湿度等要求呢？欧阳博士告诉惠子，答案是肯定的！对物体长度的测量是在一个标准大气压下，环境温度为20 °C等，而光在同一介质中按直线传播，在不同介质中发生折射，见图5.14。故此，光被用来定义基准长度。国际单位制中，规定长度的基准是“米（m）”，定义为“1米是光在真空中在1/299792458秒时间间隔内的行程”。

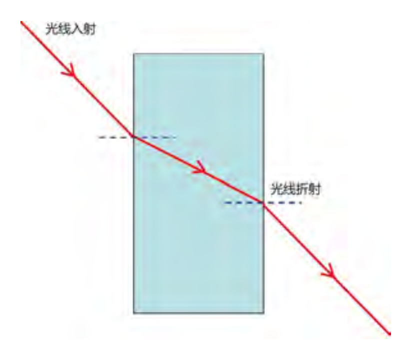


图5.14 光的直射与折射

第二，怎样测量物体的长度或是两个物体间的距离呢？欧阳博士告诉惠子，人们采用量尺、用有视距装置的测量仪器、光电测距仪等测定或推算两点间的距离，以满足人们在地球上日常的生产与生活实践，见图5.15（a）。这当中，光电测距仪是以电磁波或光波等作为载波，通过测定光波在测线两端点间的往返传播时间，以及

光波在大气中的传播速度来测量两点间的距离，原理如图5.15（b）所示。



图5.15 长度测量

但即便如此尚不能解决那些微距，如电子、原子、分子间距或轨迹的测定、行为捕获等，也不能满足超距，如太空测量、行星间距测量等问题，需要进一步研发新的测量工具和仪器，创新测量方法。

粒子测量. 对粒子行为的捕获即粒子径迹测量，欧阳博士解释说，一般是利用电粒子穿过探测器与探测器中的特定物质发生作用，如电离、激发等过程，对粒子在探测器中留下径迹进行测量。例如，早期采用核乳胶和固体径迹探测器等，粒子径迹可通过显微镜用眼睛扫描、测量和读出。后经研发推出云室、气泡室、火花室、流光室（管）等径迹室，采取三维拍照，再对底片进行扫描和自动化处理，计算机读取数据等。这种方法应用于粒子径迹观测的原理，是粒子能使显像后的乳胶中出现一条由多颗粒形成的径迹，且粒子的能量越低，其径迹中的颗粒越多。这样，将粒子径迹分为长度仅为数微米的若干小段，就可以一小段为一个粒子地数出径迹上的粒子数目。

天体测量. 宇宙行星间的距离均为超远距，欧阳博士告诉惠子，天体测量一般是按与地球远近，采用不同的测量方法确定天体间距离：①地球与月球间距。理论上，雷达信号的速度等于光速。用雷达对准月球发出一个短脉冲信号，测出信号往返所用时间为2.56秒，则由$s=vt/2$可求知地球和月球间距约为$1.28\times3\times10^5=3.84\times10^5$km；②地球与太阳的距离。利用金星凌日，即太阳、金星和地球在一条直线上时，由三角视差原理推算出地球与太阳的距离约为1.5×10^8km；③太阳与其他行星间的距离，可以用视觉差法，也可以用开普勒定律$T^2/d^3=$恒量推算。这里，T为行星的公转周期，d为行星到太阳的平均距离。假设地球与太阳间的距离为1AU（1天文单位），即约为1.496×10^8km，地球的公转周期为1恒星年，则开普勒定律简化为$T^2=d^3$。例如，水星的公转周期为0.2411 年，则水星到太阳的距离为0.3874AU，约为5.79×10^7km；④银河系的大小利用恒星光谱法测定，其直径约为105光年，厚度约为104光年；⑤银河系和相邻星系间的距离采用变星法推定。这

里，变星指视亮度随时间变化的恒星，分为规则和不规则两类。规则变星中有一种脉动变星，其光度循环变化。这样，由这些周期变化的光度曲线和光谱可以推算出银河系和相邻星系间的距离。例如，银河系与仙女星云的距离约为200万光年等。对那些距银河系更远的星系，一般是用多普勒效应，即红移测定星系远离地球的速度。例如，室女座星系的远离速度约为$1210km/s$等。

第三，万物处在不停的运动中，人们又是否能够实现对物体长度的精确测量呢？欧阳博士告诉惠子，假设坐标系$K':\{O';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'\}$在$K:\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$中沿$\mathbf{e}_1$方向以速度$v$作匀速直线运动，设物体$P$沿$\mathbf{e}_1$方向的起点、终点坐标为$x_1',x_2'$，则$P$的静止长度$L_0=x_2'-x_1'$。同时，假设物体$P$在$K$中沿$\mathbf{e}_1$方向的起点、终点坐标为$x_1,x_2$，长度$L=x_2-x_1$ 为运动长度。则由洛伦茨变换(4.72)，当$t_1=t_2$时有

$$L_0=\frac{x_2-vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{x_1-vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\tag{5.12}$$

即物体P沿$\mathbf{e}_1$方向的运动长度L为

$$L\ =\ L_0\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ 。\tag{5.13}$$

这里，c为光在真空中的速度。故有$L\leq L_0$。那么，既然万物是运动的，人们在生产生活实践中测定的一个物体长度L是物体的固有长度，即静止长度吗？欧阳博士告诉惠子，答案是否定的！因为地球公转速度约为$29.8km/s$。这样，依据(5.13)有

$$L=L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=L_0\sqrt{1-\frac{29.8^2}{300000^2}}=L_0\times 0.99994\cdots\approx L_0,$$

二者几乎一致。类似地，微观粒子、行星都在不停地运动，人们对微观粒子、天体间距的测量结果也是相对或近似结果，并非其绝对间距。

（2）时间. 时间是一种客观存在，是人类由时光流逝而设定的用以描述物质运动过程或事件发生过程的一个参数。欧阳博士告诉惠子，中国古人将地球自转一周分为十二个时辰，每个时辰又分为“初、正”两部分，即一周等分为二十四时，即现如今的“小时”；后又将一时等分为四刻。一些文学作品常见的“午时三刻开斩”中的“午时三刻”，即现如今的11:45分，因为午时指的是11:00-13:00这段时间，午时三刻即11:00过三刻，3×15分钟$=45$分钟。

不同地区的人看太阳的升起和落下的时间是不一致的，国际上通用的格林威治时间，又称为“世界时”，是以格林威治所在地的时间为标准。计时方法是将地球表面按经线划分为24个时区，相邻区域的时差1小时。即同一区域内的东端和西端的

人，看到太阳升起的时间相差约为1小时。此外，各国、个行政区域还有自己设定的时间标准。例如，中国的时间标准“北京时间”，指的是以东经120^o 子午线为标准，即北京所在时区的标准时刻。

那么，怎样测定某一时区或地区时间或时刻呢？欧阳博士告诉惠子，一般地，人们用计时器，如机械闹钟、秒表、沙漏、怀表、自摆钟、石英钟等测定时间或时刻，以满足人们的生产生活需要。国际单位制中，时间的基本单位是秒（s），这样采用1分钟、1小时、1日等导出时间。那么，“1秒钟是多长时间呢？”欧阳博士说，国际上采用铯原子钟为时间测定标准，规定1秒（s）为“未受干扰的铯Cs-133的原子基态的两个超精细能阶间跃迁对应辐射的9192631770 个周期的持续时间”，测定条件为“铯原子在绝对零度时是静止的，且在地面上的环境是零磁场”，即测定铯-133在原子基态振荡9192631770个周期的持续时间为1秒的标准时间，以满足一些领域，如太空探索、国防建设等对时间的高精度要求。

注意，标准时间1秒是在铯原子钟静止条件下测定的。那么，如果铯原子钟以速度v运动，测得的时间是否仍等同于静止时测得的时间呢？欧阳博士告诉惠子，答案是否定的，因为时间有膨胀效应! 假设坐标系K'在坐标系K中沿$\mathbf{e}_1$方向以速度v作匀速直线运动，这里，$K':\{O';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'\}$，$K:\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$。在它们的原点$O,O'$上各放一个铯原子钟。设$t_1,t_2$是$O$点上原子钟显示的两个时刻，对应$O'$上的铯原子钟时刻分别为$t_1',t_2'$，则静止时长$t_0=t_2'-t_1'$，运动时长$t=t_2-t_1$。由于$x'=0$，$O'$点的铯原子钟在$t_1,t_2$时刻沿$\mathbf{e}_1$方向运动的距离为$x_1=vt_1,x_2=vt_2$，由洛伦茨变换(4.72)有

$$t_0=\frac{t_2-\dfrac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-\frac{t_1-\dfrac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=(t_2-t_1)\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{5.14}$$

即有

$$t=\frac{t_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}。 \tag{5.15}$$

故有$t\geq t_0$。这样，地球的公转速度约为$29.8km/s$，依据公式(5.16)，在地球上测得的时间为

$$t=\frac{t_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\frac{t_0}{\sqrt{1-\dfrac{29.8^2}{300000^2}}}=\frac{t_0}{0.99994\cdots}\approx t_0,$$

测得的时间与静止时间几乎一致。

（3）质量. 质量m_0是物体的一种故有属性，是物质量在静止时的量度，是一个标量，数量上等于物体的密度和体积的乘积。注意，质量和重量是两个不同的概念，

重量是一定质量的物体受到其他物体引力的表现，是一个矢量而质量是一个标量。

重量和质量密切相关，地球上质量为m的物体重量为mg。这里，g是真空中的重力加速度。这样，可以对物体称重，确定其重量W，进而物体的质量为W/g。这是在地球上获知物体质量的一般方法。质量的计量单位为千克（kg），即与重量单位相同，规定"1千克（kg）"是在长度1m和时间1s时由普朗克常数导出的物体质量，与一升水的重量几乎相同。为此，人们利用杠杆原理制造出各种"秤"对物体进行称重，图5.16是实验室里常用的天平，其基本原理是在一个盘中放置标准砝码，另一个盘中放置物品。当上面的横杆水平或是竖向指针垂直时，盘中砝码的重量为物品重量。



图5.16 天平秤

那么，怎样确定微观粒子和宇宙天体的质量大小呢？欧阳博士告诉惠子，确定微观粒子和宇宙天体的质量需要采用一些特别的方法。

微观粒子质量. 微观粒子质量的测量一般是通过对微观带电粒子在电磁场中的运动规律的测量，得到微观粒子的质量。注意，带电粒子在电场中受到库仑力的作用，在磁场中受到洛仑兹力的作用，使得微观粒子有一定的加速度。微观粒子质量的不同，加速度以及运动轨迹投射到胶片上就会不同。这样，通过对微观粒子运动轨迹的研究就可以推算一些微观粒子的质量。例如，由原子质量单位的定义，人们选${}^{12}_{6}C$的质谱线为标准参照物体进行比对，以电子e和离子${}^{12}C^{6+}$在离子阱中的回旋率的比值测定电子的质量0.0005485799111(12)amu，再乘以转换系数931.49432得到电子的质量为$m_e = (0.51099907 \pm 0.00000015) MeV/c^2$。此外，还有根据粒子产生阈值、粒子共振态形成的激发曲线等确定粒子质量。

天体质量. 天体体积庞大，不可能称出它们的质量，因为没有那么大的一个磅秤，只能是经过理论推算。例如，地球质量可以由牛顿的万有引力定律推算。设物体P放置在地球表面，质量为m。由万有引力定律，有

$$F = G \cdot \frac{mm_{earth}}{R^2} = mg \quad \Rightarrow \quad m_{earth} = \frac{gR^2}{G}。 \tag{5.16}$$

而万有引力常数G、重力加速度g和地球半径R均为已知数。这样，可以计算出地球质量约为$5.965 \times 10^{24} kg$。实际上，如果知道天体半径R和天体表面的引力加速度g，由(5.16)式可以直接计算出天体质量。此外，恒星质量越大光度越大，通过光度或是

引力红移可以推算天体质量。例如，由引力红移有

$$z = \frac{Gm}{c^2R} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{c^2Rz}{G}。 \tag{5.17}$$

这里，G为引力常数，c为光在真空中的速度，R为天体的半径，z是光谱线偏移量，可以测知。这样就可由(5.17)式得知天体的质量m的大小。

欧阳博士告诉惠子，质量的大小不应当随物体的运动速度大小而变化。但运动粒子存在着时间膨胀效应，设在坐标系中观测运动粒子的时间为t，在运动粒子上观测的时间为τ。由(5.16)式，有$dt = \sqrt{1-v^2/c^2}d\tau$。这样，对于静止质量为$m_0$的运动粒子，设其速度为$\mathbf{v}$，$|\mathbf{v}| = v$，由牛顿第二定律

$$\mathbf{F} = m_0\mathbf{a} = m_0 \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\tau}, \tag{5.18}$$

即多出一个因子$1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$，故引入运动粒子质量$m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$，则(5.18)式表明，运动粒子仍遵从牛顿第二运动定律$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \cdot d\mathbf{v}/d\tau$。注意，这样引入的粒子运动质量$m$与物体长度、时间类似，且在地球上运动粒子的质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{29.8^2}{300000^2}}} = \frac{m_0}{0.99994\cdots} \approx m_0,$$

即静止时粒子的质量。这样，对于低速运动，即$v \ll c$的粒子，可以用m取代m_0。

（4）其他量纲. 国际单位制中的其他四个基本量纲分别为电流强度I、温度Θ、物质量n和光强度J，简介如下：

电流强度. 电流是电荷的流动表现。对应的，电流强度I是单位时间内通过导线某一截面的电荷量。国际单位制中，规定在真空中相距1米的两根无限长平行直导线，通以相等的恒定电流，当每米导线上所受作用力为$2 \times 10^{-7}N$时，各导线上的电流定义为1安培（A）。电流强度I与电压V、电阻R的关系由欧姆定律$I = V/R$决定。这当中，电压V是单位电荷在静电场中因电势的不同产生的能量差，单位为伏特（V）；电阻R是导线对电荷流动的阻碍作用，单位为欧姆（Ω）。

电流强度的大小由电流表测定。一般地，电流表内有一磁体产生磁场，场中设有一线圈，线圈两端各有一个弹簧连接电流表的接线柱，在弹簧与线圈间设有一个转轴，转轴的前端有一个指针。这样，电流通过导线沿着弹簧、转轴通过磁场并切磁感线，使线圈发生偏转，带动电流表上的转轴、指针

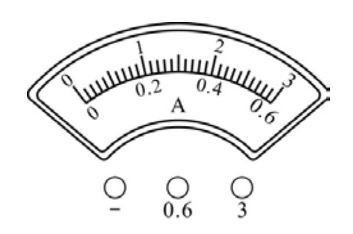


图5.17 电流表盘

偏转，指针的偏转程度由电流的大小决定，进而可由指针对应的电流表盘上的刻度测定电流大小，见图5.17。

温度. 温度Θ是反映物体冷热程度的一个物理量，是物体内分子间平动动能的一种表现。例如，分子运动越快温度越高，手感越热；分子运动越慢温度越低，手感物越冷。温度分为摄氏温度和开氏温度两种，一般采用温度计测量，单位分别为摄氏度°C和开尔文K，两者刻度单位完全一致，即开氏温度计上的1度等于摄氏温度计上的1度，唯一区别是0°C的不同。摄氏温度计以水的冰点为0°C，对应的开氏温度为273.15K，即在温度数值上，开氏温度$K =$摄氏温度+273.15，见图5.18。国际单位制中，温度为开氏温度。

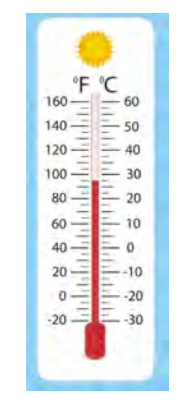


图5.18 温度计

物质量. 物质量n是物质所含粒子数（N）与阿伏加德罗常数(N_A)的比值，即$n = N/N_A$，单位为摩尔（mol)。这里，阿伏伽德罗常数为$0.012kg$的^{12}C中所含的碳原子个数，$N_A \approx 6.02 \times 10^{23}$。单位物质量的物质的质量称为摩尔质量，即1mol该物质所具有相对原子质量与摩尔质量在数值上相等。这样，物质量(n)、质量(m)和摩尔质量(M)三者之间的关系为$n = m/M$。例如，1.5 mol的$Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$中约含有$3 \times 6.02 \times 10^{23}$个$Na^+$、$1.5 \times 6.02 \times 10^{23}$个$CO_2^{2-}$、$15 \times 6.02 \times 10^{23}$个$H_2O$，2 mol的$H_2$中含有$N = 2 \times 6.02 \times 10^{23} = 1.204 \times 10^{24}$ 个氢原子等。

光强度. 光强度定义为单位立体角上的光通量，即光源子单位时间内发出的光量。对一个具体光源的发光强度，有专门的发光强度测量仪进行测定。

假设光源在该方向的立体角$d\Omega$内传输的光通量为$d\Phi$，则光强度为$d\Omega/d\Phi$，这当中，光通量$d\Phi$和立体角$d\Omega$见图5.17，也可以理解为立体角和光通量的微分。国际单位制中，光强度单位为坎德拉（cd)，1坎德拉定义为频率为$540 \times 10^{12}HZ$的单色光在给定方向上的发光强度，要求在该方向上的辐射强度为1/683瓦特。国际单位制中，光通量的单位为流明(lm)，立体角的单位为sr。这样，就有$1cd = 1lm/sr$。

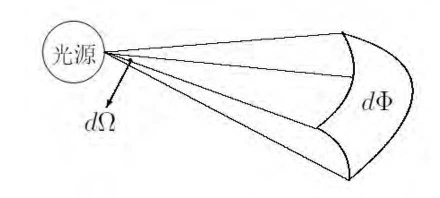


图5.19 光通量示意图

2.2.组合量纲. 一个物理量D按(5.11)式表示出的量纲$\widehat{D}$中，如果指数$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$和$\eta$中至少有两个指数不为0，则称$\widehat{D}$为组合量纲或导出量纲。注意，组合量纲并

非是基本量纲间的任意组合，而需要由物理定律决定。例如，质点加速度计算公式为$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$，而速度$\mathbf{v}$的量纲为$LT^{-1}$，故加速度$\mathbf{a}$的量纲为$LT^{-2}$。类似地，由牛顿第二定律$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$，质量的量纲为$M$，加速度的量纲为$LT^{-2}$知力的量纲为$MLT^{-2}$。对应的，功$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$的量纲为$ML^2T^{-2}$等。反之，量纲是判断物理定律的公式表示是否正确的形式检验方法，即一个物理定律正确的表示式，遵从公式两边量纲一致的规则。例如，动能和势能的量纲均为ML^2T^{-2}。对一个质量为m的质点P，以速度v水平抛出，以抛出点为原点O，水平抛出方向为$\mathbf{e}_1$-轴，垂直向下方向为$\mathbf{e}_2$建立法坐标系$\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$。则$P$在点$(x, y)$的关系式

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = m\frac{d}{dt}\sqrt{x^2 + y^2}$$

不可能正确，因为等式左边量纲为ML^2T^{-2}，而右边的为MLT^{-1}。

第3节 系统状态

一个系统的状态，是该系统依时间t的状态表现或运动信息的集合。欧阳博士告诉惠子，把她们班比作一个系统，班里的学生状态，如身体素质、学习成绩、兴趣爱好和思想品德等就是她们班的系统状态，且在不时地变化。那么，怎样刻画一个系统S的状态呢？人类系统认知事物分为两种情形。一种是S中的基元不为人类所知，即黑箱系统。这时，可以简单地将S看作一个质点，对系统S的表象用质点方程构建系统S的唯像理论。这种方法的优点，是得到的系统状态与观测结果一致，缺点是不清楚诱发系统状态的原因；另一种是S的基元已为人知晓，这至少在基本粒子和细胞、基因层面是这样的。这时，一个系统S的状态由基元和基元间的影响或作用$a(v, u)$决定，系统S的状态可以简单地由(5.1)式，即标号图$G^L[S]$对系统的动态行为进行刻画。这里，$v, u \in S$为系统的基元。这种方法的优点是既可以得到系统的状态，同时还可以得到诱发系统状态的原因，缺点是系统基元的数量如果特别庞大，人类的计算能力可能无法求知系统的状态，确定不了系统状态。但对于那些人类能够计算的基元数量，比如惠子所在班级学生的学习状态等，仍不失为一种有效的方法，是系统认知事物常用的一种方法。

这当中，作用$a(v, u)$完全为人知晓的即白色系统，不全为人知晓的，即为灰色系统。然而，即便是白色系统，标号图$G^L[S]$ 也是仅表明了基元间的相互关系，并未体现基元间的作用强度或量的大小，无法体现系统状态的发展。那么，怎样在标号图$G^L[S]$中表示基元作用，刻画系统动态行为呢？欧阳博士说，这时，可以重新对$G^L[S]$中的顶点、边采用变量标号，即$L : v \in V\left(G^L[S]\right) \rightarrow \mathbf{x}_v$刻画基元$v$的变

化，$L:(v,u)\in E\left(G^L[S]\right)\to a(v,u)$和$a(u,v)$表示基元$v$对$u$、基元$u$ 对v 的作用，如图5.20所示。这样得到的标号图依赖时间t，记为$G^L[S](t)$。

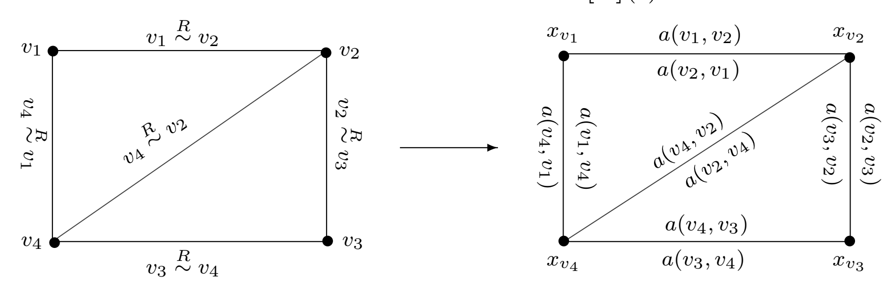
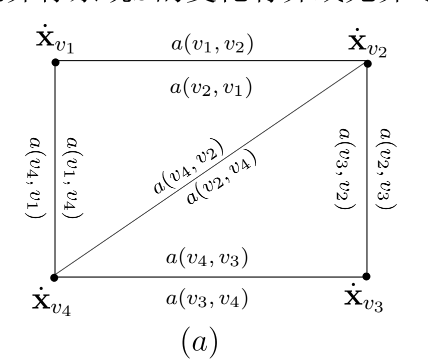


图5.20 系统状态图

3.1.状态空间. 变量$\mathbf{x}_v$依赖于时间t，可以刻画基元v的变化轨迹，称为基元v的状态变量。这样，系统S的基元在时间t状态的集合称为系统状态$S(t)$，即$S(t)=\{\mathbf{x}_v(t)|v\in S\}$。现在，设$S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，这里$n\geq 1$。那么，怎样刻画基元变量$\mathbf{x}_{v_1},\mathbf{x}_{v_2},\cdots,\mathbf{x}_{v_n}$的状态呢？欧阳博士告诉惠子，一种自然的想法，是以$\mathbf{x}_{v_i},1\leq i\leq n$为坐标轴方向$\mathbf{e}_i$，构建坐标系$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\}$，即$n$-维欧氏空间$\mathbb{R}^n$，用$n$-维欧氏空间的点坐标表示系统$S$在时间$t$的状态，即

$$\text{系统}S\text{在时间}t\text{的状态}S(t) \longrightarrow \text{点}(\mathbf{x}_{v_1},\mathbf{x}_{v_2},\cdots,\mathbf{x}_{v_n})\in\mathbb{R}^n, \tag{5.19}$$

映入为$\mathbb{R}^n$中的一点，称为系统的状态变量。这样一来，系统S的状态对应于n-维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的一个点集$\mathcal{S}_P$，可以由点集$\mathcal{S}_P$的性状刻画系统S的状态。例如，由点集$\mathcal{S}_P$有界或无界称系统S的变化有界或无界等。



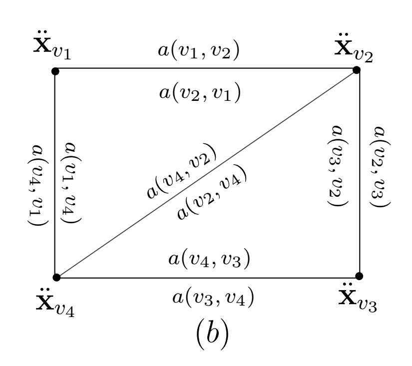


图5.21 基元微商

那么，对系统S中基元的观测是否可以直接得到系统状态$S(t)$呢？欧阳博士告诉惠子，对系统S中基元v的观测并不能直接得到v的变化轨迹，因为人们只能观测基元在某一时间段的状态，并非其变化轨迹的全部信息。故此，只能依观测的部分信息测算、预测基元v随时间t的变化率，即微商$\dot{\mathbf{x}}_v(t)$ 或进一步，2-阶微商$\ddot{\mathbf{x}}_v(t)$等。这时，标号图$G^L[S](t)$中顶点的标号不是x_v而是改由$\dot{\mathbf{x}}_v$或$\ddot{\mathbf{x}}_v$取代，见图5.21（a）和（b）。同时，对系统基元v的任何观测都有开始时间，记为时间t_0。基元v在t_0时的状

态称为v的初始状态，记为$\mathbf{x}_v(t_0)$。对应的，t_0时系统S所有基元初始状态构成的集合$\{\mathbf{x}_v(t_0);\ v \in S\}$称为系统$S$的初始状态，记为$S(t_0)$。这样，依据观测确定系统$S$状态的实质，是在初始条件$S(t_0)$和基元间作用$a(v,u)$对任意的$v,u \in S$已知的前提下，由$\mathbf{x}_v, v \in S$的1-阶微商$\dot{\mathbf{x}}_v$确定系统状态$S(t)$，或是在初始条件$S(t_0)$、$\dot{\mathbf{x}}_v(t_0), v \in S$和$a(v,u)$，$v,u \in S$已知的前提下，确定系统$S$的状态$S(t)$。这当中，系统状态$S(t)$的存在性由定义不言而喻，这是一个简单的“由因及果”关系。但人类认知万物的宗旨在于“由果溯因”，这在系统认知上，核心在于人们对系统基元x_v、基元作用$a(v,u)$变化的观测、确定是否完备，是否可以唯一确定系统状态$S(t)$？欧阳博士解释说，除去一些特殊情形，如线性系统等，对这一问题的回答是不确定的！因为在大多数情形无法确定或是无法唯一确定引起系统状态$S(t)$的那些基元状态$v(t)$，这也是复杂系统，即基元作用的复杂性和信息复杂性的产生原因。例如，人体作为一个由细胞组合而成的系统，癌症是二十一世纪威胁人类健康的三大疾病之一。理论上，癌症是人体正常细胞在致癌因素作用下转化成了癌细胞的一种疾病，只要针对那些致癌细胞点进行靶向治疗，使癌细胞特异性死亡，癌症患者就一定可以康复。但人体细胞数为$4 \times 10^{14} - 6 \times 10^{14}$个，相当庞大，是否可以找到那些致癌细胞以及在技术上怎样实现靶向治疗是个世界性难题。这当中，第二个问题即是由癌症这个“果”溯“因”，即致使癌变的诱因，这在大多数情形找不到那些致癌病变的“因”，故而无法对癌症患者进行康复治疗。



图5.22 癌症靶向治疗

3.2.状态方程. 系统的状态方程，是系统变量与输入变量间关系的一阶微分方程组。欧阳博士告诉惠子，假设系统S的基元为$v_1, v_2, \cdots, v_n$，基元$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_l}$受到输入变量$u_1(t), u_2(t), \cdots, u_s(t)$的影响，如图5.23所示。

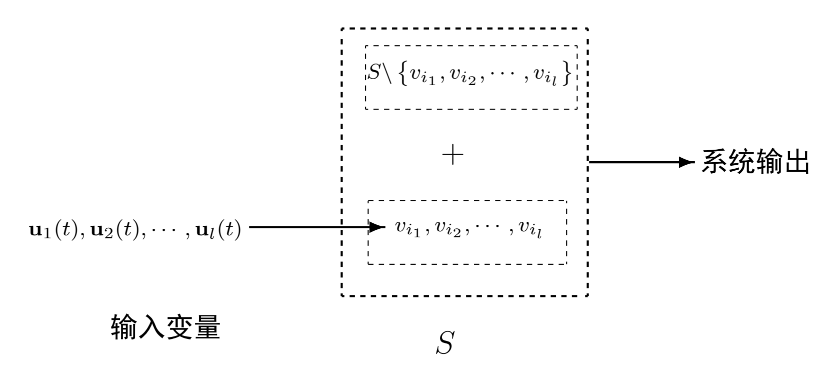


图5.23 输入变量作用

这样，描述系统状态的一阶微分方程组为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{v_{i_j}} = \mathbf{f}_{i_j}\left(\mathbf{x}_{v_1}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n}(t);\ \mathbf{u}_1(t),\cdots,\mathbf{u}_l(t)\right), \quad 1\leq j\leq l, \\ \dot{\mathbf{x}}_{v_k} \ = \mathbf{f}_k\left(\mathbf{x}_{v_1}(t),\mathbf{x}_{v_2}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n}\right), \quad v_k\in S\backslash\left\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_l}\right\}。\end{cases} \tag{5.20}$$

这里，$\mathbf{f}_{i_j}\left(\mathbf{x}_{v_1}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n};\ \mathbf{u}_1(t),\cdots,\mathbf{u}_l(t)\right)$表示基元$v_{i_s}, s\neq j$和输入变量$u_r, 1\leq r\leq l$对基元$v_{i_j}$的作用函数，$\mathbf{f}_k\left(\mathbf{x}_{v_1}(t),\mathbf{x}_{v_2}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n}\right)$表示基元$v_i, i\neq k$对基元$v_k$的作用函数。注意，如果基元间的作用$a(v,u), v,u\in S$遵从向量规则且为人们完全知晓，则作用函数$\mathbf{f}_i$为

$$\mathbf{f}_i = \sum_{(u,v_i)\in E(G^LS)} a(v_j,v_i)。 \tag{5.21}$$

特别地，如果系统S的基元都受或者都不受输入变量$\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}_2(t),\cdots,\mathbf{u}_s(t)$的影响，则方程组(5.20) 变为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{v_1} = \mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_{v_1}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n}(t);\ \mathbf{u}_1(t),\cdots,\mathbf{u}_l(t)\right), \\ \dot{\mathbf{x}}_{v_2} = \mathbf{f}_2\left(\mathbf{x}_{v_1}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n}(t);\ \mathbf{u}_1(t),\cdots,\mathbf{u}_l(t)\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dot{\mathbf{x}}_{v_n} = \mathbf{f}_n\left(\mathbf{x}_{v_1}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n}(t);\ \mathbf{u}_1(t),\cdots,\mathbf{u}_l(t)\right) \end{cases} \tag{5.22}$$

和

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{v_1} = f_1\left(\mathbf{x}_{v_1}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n}(t)\right), \\ \dot{\mathbf{x}}_{v_2} = f_2\left(\mathbf{x}_{v_1}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n}(t)\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dot{\mathbf{x}}_{v_n} = f_n\left(\mathbf{x}_{v_1}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n}(t)\right)。\end{cases} \tag{5.23}$$

这里，(5.22)式即为通常的系统状态方程，(5.23)式为系统S不受外界环境作用，即为一个孤立系统的状态方程。一般地，采用(5.20)或(5.22)刻画系统S状态的经典问题是方程组(5.20)或(5.22)的适定问题，即是否可解以及可解时，解是否唯一问题，即用方程组(5.20) 或(5.22)的解$\mathbf{x}_{v_1}(t),\mathbf{x}_{v_2}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n}(t)$刻画系统$S$的状态。欧阳博士告诉惠子，这种思想的实质，是在方程组(5.20)和(5.22)可解的情形下，用解$\mathbf{x}_{v_1}(t),\mathbf{x}_{v_2}(t),\cdots,\mathbf{x}_{v_n}(t)$刻画系统$S$的状态。显然，由因果关系，解$\mathbf{x}_{v_1}(t),\mathbf{x}_{v_2}(t),\cdots,$ $\mathbf{x}_{v_n}(t)$一定对应系统S的状态。但由果溯因，即系统S的任一状态是否都对应于方程组(5.20)或(5.22)的解呢？特别是，如果方程组(5.20)或(5.22)不可解，即不存在经典意义上的解是否无意义或不对应系统S的状态呢？欧阳博士告诉惠子，答案是否定的，即便方程组(5.20)或(5.22)不存在经典解并不意味着系统S的状态不存在，而是这种认为系统S的状态一定对应一个方程组解的观点不正确，是一种错误观点。这

一点等到第7章讨论矛盾系统时，特别是系统S的状态怎样对应于方程组的解时还有更详细的讨论。这里，仍然假定系统S的状态对应于方程组(5.20)或(5.22)的解。

那么，怎样建立系统的状态方程(5.20)或(5.22)呢？欧阳博士解释说，当基元作用为类似于力等向量作用时，对应于能量流动。这时，系统的状态方程可由系统S的节点守恒方程(5.9)，结合系统与外部环境间的作用确定。这当中，最简单的情形是线性系统，即对任意基元$v,u\in S$，基元间的作用$a(v,u)$和输入变量$u_i(t),1\leq i\leq l$均为已知函数的情形。这时系统S采用方程(5.22)描述为

$$\dot{\mathbf{x}}=A[t]\mathbf{x}+B[t]\mathbf{u}。\tag{5.24}$$

这里，$\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_l)^t$为输入向量，$\mathbf{x}=(\mathbf{x}_{v_1},\mathbf{x}_{v_2},\cdots,\mathbf{x}_{v_n})^t$ 为系统S 的状态向量，$A[t]$ 和$B[t]$为已知的函数矩阵，即

$$\mathbf{A}[t]=\begin{pmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)&\cdots&a_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}(t)&a_{n2}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{pmatrix},\ \mathbf{B}[t]=\begin{pmatrix}b_{11}(t)&b_{12}(t)&\cdots&b_{1l}(t)\\b_{21}(t)&b_{22}(t)&\cdots&b_{2l}(t)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_{nl}(t)&b_{n2}(t)&\cdots&b_{nl}(t)\end{pmatrix}。$$

特别地，当$A[t]$和$B[t]$为常数矩阵$[a_{ij}]_{n\times n}$和$[b_{ij}]_{n\times n}$时，方程(5.24)为一阶常系数线性微分方程组

$$\dot{\mathbf{x}}=[a_{ij}]_{n\times n}\mathbf{x}+[b_{ij}]_{n\times n}\mathbf{u}。\tag{5.25}$$

例如，设$\mathbf{x}$为1-维变元，图5.24是一个常系数线性系统$S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$G^L[S]$为4阶完全图K_4。

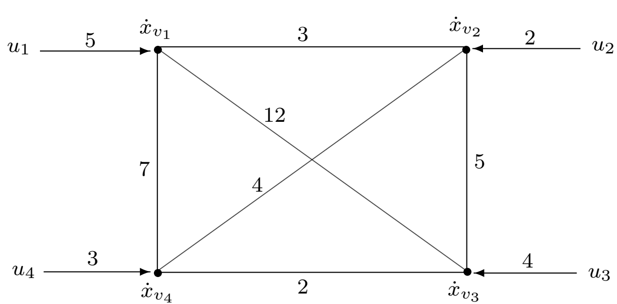


图5.24 常系数线性系统结构图

这里，边和输入向量上的数表示作用强度，且在边上具有对称性，即$a(v_1,v_2)=a(v_2,v_1)=3$等。则该系统状态对应的线性微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_{v_1}=3x_{v_2}+12x_{v_3}+7x_{v_4}+5u_1\\\dot{x}_{v_2}=3x_{v_1}+5x_{v_3}+4x_{v_4}+2u_2\\\dot{x}_{v_3}=12x_{v_1}+5x_{v_2}+2x_{v_4}+4u_3\\\dot{x}_{v_4}=7x_{v_1}+4x_{v_2}+2x_{v_3}+3u_4\end{cases}$$

即矩阵方程

$$\dot{\mathbf{x}} = [a_{ij}]_{4\times4}\,\mathbf{x} + [b_{ij}]_{4\times4}\,\mathbf{u}。$$

这里，$[a_{ij}]_{4\times4}$、$[b_{ij}]_{4\times4}$分别为

$$[a_{ij}]_{4\times4} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 12 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ 12 & 5 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad [b_{ij}]_{4\times4} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}。$$

线性系统可以通过解方程求出系统S的状态$\mathbf{x}_{v_1}(t), \mathbf{x}_{v_2}(t), \cdots, \mathbf{x}_{v_n}(t)$，对系统进行刻画。这样，一个自然的问题是，系统中是否存在非线性系统呢？因为如果不存在非线性系统，万物就可以都由线性系统刻画与认知，进而把握万物行为了。

然而，欧阳博士告诉惠子，宇宙万物中，非线性系统不仅存在而且大量存在。同时，线性系统仅是系统状态的一种近似刻画。例如，在图5.25猫和老鼠的捕食游戏中，猫和老鼠构成一个相互依存的2-元封闭系统S，该系统的标号图为$K_2^L[S]$或$P_2^L[S]$，例如电视剧《猫和老鼠》中的汤姆和杰瑞各代表一个种群，在这个2-元系统中，猫和老鼠各自的种群规模即动物数量为x, y。假设没有老鼠时，猫的平均增长率为$-\mu$，老鼠的出现使猫的平均增长率由$-\mu$增长为$-\mu + cx$。同时，假设老鼠在没有猫时的平均增长率为λ，猫的出现使得老鼠的平均增长率由λ变为$\lambda - by$。这里，b 和c均假设为常数。则这个2-元系统状态中的猫和老鼠由$x(t), y(t)$刻画，对应的系统状态方程



图5.25 猫和老鼠

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\mu + cy) \\ \dot{y} = y(\lambda - bx) \end{cases} \tag{5.26}$$

称为Lotka-Volterra模型，即是一个非线性微分方程组。

3.3.系统方程. 系统方程是在系统状态方程基础上，增加系统的输出向量$\mathbf{y}$遵从的方程组，是全面刻画系统输入、输出和状态的一组方程。欧阳博士告诉惠子，对一个有l个输入变量、n个状态变量和m个输出变量的系统S，系统方程的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \tag{5.27}$$

这当中，$\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_l)^t\in\mathbb{R}^l$为输入变量，$\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n)^t,\mathbf{f}=(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\cdots,\mathbf{f}_n)^t\in\mathbb{R}^n$，$\mathbf{y}=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\cdots,\mathbf{y}_m)^t,\mathbf{g}=(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\cdots,\mathbf{g}_m)^t\in\mathbb{R}^m$。第一个方程即系统$S$的状态方程，第二个称为输出方程。注意，系统状态是系统基元间的相互作用随时间的变化，在$\mathbf{f}$和$\mathbf{g}$中均不直接含显时间t，如图5.24中的方程$\dot{\mathbf{x}}=[a_{ij}]_{4\times4}\,\mathbf{x}+[b_{ij}]_{4\times4}\,\mathbf{u}$那样，没有单独的时间变化项$h(t)$，称为自治方程。特别地，如果方程组(5.27)中的状态方程和输出方程均为线性方程，即存在矩阵$\mathbf{A}[t],\mathbf{B}[t],\mathbf{C}[t],\mathbf{D}[t]$，使得

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}[t]\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}[t]\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}[t]\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}[t]\mathbf{u}(t)\end{cases}\tag{5.28}$$

则称S为线性时变系统。这里，矩阵$\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t)$同于方程组(5.24)，$\mathbf{C}(t)$和$\mathbf{D}(t)$如下：

$$\mathbf{C}[t]=\begin{pmatrix}c_{11}(t)&c_{12}(t)&\cdots&c_{1n}(t)\\c_{21}(t)&c_{22}(t)&\cdots&c_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\c_{m1}(t)&c_{m2}(t)&\cdots&c_{mn}(t)\end{pmatrix},\ \mathbf{D}[t]=\begin{pmatrix}d_{11}(t)&d_{12}(t)&\cdots&d_{1l}(t)\\d_{21}(t)&d_{22}(t)&\cdots&d_{2l}(t)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\d_{m1}(t)&d_{m2}(t)&\cdots&d_{mn}(t)\end{pmatrix}。$$

类似地，如果矩阵$\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t),\mathbf{C}(t),\mathbf{D}(t)$均为常数矩阵，则系统$S$称为线性定常系统。对于单输入单输出的线性定常系统，输入变量$\mathbf{u}(t)$和输出变量$\mathbf{y}(t)$均是一维的，此时的系统方程(5.28)可表示为

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}[t]\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}u(t)\\ y(t)=\mathbf{C}[t]\mathbf{x}(t)+du(t)\end{cases}\tag{5.29}$$

其中，$\mathbf{B}=(b_{11},b_{21},\cdots,b_{n1})^t$为列向量，$\mathbf{C}=(c_{11},c_{21},\cdots,c_{n1})$为行向量，$d$为常数。

方程组(5.29)表明，系统S的输出变量$\mathbf{y}(t)$与系统状态是一种因果关系，它既受系统状态变量影响，又受系统输入变量的影响。那么，系统S的输出向量$\mathbf{y}(t)$对刻画系统行为有什么作用呢？欧阳博士告诉惠子说，首先，系统状态变量$\mathbf{x}_v(t),v\in S$不一定为能为人观测，但系统输出变量$\mathbf{y}(t)$是系统状态的外在表现，可为人观测；其次，系统输出变量与输入变量有一定的而果关系，即便对于黑箱系统，也可以类似于(5.29)建立输入与输出间的因果关系，即寻找向量函数$\mathbf{g}$使得

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{f}(t)+\mathbf{g}(\mathbf{u}(t),t)\ \text{或线性关系}\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{f}(t)+\mathbf{D}[t]\mathbf{u}(t)。\tag{5.30}$$

这里，$\mathbf{f}(t)$是建立输入变量$\mathbf{u}$与输出变量$\mathbf{y}$间的关系而引入的系统参变量，也可以看作外部环境影响；反之，在系统状态变量状态变量$\mathbf{x}_v(t),v\in S$ 已知的前提下，为获得输出变量$\mathbf{y}(t)$的特定结果，确定相应的输入变量$\mathbf{u}(t)$，这就是反馈调节，是“由果溯因”的一种常见应用情形。

反馈调节在信息传递上，既存在由输入到输出的前向通道，还有由输出到输入的反馈通道，两者构成一个闭合回路即有向圈。例如，欧阳博士告诉惠子，在图5.25猫和老鼠组成的2-元系统中，种群规模受反馈调节的制约。老鼠数量上的增加或减少反馈给猫食物上的增加或减少，自然调节成活猫数量的增加或减少，进而老鼠被猫捕食的数量减少或增加，实现老鼠和猫之间的生态平衡。

第4节 方程求解

一个系统S的演化由它的状态$x_v(t), v \in S$刻画，惠子问欧阳博士，但人的观测不能直接得到$x_v(t), v \in S$而是需要建立微分方程或差分方程，由这些方程，例如(5.27)的解$\mathbf{x}_v(t), v \in S$知系统S的状态，把握其演化规律。可是，惠子说："那个方程(5.27)复杂得不得了，怎样判定它可解还是不可解？如果不可解，这条路走不通啊，爸爸！还有，"惠子问欧阳博士："即便一个方程可解，又怎样求出它的解而把握系统S的状态，比如变化方向是向左还是向右，还有快慢呢？"欧阳博士回答说："你问的这两个问题很有意义，是人类把握事物状态的基础!"欧阳博士告诉惠子："我们在前面讲过，量纲是理解事物物理特征的单位。对应的，对这个特征的度量是这个量纲的倍数。举个例子，假设某次测量一个物体的长度x为8.63m。这里的8.63m是什么意思？是指该物体的长度x为米（m）的8.63倍，记为$x = 8.63\text{m}$。还有，采用4m 的尺子测量那件物体，尺子不够长，需要测量三次，测量结果分别为4m、4m和0.63m，则有$x = 4 + 4 + 0.63 = 8.63\text{m}$。这就是量纲的线性堆磊。由这个例子可以看出，满足线性特征的方程相对于其他方程求解简单!"欧阳博士继续解释说，这时，人们可以把一个非线性函数用泰勒函数展开式，将(5.27)中的函数$\mathbf{f}$展开，取展开式的前两项而忽略第三项以后的各项得到一个线性方程，近似地刻画$\mathbf{f}$。这种方法需要在一定的条件下才能这样做。为简单起见，这一节假设变元$\mathbf{x}_v$为1-维变元$x_v, v \in S$。

一般地，假设$(\mathbf{x}_0, \mathbf{u_0})$为$\mathbf{f}$的零点，即$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0\right) = \mathbf{0}$，则有

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}\right) = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)^t + \boldsymbol{\alpha}(\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{x})。\qquad (5.31)$$

这里，$\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}, \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}$称为$\mathbf{f}$对$\mathbf{x}$和$\mathbf{u}$的雅可比矩阵，分别为

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_l} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_l} \end{pmatrix}$$

且$\boldsymbol{\alpha}(\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{x})$为$\mathbf{f}$关于$\mathbf{x}$和$\mathbf{u}$次$\geq 2$的余项。这里，$\Delta\mathbf{x}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$，$\Delta\mathbf{u}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_0$。如果忽略(5.33)式中的次$\geq 2$的余项$\boldsymbol{\alpha}(\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{x})$，则(5.27)中的状态方程可以简化为

$$\dot{\mathbf{x}}^t=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})=\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^t+\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)^t_{\circ} \tag{5.32}$$

注意，$\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}$和$\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}$均为常数矩阵，分别记为矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$，则(5.32)式为

$$\dot{\mathbf{x}}^t=\mathbf{A}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right)^t+\mathbf{B}\left(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0\right)^t, \tag{5.33}$$

是一个常系数线性微分方程。

4.1.代数方程. 线性方程既然是伴随物理量纲的产物，欧阳博士说，理论上就应该可以求解，进而得知系统S的状态$S(t)$。

（1）线性方程. 线性代数方程的一般形式为

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^t=\mathbf{B}_{\circ} \tag{5.34}$$

这里，$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$为常数矩阵，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad \mathbf{x}^t=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\circ}$$

那么，怎样求解方程(5.34)呢？欧阳博士告诉惠子，可先从一些简单情形分析。

1) $n=1$，即只有一个变量的情形$ax=b$。这时，只要$a\neq 0$就有解$x=b/a$；$a=0$但$b\neq 0$时方程不成立，$b=0$时，任一个域$\mathscr{F}$中的元都是方程的解。这里，域$\mathscr{F}$是求解该方程的域，可以为有限域，也可以为整数域、实数域或复数域等无限域。例如，方程$ax=b$有整数解的条件是b能够为a整除。如$2x=4$有整数解$x=2$，$2x=3$则没有整数解。

2) $n=2$，即有两个变量x,y的情形$a_1x+a_2y=b$。这个方程在欧氏平面$\mathbb{R}^2$上对应的点集为一条直线L_1，与x-轴、y-轴的交点分别为$(b/a_1,0)$、$(0,b/a_2)$，见图5.26。换言之，直线L_1上的所有点都是方程$a_1x+a_2y=b$的解。

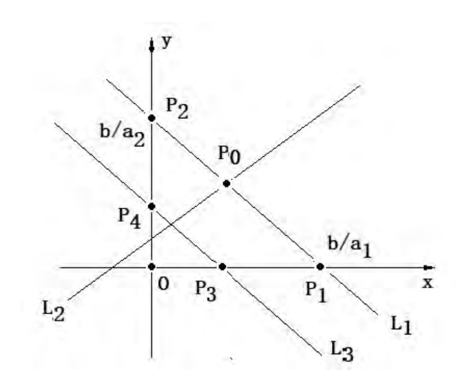


图5.26 平面中的直线

图中L_2为另一条直线，对应的方程为$a_1'x + a_2'y = b'$，从中可以看出，直线L_1和L_2有一个交点P_0。设点P_0的坐标(x_0, y_0)。那么，坐标x_0, y_0 既要满足方程$a_1x + a_2y = b$，还要满足方程$a_1'x+a_2'y = b'$。这样，x_0, y_0就是方程组$a_1x+a_2y = b$，$a_1'x+a_2'y = b'$的一个解。同时，由图5.26也可以看出，这个方程组只有一组解x_0, y_0，因为直线L_1和L_2只有一个交点P_0。

那么，是否可以由这两个方程直接得到解x_0, y_0呢？答案是肯定的！因为对第一个方程两端乘以a_2'，减去第二个方程两端乘以a_2有$(a_1a_2'-a_2a_1')x = ba_2'-b'a_2$。类似地，第一个方程两端乘以$a_1'$减去第二个方程两端乘以$a_1$，有$(a_1'a_2 - a_2'a_1)y = ba_1' - b'a_1$。这样，如果$a_1a_2' - a_2a_1' \neq 0$就有

$$x_0 = \frac{ba_2' - b'a_2}{a_1a_2' - a_2a_1'}, \quad y_0 = \frac{ba_1' - b'a_1}{a_2a_1' - a_2'a_1}$$

即P_0点的坐标(x_0, y_0)。

再看图5.26中的直线L_1和L_3，这两条直线平行即没有交点。设L_3的方程为$\widehat{a}_1x + \widehat{a}_2y = \widehat{b}$，它与$x$-轴、$y$-轴的交点$P_3$、$P_4$的坐标为$(\widehat{b}/\widehat{a}_1, 0)$和$(0, \widehat{b}/\widehat{a}_2)$。注意，由于$L_1/\!/L_2$，三角形$\triangle OP_1P_2$与$\triangle OP_3P_4$相似，有

$$\frac{\widehat{b}}{\widehat{a}_1}\bigg/\frac{b}{a_1} = \frac{\widehat{b}}{\widehat{a}_2}\bigg/\frac{b}{a_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{\widehat{a}_1} = \frac{a_2}{\widehat{a}_2},$$

即L_1和L_3的方程中，x和y的系数比例相等。

3) $n \geq 3$，先看$n = 3$即有三个变量x, y, z的情形$a_1x + a_2y + a_3z = b$。这个方程在3-维欧氏空间$\mathbb{R}^3$中对应的点集为一个平面，见第4章中图4.15。那里的方程式为$Ax+By + Cz = D$，与x-轴、y-轴和z-轴的交点分别为$D/A, D/B, D/C$。换言之，这个平面上任一点的坐标x, y, z都是这个方程的一个解，有无限多个。

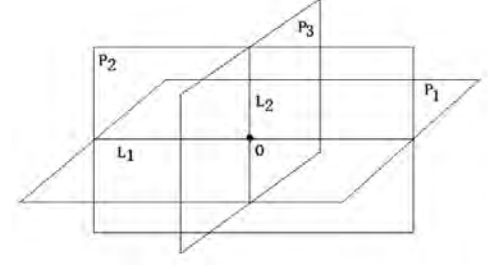


图5.27 平面相交

几何直观上，两个平面如果有交点，则交点构成一条直线。这条直线如果与第三个平面相交，则是一个点，见图5.27。例如，图中平面P_1与P_2交于直线L_1，平面P_2与P_3交于直线L_2等。这样，就可以知道，如果方程$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$与方程$a_{21}x + a_{22}y+a_{23}z = b_2$构成的方程组有解，将方程等式左边的$a_{13}z, a_{23}z$移到等式右边，即$a_{11}x+a_{12}y = b_1-a_{13}z$，$a_{21}x+a_{22}y = b_2-a_{23}z$。把$z$看作一个已知量，就转化为了$n = 2$的情形。由上面的讨论，只能有一个解$x_0, y_0$，但由于$z$可以取$\mathbb{R}$中的任一个实数，消去参数$z$后得到一个关于$x_0, y_0$的一次方程，即

平面上的直线。那么，两个平面P_1, P_2在什么条件下平行即没有交点呢？这与两条直线在$\mathbb{R}^2$中平行类似，当且仅当平面P_1和P_2的方程中，x, y和z的系数比例相等。

再看三个平面的情形，平面P_1, P_2, P_3在图5.27中相交于点O，即这三个平面对应的一次方程式$P_1: a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$，$P_2: a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$，$P_3: a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$构成的方程组解唯一，即为点$O$的坐标$(x_0, y_0, z_0)$。那么，能否直接由这三个方程求得$x_0, y_0, z_0$的值呢？欧阳博士告诉惠子，有一种标准算法求解$x_0, y_0, z_0$，称为消元法，即将欲消去的变元系数化为1，用其他方程顺次减去第一个方程。这样，其他方程中就不再含有这个变元，得到方程组如下等价形式

$$\begin{cases} x + c_{12}y + c_{13}z = d_1 \\ \qquad\; y + c_{23}z = d_2 \\ \qquad\qquad\quad z = d_3 \end{cases} \tag{5.35}$$

这样，由(5.35)式最后一个方程知z，代入第二个方程可求知y，再将得到的y, z代入第一个方程可得知x。例如，假设平面P_1, P_2, P_3的方程依次为$3x + 9y + 6z = 6$, $3x + 6y + 9z = 9$, $6x + 12y + 24z = 30$，这一简化过程如下：

$$\begin{cases} 3x + 9y + 6z = 6 \\ 3x + 6y + 9z = 9 \\ 6x + 12y + 24z = 30 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ x + 2y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ \quad -y + z = 1 \\ \quad -y + 2z = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ \qquad y - z = -1 \\ \qquad\quad z = 2 \end{cases}$$

这样，可以很容易地得到解$x = -5, y = 1, z = 2$。

欧阳博士告诉惠子，上面的方法可用于方程(5.34)得到与(5.35)类似的结果，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \;\;\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n = b_n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad x_l + c_{li+1}x_{l+1} + \cdots + c_{ln}x_n = d_l \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{l+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_m \end{cases}$$

这里，$l \le m$。对应地，该线性方程组解的情形如下：①$l = m$或$l < m$且$d_{l+1} = \cdots = d_n = 0$，此时方程组存在无穷多个解，这些解构成一个$(n-l)$-维的欧氏空间$\mathbb{R}^{n-l}$；特别地，$l = n$时解唯一，与(5.35) 类似，可以从下至上顺次求出$x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$;②$l < m$但$d_{l+1}, d_{l+2}, \cdots, d_m$不全为0，此时方程组矛盾，无解。

（2）非线性方程. 非线性代数方程指存在次数$n \geq 2$的代数方程。例如，一元n-次方程

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \tag{5.36}$$

和多元方程，如$xyz + x^2 + y = 0$等。

对于一元n次方程有一个著名的结论，欧阳博士解释说，即一元n-次方程在复数域上一定存在n个解（重根按重数计算），但在实数域和整数域上则不一定有解。例如，方程$2x = 3$在实数域$\mathbb{R}$上有解$x = 1.5$但在整数域$\mathbb{Z}$上没有解等，因在整数域上如果存在解x，则$2x$为一个整数而3为奇数，故在$\mathbb{Z}$ 上不可能有$2x = 3$成立。

在实数域或复数域上求解方程解的更一般情形，是由函数方程$F(x, y) = 0$确定y与x的函数关系f，即确定在什么条件下有解$y = f(x)$，在什么条件下有连续解或连续可微解$y = f(x)$？欧阳博士告诉惠子，这个问题已由隐函数定理解决，即如果$U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$且$F : U \to \mathbb{R}$ 连续可微，存在点$(x_0, y_0) \in U$使得

$$F(x_0, y_0) = 0 \text{ 但 } \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0，$$

则一定存在一个开区间$I \subset \mathbb{R}$，$x_0 \in I$和连续可微的函数$\varphi : I \to \mathbb{R}$使得对任意$x \in I$有$(x, \varphi(x)) \in U, \varphi(x_0) = y_0$且$F(x, \varphi(x)) = 0$，即解$y = \varphi(x)$且

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\left.\frac{\partial F}{\partial x}\middle/\frac{\partial F}{\partial y}\right.。$$

例如，对方程$xy + x^2 + y = 0$有$F(x, y) = xy + x^2 + y$。显然，$F(0, 0) = 0$且计算表明

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + 1 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 1 \neq 0。$$

故由隐函数定理，存在一个包含0的区间$I \subset \mathbb{R}$，且在区间I上方程$F(x, y) = 0$存在连续可微解$y = f(x)$。更进一步，由

$$xy + x^2 + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = f(x) = -\frac{x^2}{x+1}。$$

易于验证，函数$y = f(x)$在实数域$\mathbb{R}$上任一个$x \neq -1$的点都是连续可微的。

一般地，欧阳博士说，对给定的m个函数方程$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0,\ 1 \leq i \leq m$求满足一定函数性质的解$y_1, y_2, \cdots, y_m$，即

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0 \end{array}\right. \tag{5.37}$$

是多元函数方程中的一个基本问题。与单变量的情形类似，问题(5.37)已由一般情形的隐函数定理解决，即设

$$\mathbf{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\text{和}\mathbf{y}^0=(y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)\ \text{且}\ F_i(\mathbf{x}^0;\mathbf{y}^0)=0,\ 1\le i\le m,$$

用“雅可比矩阵$J_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}$在点$(\mathbf{x}^0;\mathbf{y}^0)$的邻域$U$上可逆”取代上面单变量情形中的“偏微分$\partial F/\partial y$在点$(x_0,y_0)$不等于0”，则解$y_1,y_2,\cdots,y_m$在点$(\mathbf{x}^0;\mathbf{y}^0)$的邻域$U$上不仅存在，而且连续可微。这里，矩阵$J_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}$是一个$m\times n$的雅可比矩阵，在函数变换，特别是坐标系变换中有着重要的作用，定义为

$$J_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}。\tag{5.38}$$

注意，函数y_i的全微分为

$$dy_i=\frac{\partial y_i}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial y_i}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}dx_n,$$

即雅可比矩阵的第i行元是函数y_i全微分的系数。特别地，当$m=n$时，雅可比矩阵$J_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}$为一个$n$-阶方阵，是$n$-维流形上点的切空间对偶的局部标架间的变换矩阵，在坐标变换下具有不变性，是微分不变性即(4.18)式的推广。

4.2.微分方程. 按系统的状态测定数据构建的基元微分方程是自治方程，欧阳博士告诉惠子，在理论上都应该可以求解，因为微分方程恰当地刻画了基元状态，而这些基元状态构成系统的状态，但如何求解微分方程得到基元的状态并不是一个简单问题。实践中，有大量的微分方程不能采用初等解法求得$\mathbf{x}$关于时间t的显式或隐式，而只能用函数级数对解$\mathbf{x}$进行逼近，近似地刻画系统状态。

（1）解存在性. 系统S的状态$x_v(t), v\in S$是系统基元随时间变化的状态。微分方程解的存在性，是按方程中给出的函数的性状判定解的存在性。欧阳博士解释说，这与解决一般代数方程解存在性的隐函数定理类似，需要给出微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x})\\ \mathbf{x}|_{t=t_0}=\mathbf{x}^0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\dot{x}_1=F_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\\ \dot{x}_2=F_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dot{x}_n=F_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\\ x_1(t_0)=x_1^0,\cdots,x_n(t_0)=x_n^0\end{cases}\tag{5.39}$$

解的存在条件。这里，$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\mathbf{F}=(F_1,F_2,\cdots,F_n)$。

那么，怎样由$\mathbf{F}$的性状知晓方程(5.39)解$\mathbf{x}$的存在性呢？欧阳博士解释说，我们从最简单情形，即$m=1,n=1$的情形开始。这时，方程(5.39)化为$\dot{x}=F(x)$，$x(t_0)=x^0$。解的存在性定理表明，如果存在实数$a,b\in\mathbb{R}$使得$F(t,x)$在矩形区域

$$\mathcal{L}:\ t_0-a\le t\le t_0+a,\quad x^0-b\le x\le x^0+b$$

上连续，且存在一个常数N使得对$\mathcal{L}$上的任意两个点(t,x)和(t,x')有

$$|F(x)-F(x')|\le N|t-t'|,$$

称为李普希茨条件，则方程(5.39)在区间$x^0-h_0\le x\le x^0+h_0$上存在唯一一个满足$\varphi(t_0)=x^0$ 的解$x=\varphi(t)$。这里，$h_0=\min\{a,b/M\}$，$M=\max\limits_{(t,x)\in\mathcal{L}}\{F(x)\}$。

那么，怎样由$F(x)$满足李普希茨条件得到这一结论呢？实际上，如果$x=\varphi(t)$是方程$\dot{x}=F(x)$的解，则有$\dot{\varphi}(t)=F(\varphi(t))$且$\varphi(t_0)=x^0$。这样，有

$$\varphi(t)=x^0+\int_{t_0}^{t}F(\varphi(s))ds, \tag{5.41}$$

称为毕卡逼近，可以逐次逼近方程(5.39)的解，即先由$\varphi(t)=x^0$代入(5.41)得到$\varphi_1(t)$，由$\varphi_1(t)$代入(5.41)得到$\varphi_2(t)$，$\cdots$。一般地，采用

$$\varphi_{k+1}(t)=x^0+\int_{t_0}^{t}F(\varphi_k(s))ds$$

迭代，得到序列$x^0,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t),\cdots$。

那么，序列$x^0,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t),\cdots$有什么性质呢？欧阳博士告诉惠子，这实际上是一个逐渐逼近方程(5.39)解的序列。为什么会是这样呢？因为假设了$F(x)$满足李普希茨条件，有

$$|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)|\le N\int_{t_0}^{t}|\varphi_k(s)-\varphi_{k-1}(s)|\,ds$$

且可以推导出

$$|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)|\le MN^n\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}。$$

这样，

$$\varphi(t)=\lim_{n\to+\infty}\left(\varphi_0(t)+\sum_{n=1}^{n}\left(\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\right)\right) \tag{5.42}$$

存在，且满足方程(5.39)。

类似地，这种毕卡逼近的方法可以一般性地得到方程(5.39)在$m = n \geq 2$时解的存在性。欧阳博士解释说，如果$\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是连续可微的，可以证明$\mathbf{F}$满足李普希茨条件，且存在实数$a$使在区间$(t_0 - a, t_0 + a)$上方程(5.39)存在唯一的一个满足$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$的解

$$\mathbf{x}: (t_0 - a, t_0 + a) \to \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})。 \tag{5.43}$$

实际应用中，方程(5.39)可解性定理中的条件很容易验证。例如，方程$\dot{x} = 2x^2$中函数$F(x) = 2x^2$在原点$(0,0)$的矩形区域

$$\mathcal{L}: \ -1 \leq t \leq 1, \ -1 \leq x \leq 1$$

上连续，且对$\mathcal{L}$上的任意x和x'有

$$|F(x) - F(x')| = \left|x^2 - {x'}^2\right| = |(x + x')(x - x')| \leq 2|x - x'|,$$

即满足李普希茨条件。这样，由$m = n = 1$时方程(5.39)解的存在性定理，在区间$-1/2 \leq x \leq 1/2$上存在唯一的一个满足$x(0) = 0$的解$x = \varphi(t)$。这里，$h_0 = 1/2$是因为函数$F(x)$在区间$\mathcal{L}$上的最大值为2，故$h_0 = \min\{1, 1/2\} = 1/2$。

（2）系统求解. 确定了方程(5.39)解的存在性，一个更现实的问题是如何对其采用初等解法求解。例如，欧阳博士问惠子，怎样对猫和老鼠构成的2-元系统(5.26)，即微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(-\mu + cy) \\ \dot{y} &= y(\lambda - bx) \end{cases}$$

进行求解呢？用第一个方程除以第二个方程，有

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{y(\lambda - bx)}{x(-\mu + cy)}。 \tag{5.44}$$

对方程(5.44)分离变量，再积分，就有

$$\begin{aligned} \frac{-\mu + cy}{y} dy = \frac{\lambda - bx}{x} dx \quad &\Rightarrow \quad \mu \ln |y| + \lambda \ln |x| = cy + bx + C \\ &\Rightarrow \quad y^\mu x^\lambda = C_1 e^{cy + bx}。 \end{aligned} \tag{5.45}$$

这里，C为积分常数，$C_1 = e^C$。

那么，是否方程(5.39)的解都能采用初等解法求解呢？答案是否定的！已经证明，即便是不太复杂的非线性微分方程，如黎卡提方程$\dot{x} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t)$，一

般也不能用初等解法求解。但是，欧阳博士告诉惠子，任何一个线性微分方程，特别是常系数线性微分方程都可以用初等解法求解。

首先，考虑一元线性微分方程

$$x^{(s)}+p_1(t)x^{(s-1)}+\cdots+p_{s-1}(t)x'+p_s(t)x=0。\tag{5.46}$$

这里，$s\geq 1, x^{(s)}=d^sx/dt^s$，$p_k(t)$为$t$的函数。设方程(5.46)存在$s$个解$x_1,x_2,\cdots,x_s$且$C_1,C_2,\cdots,C_s$为$s$个常数，则

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n}C_ix_i\right)^{(s)}+p_1(t)\left(\sum_{i=1}^{s}C_ix_i\right)^{(s-1)}+\cdots+p_s(t)\left(\sum_{i=1}^{s}C_ix_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{s}\left(x_i^{(s)}+p_1(t)x_i^{(s-1)}+\cdots+p_{s-1}(t)x_i'+p_s(t)x_i\right)=0,\end{aligned}$$

即$C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_sx_s$仍是方程(5.46)的解。现在，设$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_s(t)$是方程(5.46)的$s$个线性无关解，则由线性空间的生成，方程(5.46)的任一个解$x(t)$是$x_1(t)$, $x_2(t),\cdots,x_s(t)$的线性组合，即

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_sx_s(t),\tag{5.47}$$

称为方程(5.46)的通解。此时，如果$x^{(s-1)}(t_0),\cdots,x'(t_0)$和$x(t_0)$已知，则由(5.47)得到$s$个线性代数方程，由消元法可求知常数$C_1,C_2,\cdots,C_s$，得到初值问题

$$\begin{cases}x^{(s)}+p_1(t)x^{(s-1)}+\cdots+p_{s-1}(t)x'+p_s(t)x=0\\x^{(s-1)}(t_0)=x_{s-1}^0,x^{(s-2)}(t_0)=x_{s-2}^0,\cdots,x'(t_0)=x_1^0,x(t_0)=x_0\end{cases}$$

的解。特别地，当$p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t)$为常数$p_1,p_2,\cdots,p_n$时，方程(5.46)对应的特征方程为

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0。\tag{5.48}$$

设代数方程(5.48)中两两互异的根为λ_1（重数m_1）、λ_2（重数m_2）、$\cdots$、λ_s（重数m_s）及$m_1+m_2+\cdots+m_s=n$，则

$$\begin{cases}e^{\lambda_1t} & te^{\lambda_1t} & \cdots & t^{m_1-1}e^{\lambda_1t}\\e^{\lambda_2t} & te^{\lambda_2t} & \cdots & t^{m_1-1}e^{\lambda_2t}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\e^{\lambda_st} & te^{\lambda_st} & \cdots & t^{m_1-1}e^{\lambda_st}\end{cases}\tag{5.49}$$

构成方程(5.46)解空间的一组生成基。例如，二阶线性齐次方程$\ddot{x}-5\dot{x}+6x=0$的特征方程$\lambda^2-5\lambda+6=0$有两个根$\lambda_1=2,\lambda_2=3$。故该线性微分方程的解空间生成基为$\left\{e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t}\right\}$，通解为$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$。这里，$C_1,C_2$为常数。

其次，考虑$m=n\geq 2$的常系数线性微分方程$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+B$。这里，矩阵$\mathbf{A},\mathbf{B}$与方程(5.34)中的$\mathbf{A},\mathbf{B}$相同。类似地，设特征方程$\det(\mathbf{A}-\lambda I_n)=0$的根为$\lambda_1$（重数$m_1$）、$\lambda_2$（重数$m_2$）、$\cdots$、$\lambda_s$（重数$m_s$）且$m_1+m_2+\cdots+m_s=n$，则

$$\begin{pmatrix}p_{11}(t)\\p_{12}(t)\\\vdots\\p_{1n}(t)\end{pmatrix}e^{\lambda_1 t},\quad\begin{pmatrix}p_{21}(t)\\p_{22}(t)\\\vdots\\p_{2n}(t)\end{pmatrix}e^{\lambda_2 t},\cdots,\begin{pmatrix}p_{s1}(t)\\p_{s2}(t)\\\vdots\\p_{sn}(t)\end{pmatrix}e^{\lambda_s t}\tag{5.50}$$

构成解空间的一组生成基。这里，对整数$1\leq i\leq s,1\leq j\leq n$，$p_{ij}(t)$为$t$的次数不高于$m_i-1$的多项式，$I_n$为$n\times n$单位矩阵，$\det(a_{ij})_{n\times n}$为$(a_{ij})_{n\times n}$的行列式，定义为

$$\det(a_{ij})_{n\times n}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})。$$

这里，A_{ij}表示矩阵元a_{ij}对应的余阵，即矩阵$(a_{ij})_{n\times n}$中删去第i行第j列后余下的元构成的矩阵，$1\leq i,j\leq n$。例如，对$n=2$或$n=3$，有

$$\begin{aligned}\det(a_{ij})_{2\times 2}&=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},\\ \det(a_{ij})_{3\times 3}&=(-1)^{1+1}a_{11}\det\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\\&\quad+(-1)^{1+2}a_{12}\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{pmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}\\&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{23}a_{12}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}。\end{aligned}$$

应用(5.50)可以一般性地求解常系数线性微分方程$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+B$。例如，方程组$\dot{x}_1=x_2+x_3$，$\dot{x}_2=x_1+x_2-x_3$，$\dot{x}_3=x_2+x_3$的特征方程$|A-\lambda I_3|=-\lambda(1-\lambda)^2=0$，特征根为$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$，其解空间的一组生成基为

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^t,\quad\begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}e^t。$$

第5节 系统稳定

系统稳定还是不稳定源于系统的动态行为。例如，欧阳博士问惠子，水为什么要往低处流？因为水处的位置越高动能越大，越低动能越小。类似地，在弧线上运动的小球，总是受到一种向下运动的作用力G。于是在弧线上左右摇摆，最后停止在弧线中点A，如图5.28所示。对系统S构建的微分方程，如果是非线性的，则初等方法一般求不出这个方程的解。这时，由方程的解$x_v, v \in S$刻画系统S状态的想法必然落空。那么，是否可以不求解系统S的微分方程而分析出系统的状态呢？欧阳博士告诉惠子，这就是系统稳定性问题。

实践中，人们认知一件事物是对其表现的特征进行观测，由观测的数据构建数学模型把握系统状态。一个系统S的微分方程，只要观测数据正确地反映了系统的运动规律，构建的微分方程必然包含系统是否稳定的足够信息，不一定非要求出系统状态的解$x_v, v \in S$。欧阳博士说，这当中有两个问题需要分析：一是解对初值的依赖性，不能因为一点点观测误差使得出的系统状态存在较大差异，因为任何观测总存在一定的误差。为此，要求认知的系统状态连续地依赖观测初值，即要求方程解在初值的一个邻域上是连续的；二是初值的观测误差不能过于影响人对系统状态的判定。也就是说，当初值观测差很小的时候，得到的不同系统状态偏离也应很小，且长远看它们应趋于一致，即对系统不同的观测，判断系统状态的结果应当一致。否则，就无法把握系统S的状态，这就是系统的稳定性问题。

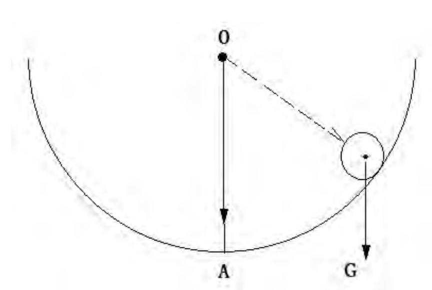


图5.28 弧线上运动的小球

5.1.解连续依赖初值. 一般地，称方程(5.39)的解$\mathbf{x}(t)$连续地依赖初值$\mathbf{x}^0$，是指在区间$I(t_0) = (t_0 - a, t_0 + a)$ 上，解$\mathbf{x}(t)$在点$\mathbf{x}^0$上连续，即对任意给定的一个数$\varepsilon > 0$，存在$\delta(\varepsilon, t_0, \mathbf{x}^0) > 0$使对满足$|t_0' - t_0| < \delta$和$|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}^0| < \delta$的任意$t_0', \mathbf{x}'^0$，在区间$I(t_0)$上存在解$\mathbf{x}\left(t, \mathbf{x}'^0\right)$，满足

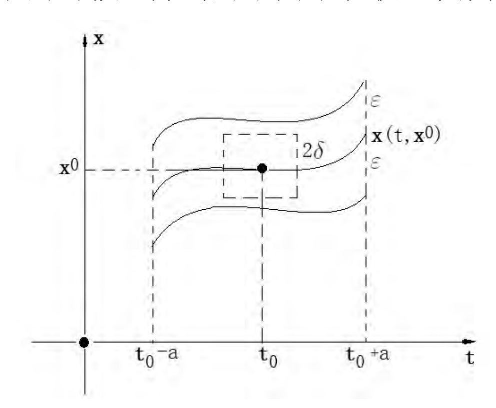


图5.29 解连续依赖初值

$$\left|\mathbf{x}\left(t, \mathbf{x}'^0\right) - \mathbf{x}\left(t, \mathbf{x}^0\right)\right| < \varepsilon, \quad t \in (t_0 - a, t_0 + a)。 \tag{5.51}$$

注意，方程(5.39)的解连续依赖初值的实质，是要求在初始观测值偏差不大时解在设定的偏差内，如图5.29所示，即在包含t_0的一个区间内，解$\mathbf{x}\left(t, \mathbf{x}'^0\right)$落在两条

相距2ε的曲线之间。认知的系统只有满足这个条件，人们对系统状态的测量才有意义，按测量数据构建的微分方程也才能很好地与系统状态拟合。

那么，是否可以仅由方程(5.39)中的函数$\mathbf{F}(\mathbf{x})$性状判定解$\mathbf{x}\,(t,\mathbf{x}^0)$在初值$\mathbf{x}^0$上是否连续呢？回答是肯定的！欧阳博士告诉，首先，当$n = 1$时，方程(5.39)为$\dot{x} = F(x)$且$x(t_0) = x^0$。这时，如果$F(x)$在平面区域$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$，如图5.29中的边长$2\delta$的正方形区域上连续且满足李普希茨条件，即存在常数$N$使任意$(t,x),(t',x') \in \mathcal{D}$有$|F(x') - F(x)| \leq N|x'-x|$，且$(t_0,x^0) \in \mathcal{D}$，则存在常数$a > 0$使在区间$[t_0-a,t_0+a]$上的解$x = \varphi(t,x^0)$存在且连续地依赖初值$x^0$。特别地，将$F(x)$对$x$满足李普希茨条件强化为在点$t_0$的一个邻域上连续可微，结论仍然成立，且可以得到方程(5.39)的解连续依赖初值的一般判别准则。

一般地，当$m = n \geq 2$，只要函数$\mathbf{F}(\mathbf{x})$在点$\mathbf{x}^0$的一个邻域$U \subset \mathbb{R}^n$上是连续可微的，则方程(5.39)的解$\mathbf{x}\,(t)$在初值$\mathbf{x}^0$上一定是连续的。更进一步，设解$\mathbf{x}\,(t)$是方程(5.39)在区间$[t_0,t_1]$上的解，$\mathbf{x}'(t)$是方程(5.39)的另一个解，满足$\mathbf{x}'(t_0) = \mathbf{x}'^0$且$\mathbf{x}'^0 \in U$，则存在一个常数$K$ 使得$|\mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}\,(t)| \leq K\left|\mathbf{x}'^0 - \mathbf{x}^0\right| e^{K(t-t_0)}$ 对任意$t \in [t_0,t_1]$成立。这里，$|\cdot|$表示$\mathbb{R}^n$中的向量长度或范数，即(4.33)式。

5.2.系统稳定性. 系统稳定性，欧阳博士说，是系统初值临近决定系统后续状态临近的一种性状。系统自治方程(5.39)的解中，使方程$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$的点$\mathbf{x}$称为系统的平衡点。显然$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$为自治方程(5.39)的一个平衡点，见图5.30。一般地，人们可以仅考虑方程(5.39)的初值为$\mathbf{0}$时的稳定性，因为如果$\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$，可以在方程(5.39)中引入一个变换$\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}^0$得到方程$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}')$。这时，点$\mathbf{0}$一定是方程$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}')$的一个平衡点。

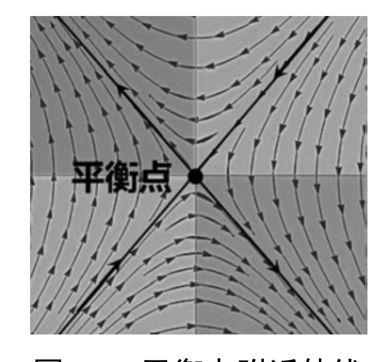


图5.30 平衡点附近轨线

一般地，设$\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$为方程$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$的平衡点。如果对点$\mathbf{x}^0$任一邻域$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$总

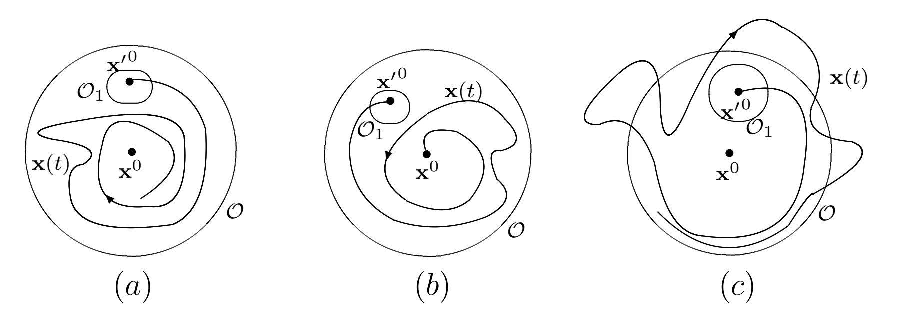


图5.31 平衡点稳定与不稳定

存在一个$\mathbf{x}^0$的邻域$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$，使方程$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$任一个满足初值$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}'^0 \in \mathcal{O}_1$的

解$\mathbf{x}(t)$存在且对$t \geq t_0$有$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{O}$，则称解$\mathbf{x}(t)$是稳定的，见图5.31$(a)$。更进一步，上面的邻域$\mathcal{O}_1$如果满足$\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0$，则称$\mathbf{x}^0$是渐近稳定的，见图5.31$(b)$。反之，点$\mathbf{x}^0$如果存在一个邻域$\mathcal{O} \subset \mathcal{R}^n$，对点$\mathbf{x}^0$的任一包含在$\mathcal{O}$中的子邻域$\mathcal{O}_1$，至少存在一个解$\mathbf{x}(t)$满足$\mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{O}_1$但对$t \geq t_0$，$\mathbf{x}(t)$不是整个地在邻域$\mathcal{O}$中，则称点$\mathbf{x}^0$是不稳定的，见图5.31$(c)$。

实际上，欧阳博士说，图5.31是$n = 2$时方程(5.39)解的情形，对应于平面曲线。这时，设方程(5.39)的解$x_1(t), x_2(t)$对$t \geq t_0$存在，且$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0$。采用平面坐标$x_1, x_2$及矩形邻域，平衡点稳定、渐进稳定情形即分别为对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在一个整数$\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$，使对满足$\left|x'^0_1 - x_1^0\right| \leq \delta$，$\left|x'^0_2 - x_2^0\right| \leq \delta$的所有初值$x'^0_1, x'^0_2$以及$t \geq t_0$，解$x'_1(t), x'_2(t)$存在且$|x'_1(t) - x_1(t)| < \varepsilon,\ |x'_2(t) - x_2(t)| < \varepsilon$或是

$$\lim_{t\to\infty}(x'_1(t) - x_1(t)) = 0,\ \lim_{t\to\infty}(x'_2(t) - x_2(t)) = 0。$$

不稳定则对应于这样的$\delta(t_0, \varepsilon)$不存在。欧阳博士告诉惠子，解$\mathbf{x}(t)$随时间t的变化在空间走过的路径称为轨线。这样，方程(5.39)的解稳定还是不稳定，就像是图5.31中的曲线那样，是如(a)或(b)一直在邻域$\mathcal{O}$内还是像(c)那样跑到了$\mathcal{O}$的外面。

那么，怎样由函数$\mathbf{F}(\mathbf{x})$的性状判定方程(5.39)的解$\mathbf{x}(t)$是稳定的、渐进稳定的还是不稳定的呢？有两种方法：一是由函数$\mathbf{F}$的性状判定，以李雅普诺夫直接法为代表；二是由方程解的性质判定，适用于方程(5.39)可以用初等解法求解的情形。

（1）李雅普诺夫直接判准. 假设$\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$是方程$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$的一个平衡点，$\Omega : |\mathbf{x}| < h,\ h > 0$为$\mathbf{0}$的一个邻域。李雅普诺夫直接判准是由函数$\mathbf{F}$的性状构造一个连续可微函数$L(\mathbf{x})$满足$L(\mathbf{0}) = 0$。称$L(\mathbf{x})$在$\Omega$上是非负的（非正的）或正定的（负定的），如果对任一$\mathbf{x} \in \Omega$有$L(\mathbf{x})$满足$L(\mathbf{x}^0) \geq 0\ (\leq 0)$或$> 0\ (< 0)$。这时，再由$L(\mathbf{x})$对时间$t$的导数$\dot{L}(\mathbf{x})$沿着解$\mathbf{x}$为正或为负，判定平衡点$\mathbf{x}^0$的稳定性。

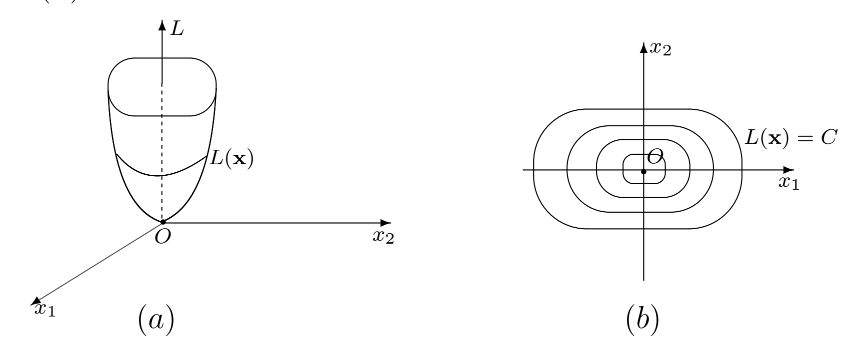


图5.32 原点邻域示意图

欧阳博士解释说，这时由于$L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$且$L(\mathbf{x})$在$\Omega$上连续可微。这样，导数$\dot{L}(\mathbf{x}) \leq 0$或$\geq 0$就可以刻画解$\mathbf{x}(t)$在$\Omega$内的性状。例如，对$\Omega$上的一个正定函数$L(\mathbf{x})$和任一个数$C > 0$，$L(\mathbf{x}) = C$是一个包围平衡点$\mathbf{0}$的邻域，如图5.32对$n = 2$时的情形所示。

由C的任意性，可以取$C>0$充分地小，以使$L(\mathbf{x})=C$整个地在Ω中。现在，设$\mathbf{x}(t)$是方程$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$在初值为$\mathbf{x}^0$时的解，则$L(\mathbf{x})=\mathbf{x}^0$ 也是包含点$\mathbf{0}$的邻域。应用求导的链式法则，如果

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{dL}{dx_i}\frac{dx_i}{dt}\leq 0, \tag{5.52}$$

则$L(\mathbf{x})$在由$L(\mathbf{x})=L(\mathbf{x}^0)$包含的邻域中是一个关于$t$的非增函数。这样，在$t\geq t_0$时有$L(\mathbf{x})\leq L(\mathbf{x}^0)$，即$\mathbf{x}(t)$ 整个落在$L(\mathbf{x})=L(\mathbf{x}^0)$包含的邻域中。这样，就知解$\mathbf{x}(t)$稳定。反之，如果$L(\mathbf{x})$在$\Omega$上不是常正或常负，则在$\mathbf{0}$的任一个邻域中均存在使$L(\mathbf{x})>0$的点$\mathbf{x}^0$。这时，如果有$\dot{L}(\mathbf{x})>0$，则$L(\mathbf{x})$是一个严格增函数，可以始终大于某个正数，即$\mathbf{x}(t)$不可能接近$\mathbf{0}$。这样，方程的$\mathbf{0}$解就是不稳定的。

按照这种思路，欧阳博士告诉惠子，李雅普诺夫得到了判定方程$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$的$\mathbf{0}$解稳定性准则，即：①如果在$\Omega$ 上存在一个正定的函数$L(\mathbf{x})$且$\dot{L}(\mathbf{x})\leq 0$，则系统的$\mathbf{0}$解是稳定的。更进一步，如果$\dot{L}(\mathbf{x})<0$，则系统的$\mathbf{0}$ 解是渐进稳定的；②如果在Ω上存在一个非常负（正）函数$L(\mathbf{x})$，且$\dot{L}(\mathbf{x})>0$，则系统的$\mathbf{0}$解是不稳定的。实践中，应用李雅普诺夫准则判定系统方程$\mathbf{0}$解稳定性的难点在于构造函数$L(\mathbf{x})$，人们尚没有找到构造函数$L(\mathbf{x})$的一般方法，仅是针对具体系统方程找寻$L(\mathbf{x})$。人们常取系统的能量函数或是二次函数$L(\mathbf{x})=\mathbf{x}A\mathbf{x}^t$等作为$L(\mathbf{x})$。这当中，$A$为一个正定矩阵。

例如，把图5.28中在弧线上运动的小球换做一个单摆，系统方程为$\ddot{\theta}+(g/l)\sin\dot{\theta}=0$。这里，$l$为摆的长度，$g$为重力加速度。引入参数$\omega=\dot{\theta}$，有

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\dot{\theta}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dot{\theta}=\omega\\ \dot{\omega}=-\frac{g}{l}\sin\omega\end{cases}。$$

显然，该方程组有$\mathbf{0}$解$\theta=\omega=0$，对应于单摆在最低点O的平衡位置。取函数

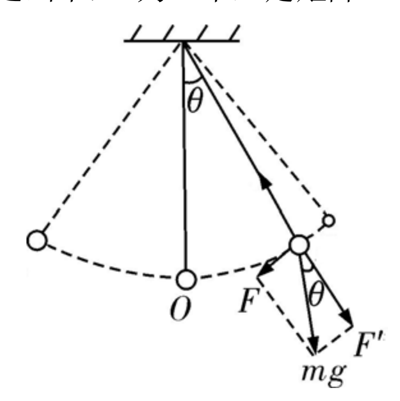


图5.33 单摆运动

$$L(\theta,\omega)=\frac{1}{2}\omega^2+\frac{g}{l}(1-\cos\theta),$$

即单摆的机械能，则易知在$(0,0)$附近$L(\theta,\omega)>0$，且

$$\frac{dL}{dt}=\omega\dot{\omega}+\frac{g}{l}\dot{\theta}\sin\theta=-\omega\cdot\frac{g}{l}\sin\theta+\frac{g}{l}\omega\sin\theta=0。$$

这样，由李雅普诺夫判准知$\mathbf{0}$解$\theta=\omega=0$是系统的稳定点，与实验结果即单摆在最低点O稳定一致。

(2)线性系统判准. 对线性自治方程$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$刻画的系统$S$，可以类似地构造李雅普诺夫函数$L(\mathbf{x})$判定系统的平衡点$\mathbf{0}$是否稳定。然而，欧阳博士告诉惠子，还有更简便的方法，因为线性系统可以采用初等解法求知系统解空间的生成基(5.49)和(5.50)，进而得到系统的一般状态$x_v(t), v \in S$。

注意，对任意一个复数λ，设$\lambda = \mathrm{Re}(\lambda) + i\mathrm{Im}(\lambda) = \alpha + i\beta$。则由欧拉公式$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，有$p(t)e^{\lambda t} = p(t)e^{\alpha t}\cdot e^{i\beta t} = p(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + ip(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t)$，其中$p(t)$是$t$的一个多项式。这样，

$$\lim_{t\to\infty} p(t)e^{\lambda t} = \lim_{t\to\infty}\left(p(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + ip(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right)。\tag{5.53}$$

显然，如果$\alpha > 0$，$\lim\limits_{t\to\infty} p(t)e^{\lambda t} \neq 0$，即系统的平衡点$\mathbf{0}$不稳定；反之，如果$\alpha < 0$，则对任意一个整数$n > 0$，应用洛必达法则，有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{(t^n)'}{(e^{\alpha t})'} = \frac{n}{\alpha}\lim_{t\to\infty}\frac{t^{n-1}}{te^{\alpha t}} = \cdots = \frac{n!}{\alpha^n}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^n e^{\alpha t}} = 0。\tag{5.54}$$

这样，对任意一个由(5.49)或(5.50)中的基元线性张成的解$\mathbf{x}(t)$，一定有$\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$，即平衡点$\mathbf{0}$是稳定的。从而，由线性系统的特征方程$|\mathbf{A} - \lambda I_n| = 0$根的性质可以直接判定系统平衡点$\mathbf{0}$是否稳定，即：①如果方程$|\mathbf{A} - \lambda I_n| = 0$所有根的实部均为负值，则平衡点$\mathbf{0}$是渐近稳定的；②如果方程$|\mathbf{A} - \lambda I_n| = 0$存在实部为正值的根，则平衡点$\mathbf{0}$是不稳定的；③如果方程$|\mathbf{A} - \lambda I_n| = 0$不存在实部为正值但存在实部为0的根，则平衡点$\mathbf{0}$可能是稳定的，也可能是不稳定的。这时，如果0实部根的重数与其对应的特征向量空间维数相等，平衡点$\mathbf{0}$是稳定的。否则，平衡点$\mathbf{0}$是不稳定的。

对于非线性系统(5.39)，即方程$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$在平衡点$\mathbf{x}^*$的稳定性，可以利用其在平衡点$\mathbf{x}^*$邻域上的线性近似(5.33)，即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad\Rightarrow\quad \dot{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\tag{5.55}$$

分析。这里，$(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$是$\mathbf{F}$对$\mathbf{x}$的雅可比矩阵在$\mathbf{x}^*$点上的矩阵，为一个常数矩阵，记为$\Lambda_{\mathbf{x}^*}$。那么，是否可以由线性近似(5.55)在平衡点$\mathbf{x}^*$的稳定性得到非线性方程$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$在平衡点$\mathbf{x}^*$的稳定性呢？这在一些特殊情形下，问题的答案是肯定的！

一般地，欧阳博士告诉惠子，方程(5.39)的一个平衡点$\mathbf{x}^*$称为是双曲型的，如果在这个平衡点上的特征方程$|\Lambda_{\mathbf{x}^*} - \lambda I_n| = 0$没有实部为0的根。这时，平衡点$\mathbf{x}^*$在非线性系统(5.39)的稳定性与其在线性近似(5.55)的稳定性一致。特别地，如果方程$|\Lambda_{\mathbf{0}} - \lambda I_n| = 0$所有根的实部均为负值，则平衡点$\mathbf{0}$在非线性系统(5.39)中是渐近稳定的。反之，如果方程$|\Lambda_{\mathbf{0}} - \lambda I_n| = 0$存在实部为正值的根，则平衡点$\mathbf{0}$在(5.39)中

是不稳定的。这样，人们可以由非线性系统的线性近似知晓其平衡点$\mathbf{0}$的稳定性。例如，假设一个非线性系统的线性近似为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

它的特征方程

$$|\mathbf{A} - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)^3 = 0$$

有一个3重根$\lambda = -2$，故平衡点$(0,0,0)$是这个系统的一个稳定点。

欧阳博士告诉惠子，确定了系统在平衡点的连续性和稳定性，就可以对系统进行观测、模拟，掌控系统的动态行为，进而服务于人类社会。听到这里，惠子反问道:“对事物的外在表现特征直接观测不是更简单吗？为什么还要采用系统认知，这样一来不是把对万物的认知复杂化了吗？”欧阳博士说，对事物外在表征观测仅能建立唯像理论，无法预测或掌控事物接下来的行为。

欧阳博士问惠子是否还记得盲人摸象那个寓言故事，惠子回答说:“记得！但还有一点不明白。寓言中明明是盲人感知的大象形状不对，可觉者为什么说他们感知的都正确，这是一种欺骗还是善意的谎言呢？”欧阳博士回答说:“你这个问题问的好！盲人摸象寓意的，恰是人类对万物认知的零散或局限性。那位觉者告诉那几个盲人的，是大象的外形具有他们每个人的感知特征。这样，对大象外形的认知需要把他们不同的感知组合在一起才是大象的外形特征。类似地，人类认知万物需要采用这种组合思想，把局部认知组合在一起，对事物进行系统认知，把握事物的本来面目。”惠子若有所悟地点点头说:“的确，系统认知是有这些优点，可以整体上把握事物的动态行为，得知因果。”

欧阳博士继续说:“系统认知是人类把握一件事物变化的根本，是一种正确的认知理念。但对一件事物要建立系统认知并不是一件容易的事情！首先，需要知道构成事物的基元；其次，需要知道基元间的相互作用。这样才有可能建立系统的状态方程。如果用基本粒子或细胞、基因作为系统基元，基元数目庞大，构建的系统复杂得不得了，对这样的系统状态方程怎样求解？状态方程可以采用初等解法求解还好，如不能用初等方法求解或是系统方程相互矛盾无解怎么办？系统还是那个系统，这时怎么刻画系统状态？这些问题如果得不到有效解决，人类采用系统认知万物的想法本身也有局限!”

欧阳博士问惠子是否知道数学组合化猜想，又称为“CC猜想”。惠子回答说不知道。欧阳博士告诉她，数学组合化猜想是基于万物组合这一哲学结论，认为数学及一切基于数学建立的科学都可以选择有限个组合规则进行组合重建或是组合推广，以解决人类在认识上的工具或方法，即提炼事物的空间1-维组合或图结构，在这种图结构上赋予经典数学中的元，如数、数组、函数、向量、矩阵等数学元，将它们视为组合结构上类似于能量的流动，遵从物质守恒定律，并以这种赋权的空间图结构为数学元进行研究，称为数学组合学。这是解决人类认知万物的局限性，实现由局部到整体认知的方法，也就是盲人摸象寓言中那位觉者指明的认知方法，因为人在认知事物的过程中等同于盲人摸象，是一种实现由“未知”到“知”的过程。

第6节 注释与评论

6.1. 系统认知事物是还原论的代表，即将一件事物还原为由一个个基元组成的系统，由基元行为刻画事物的行为。注意，这里的“基元”不一定是物质构成中的基本粒子或生物构成中的细胞和基因，而是刻画事物行为所需的最小单元。这样，一件事物等价于一个系统，系统结构对应一个由基元组成的标号图，基元状态在统一量纲下的方程构成系统状态方程，结合系统的输入和输出方程构成系统方程，见文献[Mia]和[YGH]。

6.2. 系统方程的求解等同于解一个由状态方程、输入和输出方程构成的方程组。一般地，求解系统方程组的目的在于由方程组的解把握系统状态，但对于非线性系统并没有统一的求解方法，仅是对线性系统或一些特别的方程组可以一般性地求精确解。对非线性系统方程组，人们采用多元泰勒级数展开非线性项，取线性部分近似模拟，判断方程组解的性质。一般地，也可以由李雅普诺夫判准等直接判别系统是否稳定，见文献[Gof]、[BrG]、[HSD]、[Lyn]和[Mia]等。

6.3. 数学组合化猜想是事物系统认知的数学表现，首次出现在2005年我为中国科学院完成的博士后报告[Mao1]或[Mao21]第1版第5章的前言中，后以图在曲面上的2-胞腔嵌入[Liu1]、[MoT]、[Whi]与曲面剖分[MaT1]为特例，提出组合思想与数学组合化猜想的文献[Mao8]在“全国第二届组合学与图论学术交流大会”（2006年8月16-19日，天津）上报告，同与会学者进行了充分讨论，也在网上与国外几位教授进行了交流，得到了时任国际数学家联盟主席Lovasz教授的肯定，促成了组合思想在数学科学发展中应用的传播。个人则在提出猜想的基础上完成了一系列论文，如文献[Mao9]-[Mao20]、[Mao23]、[Mao24] - [Mao25]和[Mao37] 等，并于2007年在美国创办学术期刊《国际数学组合杂志》，在[Mao21]第二版中专设一章介绍这个猜想。这

当中，组合几何与场论[Mao23]是在数学组合化猜想促动下完成的一本涵盖组合几何、拓扑学和组合场论的著作，出版后得到国际数学界的普遍重视；文献[Mao8]则成为Wikipédia（维基百科全书）中解释组合学一词的匈牙利语kombinatorika的引用文献。

数学组合化猜想与其说是一个数学猜想，更不如说是与万物是组合的相对应，旨在推动人类认知万物，发展科学的一种哲学思想。文献[Mao8]中，以图在曲面上的2-胞腔嵌入，即曲面的组合化为例提出这一思想，断言了“任何一门数学科学可以组合化或是组合重建”，即可以选择有限条组合规则、公理对数学进行重构或是推广，在组合或拓扑图结构上构建一种包容不同数学分支的数学组合学，实现科学的组合化与组合重构，以推动人类文明的进步。



山不在高，有仙则名；水不在深，有龙则灵。

— 唐.刘禹锡《陋室铭》

$C_{\mathscr{M}}$
万物组合

第 6 章

系 统 同 步

****

浪花有意千重雪；

桃李无言一队春；

一壶酒，一竿纶；

世上如侬有几人？

— 南唐.李煜《渔夫》

************************** 毛林繁. 万物组合论 ***************************

第1节 同步抽象

一般地，人们将不同事物在变化过程中保持固定的相对关系，同时产生、同时进行的一种整齐、步调一致现象称为“同步”。欧阳博士告诉惠子，同步现象普遍存在于自然和人类社会中，有着广泛的实际意义。例如，军队礼仪活动中的“陆、海、空”三军仪仗队在检阅中的军姿、持械、队列、步伐、抬脚、口号声和行进速度等的整齐与协调，映射出的是军队纪律严明、训练有素。同步这种整齐、一致的协调现象，映入人眼中的是一幅幅美丽的画卷，如图6.1 中的图（a）武术表演、（b）飞行表演和（c）即将成熟的稻谷等，是一种美的享受。

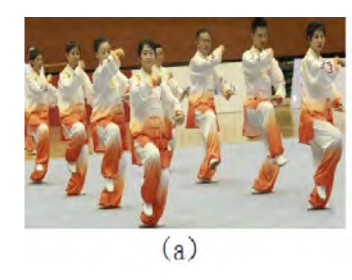
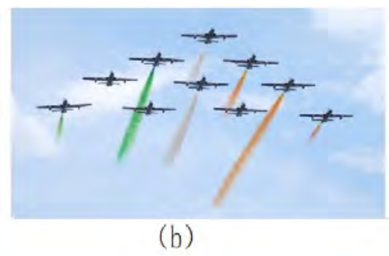
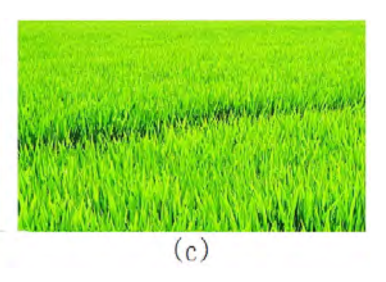

(a)

(b)

(c)

图6.1 同步现象

一般地，称系统同步，是指系统基元在变化过程中保持一种相对固定的变化关系或状态，如图6.1（a）和（b）中的动作协调与队形，（c）中每一株稻谷的高矮、形状、成熟度与颜色的一致等。

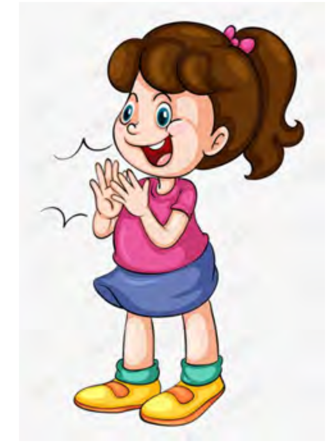


图6.2 同步掌声

欧阳博士问惠子：“学校开表彰大会时，校领导讲完话你们要不要鼓掌？”惠子回答：“要鼓掌，这是开会前老师要求的。”欧阳博士继续问她：“那你们怎么判断需要鼓掌了呢？”惠子说：“有好几种情形呢！一般地，讲话结束有结束语或动作暗示，这时鼓掌好判断，但讲话中什么时候需要鼓掌不好判断，只能跟着边上的同学一起鼓掌。”欧阳博士问她：“跟着边上同学鼓掌，掌声齐么？”惠子说：“开始几秒钟不齐，几秒钟以后掌声就整齐了。”欧阳博士告诉她，如果把开会的学生看作一个系统，每个学生看作一个系统基元。那么，学校表彰大会上，老师和学生鼓掌由不齐到齐就是一种系统同步。也正因为如此，一些重要的会议组织时，会专门安排

一些带头鼓掌的人，以促成台下一致鼓掌，形成同步掌声，如图6.2所示。那么，怎样刻画系统同步这类现象呢？欧阳博士解释说，这首先需要科学定义系统同步。

1.1.同步轨道. 一个系统S由基元构成。这样，系统S随时间t的变化，即系统状态由基元轨线$x_v(t), v\in S$进行刻画。对应的，同步是系统S中基元的一种特殊状态，正如上面给领导讲话鼓掌一样，开始不一定一致，但随时间的进程，基元变化渐趋于一致，即对任一个$v\in S$，$\mathbf{x}_v(t)=\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_v(t)\right)$。这里，$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_v(t)\right)$为基元$v$在时刻$t_0$同步后变化的轨线，如图6.3所示。

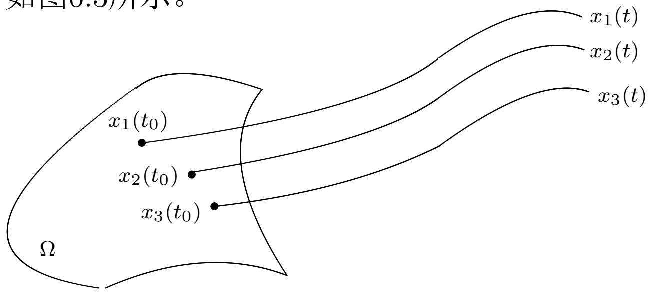


图6.3 同步轨道

系统基元的轨线同步时，对任意两个基元$v,u\in S$，有$\mathbf{x}_u(t)-\mathbf{x}_v(t)=\mathbf{x}_u(t_0)-\mathbf{x}_v(t_0)=\mathbf{c}$为一个常向量，即$\mathbf{x}_u(t)=\mathbf{x}_v(t)+\mathbf{c}$，$\mathbf{x}_u(t)$为轨线$\mathbf{x}_v(t)$平移$\mathbf{c}$的结果。这样，系统中任一个基元的状态函数可以表示为

$$\mathbf{x}_u(t)=\mathbf{x}_v(t)+\mathbf{c}_u+\mathbf{o}_u(t),\quad u\in S。\tag{6.1}$$

这里，$t\to\infty$时有$\mathbf{o}_v(t)\to\mathbf{0}$，为$t$的高阶无穷小，$\mathbf{c}_u$是依赖于基元$u$的常向量。注意，同步轨道是系统基元$\mathbf{x}_v(t), v\in S$作用结果的表现。故此，按这一特征，可以一般性地构造出同步轨道为：对任一个系统S，如果对任一个$u\in S, u\neq v$有$\mathbf{x}_u=\mathbf{x}_v(t)+\mathbf{c}_u+\mathbf{o}_v(t)$，则系统$S$的基元轨线构成同步轨道。例如，对图6.4所示的一个4-元系统S取

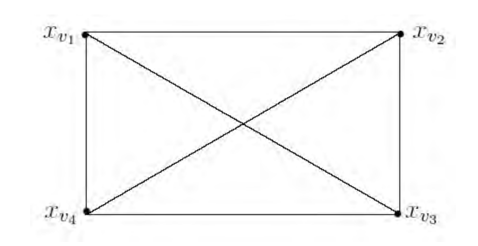


图6.4 一个4-元系统

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{v_1}(t) &= 1+t^5\sin t+\frac{\cos^2 t}{t},\quad \mathbf{x}_{v_2}(t)=3+t^5\sin t+te^{-t},\\ \mathbf{x}_{v_3}(t) &= 5+t^5\sin t+\frac{6}{t^2},\quad \mathbf{x}_{v_4}(t)=7+t^5\sin t+3t^5e^{-2t},\end{aligned}$$

则对任意整数$2\leq i\leq 4$有

$$x_{v_2}(t) = 2+x_{v_1}(t)+\left(te^{-t}-\frac{\cos^2 t}{t}\right)=2+x_{v_1}(t)+o(t),$$

$$
\begin{aligned}
x_{v_3}(t) &= 4 + x_{v_1}(t) + \left(\frac{6}{t^2} - \frac{\cos^2 t}{t}\right) = 4 + x_{v_1}(t) + o(t), \\
x_{v_4}(t) &= 6 + x_{v_1}(t) + \left(3t^5 e^{-2t} - \frac{\cos^2 t}{t}\right) = 6 + x_{v_1}(t) + o(t)。
\end{aligned}
$$

这样，由同步轨道的定义，S的基元轨线构成同步轨道。但是，如果取图6.3中基元的状态函数为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{v_1}(t) &= t\sin t + 2t^2, \quad \mathbf{x}_{v_2}(t) = t\sin t + te^{-t}, \\
\mathbf{x}_{v_3}(t) &= t\sin t + t^2 e^{-t}, \quad \mathbf{x}_{v_4}(t) = t\sin t + e^{-2t}\cos t,
\end{aligned}
$$

则因$t \to \infty$时$|\mathbf{x}_{v_1}(t) - \mathbf{x}_{v_2}(t)| = |2t^2 - te^{-t}| \to \infty$，$|\mathbf{x}_{v_1}(t) - \mathbf{x}_{v_3}(t)| = |2t^2 - t^2 e^{-t}| \to \infty$和$|\mathbf{x}_{v_1}(t) - \mathbf{x}_{v_4}(t)| = |2t^2 - e^{-2t}\cos t| \to \infty$，$S$中的基元轨线不构成同步轨道。

上述事例表明，如果系统基元的状态$\mathbf{x}_v(t), v \in S$是已知的，判定一个系统S的基元是否构成同步轨道是一件并不困难的事。这当中的问题在于，人们是在某一段或某几段时间对一个系统S基元的状态进行观测，不能直接知晓基元状态$\mathbf{x}_v(t)$，需要求解由观测结果建立的系统状态方程。然而，对非线性系统状态方程，人们一般无法采用初等解法求解$\mathbf{x}_v(t), v \in S$。在这种情形下，怎样判断一个系统是否同步呢？欧阳博士解释说，这时一般是由方程的结构特征进行分析判断。假设$|S| = m$，系统S由基元$v_1, v_2, \cdots, v_m$构成。则S基元同轨的一个典型特征是存在一个时间t^*，使得$t \geq t^*$时有$\dot{\mathbf{x}}_v(t) = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_v(t)\right), v \in S$，即在时间$t^*$ 后所有基元的状态方程相同。这时，系统S可以由任一个基元的状态进行刻画，可以抽象为一个质点，S的状态方程对应于一个质点方程，即$t \geq t^*$时系统S的状态方程由

$$
\left\{\begin{array}{l}
\dot{\mathbf{x}}_{v_1}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{v_1}(t)\right) + \mathbf{y}_{v_1}(t) \\
\dot{\mathbf{x}}_{v_2}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{v_2}(t)\right) + \mathbf{y}_{v_2}(t) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{\mathbf{x}}_{v_m}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{v_m}(t)\right) + \mathbf{y}_{v_m}(t)
\end{array}\right.
\Rightarrow
\left\{\begin{array}{l}
\dot{\mathbf{x}}_{v_1}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{v_1}(t)\right) \\
\dot{\mathbf{x}}_{v_2}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{v_2}(t)\right) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{\mathbf{x}}_{v_m}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{v_m}(t)\right)
\end{array}\right.
$$

或简记为

$$
\dot{\mathbf{x}}_v(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_v(t)\right), \quad v \in S。 \tag{6.2}
$$

这里，$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{F}}$，$\mathbf{y}_v(t) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{c}_v + \mathbf{o}_v(t)\right) = \dot{\mathbf{o}}_v(t)$且当$t \to \infty$时有$\mathbf{y}_v(t) \to \mathbf{0}$，为$t$的一个高阶无穷小向量。对任一个基元$v \in S$，方程(6.2)对应于基元$v$的状态方程，系统基元同轨时，基元间无相互作用，方程(6.2)对应的实际上是一个孤立点方程，即

$$
\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)\right)。 \tag{6.3}
$$

这里，$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m), \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$。那么，同步系统(6.2) 的通解$\overline{\mathbf{x}}$是否满足方程(6.3) 呢？以线性系统为例，对任意选定的m 个常数$C_1, C_2, \cdots, C_m$，通解$\overline{\mathbf{x}}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_1\mathbf{x}_12(t) + \cdots + C_1\mathbf{x}_m(t)$。这时，如果$\mathbf{f}$ 是一个线性函数，则由方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{v_1}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{v_1}(t)\right) \\ \dot{\mathbf{x}}_{v_2}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{v_1}(t)\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{\mathbf{x}}_{v_m}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{v_m}(t)\right) \end{cases} \tag{6.4}$$

有

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^{m} C_i \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^{n} mC_i\mathbf{x}_i(t)\right) = \mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right), \tag{6.5}$$

即通解$\overline{\mathbf{x}}(t)$为方程(6.3)的解。反之，设$\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_m(t)$为方程(6.3)的$m$个独立解，即满足(6.4)。那么，以$\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_m(t)$为系统$S$的基元$v_1, v_2, \cdots, v_m$的状态即满足方程(6.2)。这样一来，$S$的基元轨线构成同步轨道。换言之，在方程(6.3)的m个独立解基础上增加无穷小向量，即以$\mathbf{x}_1(t)+\mathbf{o}_1(t), \mathbf{x}_2(t)+\mathbf{o}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_m(t)+\mathbf{o}_m(t)$为系统$S$的基元状态，则由(6.1)式知系统$S$的基元轨线构成同步轨道。这里，$\mathbf{o}_i(t), 1 \leq i \leq m$为$t$的高阶无穷小向量。

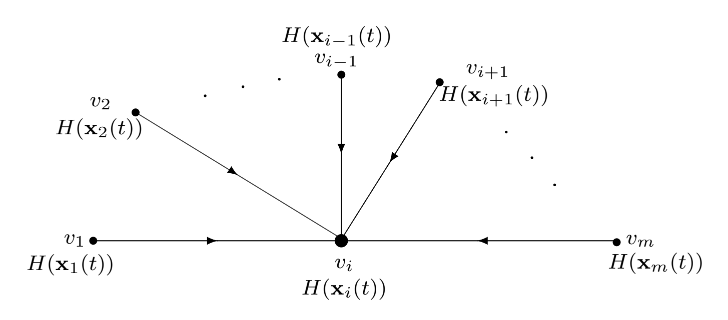


图6.5 基元作用

1.2.同步方程. 设S是由m个基元$v_1, v_2, \cdots, v_m$构成的一个同步系统，基元状态为$\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_m(t)$。欧阳博士告诉惠子，同步轨道的特点在于每个基元$v$的状态可以分解为两部分，即(6.3)中的孤立点函数$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_v(t)\right)$和无穷小向量$\mathbf{o}_v(t)$。相应地，对任意整数$1 \leq i, j \leq m$，基元$v_j$对$v_i$的作用也可以分解为两部分，一部分作用是对$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{v_i}(t)\right)$的贡献；另一部分是对无穷小向量$\dot{\mathbf{o}}_{v_i}(t)$的贡献。这时，如果把一个基元对另一个基元的作用类比势能的作用，则v_j对v_i的作用强度为$\mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t)) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i(t))$，如图6.5所示。从而，系统$S$中基元的状态方程可以一般地采用方程

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + c\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left(\mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t)) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i(t))\right), \quad 1 \leq i \leq m \tag{6.6}$$

进行刻画。这里，$c>0$为网络耦合强度，a_{ij}为系统标号图$G^L[S]$的邻接矩阵$M(G)=(a_{ij})_{m\times m}$中位于$(i,j)$, $1\leq i,j\leq m$位置上的元，定义为

$$\begin{cases} a_{ij}=1, & (v_i,v_j)\in E\left(G^L[S]\right) \\ a_{ij}=0, & (v_i,v_j)\notin E\left(G^L[S]\right) \end{cases}。\tag{6.7}$$

例如，对任意整数$m\geq 1$，有向圈$\overrightarrow{C}_m$和完全图K_m的邻接矩阵$M\left(\overrightarrow{C}_m\right)$, $M\left(K_m\right)$分别为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}。$$

这当中，$M\left(K_m\right)$是一个对称矩阵，即对任意整数$1\leq i,j\leq m$有$a_{ij}=a_{ji}$，且一般地，对于一个无向图G，由邻接矩阵的定义$M(G)$一定是一个对称矩阵。但对于非对称定向的有向图$\overrightarrow{G}$，即存在顶点对$v,u\in V\left(\overrightarrow{G}\right)$使得$(v,u)\in E\left(\overrightarrow{G}\right)$但$(u,v)\notin E\left(\overrightarrow{G}\right)$，这种性质不再成立，即$M\left(\overrightarrow{G}\right)$不是对称矩阵。例如，上面有向圈$\overrightarrow{C}_m$的邻接矩阵$M\left(\overrightarrow{C}_m\right)$。

特别地，对于基元组合结构为$\overline{C}_m, c=1$或者$K_m, c=2$的系统S，由方程(6.6)系统S的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &=& \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t))+\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_2(t)\right)-\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_1(t)\right) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &=& \mathbf{f}(\mathbf{x}_2(t))+\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_3(t)\right)-\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_2(t)\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{\mathbf{x}}_m(t) &=& \mathbf{f}(\mathbf{x}_m(t))+\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_1(t)\right)-\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_m(t)\right) \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &=& \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t))+2\sum\limits_{j=1}^{m}\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_j(t)\right)-2m\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_1(t)\right) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &=& \mathbf{f}(\mathbf{x}_2(t))+2\sum\limits_{j=1}^{m}\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_j(t)\right)-2m\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_2(t)\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{\mathbf{x}}_m(t) &=& \mathbf{f}(\mathbf{x}_m(t))+2\sum\limits_{j=1}^{m}\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_j(t)\right)-2m\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_m(t)\right) \end{cases}$$

形式上，引入负的拉普拉斯矩阵L可以对方程(6.6)进一步简化。这里，$L=$

$(l_{ij})_{m\times m}$，即对任意整数$1\leq i,j\leq m$，矩阵元l_{ij}定义为

$$l_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i\neq j \\ -\sum\limits_{j\neq i}a_{ij}, & i=j \end{cases}$$

则方程(6.6)可以简化为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t))+c\sum_{j=1}^{m}l_{ij}\mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t)),\quad 1\leq i\leq m。\tag{6.8}$$

1.3.系统同步. 一般地，对一个由m个基元$v_1,v_2,\cdots,v_m$构成的系统S，如果对任意整数$1\leq i\neq j\leq m$，以及解域Ω中任意给定的初始点，在$t\to\infty$ 时基元的轨线趋于一致，即

$$\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)\to\mathbf{0}\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{t\to\infty}|\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)|=0,\tag{6.9}$$

则称系统S完全同步。这里，$|\mathbf{a}|$为向量$\mathbf{a}$的长度或范数(4.33)。注意，同步轨道依赖于初值，正是由于轨线始点的不同导致的基元轨线不同。但系统完全同步则是系统的一种整体收敛性质，仅依赖于方程的通解。这时，如果定义点集

$$\mathrm{Sta}[S]\ =\ \{\ (\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t),\cdots,\mathbf{x}_m(t))\mid\mathbf{x}_1(t)=\mathbf{x}_2(t)=\cdots=\mathbf{x}_m(t)\}\tag{6.10}$$

则方程(6.6)的通解收敛到点集Sta$[S]$，即$\lim\limits_{t\to\infty}(\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t),\cdots,\mathbf{x}_m(t))\in\mathrm{Sta}[S]$, $1\leq i\leq m$。欧阳博士解释说，这是一种有意义的抽象，因为由此人们可以由点集Sta$[S]$的性质得到系统S的同步性质。

对线性系统(6.4)，我们已在(6.5)中验证了其通解满足孤立点方程(6.3)。那么，对于非线性系统(6.6)是否存在解$\mathbf{x}_i(t)$的组合$\overline{\mathbf{x}}$使(6.3)成立呢？与线性系统不同，这时需要$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(t))$, $1\leq i\leq m$满足一定的条件。注意，拉普拉斯矩阵L的行和为0，即它的行向量线性相关。这时，特征方程$|L-\lambda I_m|=0$存在$\lambda=0$的解。更进一步，如果这时L中有$m-1$行线性无关，则线性方程$\mathbf{X}\cdot L=\mathbf{0}$存在非负的非$\mathbf{0}$解$\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$，即$\xi_i\geq 0$, $1\leq i\leq m$且不全为0。不失普遍性，可设$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_m=1$，因如若不然，$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_m=K>1$，用$\xi_1/K,\xi_2/K,\cdots,\xi_m/K$取代$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$定有$\xi_1/K+\xi_2/K+\cdots+\xi_m/K=1$。

现在，定义$\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t),\cdots,\mathbf{x}_m(t)$的加权平均

$$\overline{\mathbf{x}}\ =\ \sum_{k=1}^{m}\xi_k\mathbf{x}_k(t),\tag{6.11}$$

则因为当$t\to\infty$时，有

$$\begin{aligned}0\le|\mathbf{x}_i(t)-\overline{\mathbf{x}}| &= \left|\mathbf{x}_i(t)-\sum_{k=1}^{m}\xi_k\mathbf{x}_k(t)\right|\\ &= \left|\sum_{k=1}^{m}\xi_k\left(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_{v_k}(t)\right)\right|\le\sum_{k=1}^{m}\xi_k\left|\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_{v_k}(t)\right|\to 0,\end{aligned}$$

即$\lim\limits_{t\to\infty}|\mathbf{x}_i(t)-\overline{\mathbf{x}}|=0$。反之，若对任意整数$1\le i\le m$有$\lim\limits_{t\to\infty}|\mathbf{x}_i(t)-\overline{\mathbf{x}}|=0$，设

$$N_{\max}=\max\left\{\ |\mathbf{x}_i(t)-\overline{\mathbf{x}}\ ||\ 1\le i\le m\right\},$$

则有$\lim\limits_{t\to\infty}N_{\max}=0$。同时，应用三角不等式(4.35)，即$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\le|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$知

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)| &= |\mathbf{x}_i(t)-\overline{\mathbf{x}}(t)+\overline{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{x}_j(t)|\\ &\le |\mathbf{x}_i(t)-\overline{\mathbf{x}}(t)|+|\overline{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{x}_j(t)|\le 2N_{\max}。\end{aligned}$$

在上式中取$t\to 0$，则有$|\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)|\to 0$。这样，就得到系统$S$ 同步的一个等价条件，即系统S同步当且仅当对任意整数$1\le i\le m$有

$$\lim_{t\to\infty}|\mathbf{x}_i(t)-\overline{\mathbf{x}}(t)|=0。\tag{6.12}$$

现在，欧阳博士告诉惠子，由系统同步的等价条件(6.12)可以得到孤立点方程(6.3)解的条件了。类似于讨论方程平衡点的稳定性，按孤立点方程中函数$\mathbf{f}$的性质，分为以下两种情形：

（1）线性同步. 一个同步系统称为是线性的，如果方程(6.8)中的函数$\mathbf{f}$是线性齐次的，且有 $\dot{\overline{\mathbf{x}}}(t)=\mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}(t))$。那么，为什么$\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t),\cdots,\mathbf{x}_m(t)$的加权平均$\overline{\mathbf{x}}$是孤立点方程(6.3)的解呢？这时，由于$\boldsymbol{\xi}$为线性代数方程$\mathbf{X}\cdot L=\mathbf{0}$的非$\mathbf{0}$解，即$\boldsymbol{\xi}\cdot L=\mathbf{0}$，由方程(6.8)有

$$\begin{aligned}\dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) &= \sum_{i=1}^{m}\xi_i\dot{\mathbf{x}}_i(t)=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\left(\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t))+c\sum_{j=1}^{m}l_{ij}\mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t))\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\xi_i\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t))+c\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_i l_{ij}\mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t))\\ &= \mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i\mathbf{x}_i(t)\right)+c\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,x_m\right)L\left(\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_1(t)\right),\cdots,\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_m(t)\right)\right)^t\\ &= \mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i\mathbf{x}_i(t)\right)+c\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot L)\cdot\left(\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_1(t)\right),\cdots,\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_m(t)\right)\right)^t\\ &= \mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i\mathbf{x}_i(t)\right)+c\cdot\mathbf{0}\cdot\left(\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_1(t)\right),\cdots,\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_m(t)\right)\right)^t=\mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}(t)),\end{aligned}$$

即$\overline{\mathbf{x}}$为孤立点方程 $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}(t))$的解。

（2）李普希茨同步. 一个同步系统称为是李普希茨的，如果方程(6.8)中的函数$\mathbf{f}$满足李普希茨条件，即存在一个常数N使得$|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})|\leq N|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$，则这时一定有$\lim\limits_{t\to\infty}\left|\dot{\overline{\mathbf{x}}}(t)-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right|=0$, 即$\overline{\mathbf{x}}(t)$是孤立点方程(6.3)的解。怎样能够得到这一结论呢？注意，对任意整数$1\leq i\leq m$, 由(6.12)式知$t\to\infty$时有$|\mathbf{x}_i(t)-\overline{\mathbf{x}}(t)|\to 0$，故

$$0\leq\left|\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i\right)-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}\right)\right|\leq N\left|\mathbf{x}_i(t)-\overline{\mathbf{x}}(t)\right|\to 0。$$

这时，由方程(6.8)并应用$\boldsymbol{\xi}\cdot L=\mathbf{0}$，当$t\to\infty$时有

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\dot{\overline{\mathbf{x}}}(t)-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right|=\left|\sum_{i=1}^{m}\xi_i\dot{\mathbf{x}}_i(t)-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right|\\
&= \left|\sum_{i=1}^{m}\xi_i\left(\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t))+c\sum_{j=1}^{m}l_{ij}\mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t))\right)-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right|\\
&= \left|\sum_{i=1}^{m}\xi_i\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t))+c\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_i l_{ij}\mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t))-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right|\\
&= \left|\sum_{i=1}^{m}\xi_i\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t))+c\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot L)\cdot\left(\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_1(t)\right),\cdots,\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_m(t)\right)\right)^t-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right|\\
&= \left|\sum_{i=1}^{m}\xi_i\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t))+c\cdot\mathbf{0}\cdot\left(\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_1(t)\right),\cdots,\mathbf{H}\left(\mathbf{x}_m(t)\right)\right)^t-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right|\\
&= \left|\sum_{i=1}^{m}\xi_i\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i(t)\right)-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right)\right|\leq\sum_{i=1}^{m}\xi_i\left|\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i(t)\right)-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right|\\
&\leq N\sum_{i=1}^{m}\xi_i\left|\mathbf{x}_i(t)-\overline{\mathbf{x}}(t)\right|\to 0。
\end{aligned}$$

故此，当$t\to\infty$时有 $\left|\dot{\overline{\mathbf{x}}}(t)-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right|\to 0$，即$\lim\limits_{t\to\infty}\left|\dot{\overline{\mathbf{x}}}(t)-\mathbf{f}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right|=0$。

例如，图6.6所示的4-元星型系统的状态方程为

$$\left\{\begin{aligned}
\dot{x}_1(t)&=-x_1(t)+2x_4(t)=x_1(t)-2\left(x_1(t)-x_4(t)\right)\\
\dot{x}_2(t)&=-x_2(t)+2x_4(t)=x_2(t)-2\left(x_2(t)-x_4(t)\right)\\
\dot{x}_3(t)&=-x_3(t)+2x_4(t)=x_3(t)-2\left(x_3(t)-x_4(t)\right)\\
\dot{x}_4(t)&=-x_4(t)+2x_1(t)=x_4(t)-2\left(x_4(t)-x_1(t)\right)
\end{aligned}\right.$$

图6.6 4-元星型系统

这当中，$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))=\mathbf{x}(t)$，耦合常数$c=2$。

该系统对应的邻接矩阵$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)^t$。这当中，行向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,0,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,0,-1)$；通解为 $x_1(t)\ =C_1e^t-$

C_2e^{-3t}，$x_2(t) = C_1e^t - C_2e^{-3t} + C_3e^{-t}$，$x_3(t) = C_1e^t - C_2e^{-3t} + C_4e^{-t}$，$x_4(t) = C_1e^t + C_2e^{-3t}$，其中$C_1, C_2, C_3, C_4$为常数；对应的孤立点方程为$\dot{x}(t) = xt$，通解为$x(t) = Ce^t$；矩阵$A$的0特征值对应的左特征向量$\boldsymbol{\xi} = (1/2, 0, 0, 1/2)$。计算易知，对任意整数$1 \leq i, j \leq 4$，当$t \to \infty$时，有$|x_i(t) - x_j(t)| \to 0$，该星型系统同步且$|x_i(t) - \overline{x}(t)| \to 0$。这里，$\overline{x}(t) = 0.5x_1(t) + 0.5x_4(t) = C_1e^t$。

第2节 同步调控

一个人拉着车子快速奔跑的条件，是人的行进与车子步调一致。这里，车子最初是静止的，需要人用力拉动车子前行。一旦车子有了一定的速度即惯性，拉车人仅需维持车子平衡和向前奔跑而无需再过于用力，即人向前奔跑与车子的同步即可，如图6.7所示。同样地，对于一个不同步的系统S，是否可以对其中的一些基元状态进行人为干预以实现系统同步呢？这个问题的答案在一定条件下是肯定的！欧阳博士告诉惠子，类似于对系统在平衡点附近是否稳定的判别，也可以仅考虑孤立点方程$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ 的解在平衡点$\mathbf{0}$附近的性状。这时，当$t \to \infty$时有$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$。对应的，一个由基元$v_1, v_2, \cdots, v_m$构成的系统$S$是否同步不依赖初值，而仅是要求对任意整数$1 \leq i, j \leq m$，当$t \to 0$时有$\left|\mathbf{x}_{v_i}(t) - \mathbf{x}_{v_j}(t)\right| \to 0$，在平衡点$\mathbf{0}$附近这与系统$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$的解是否稳定是一致的，因为可以在平衡点$\mathbf{0}$附近选取一个含有点集$\mathrm{Sta}[S]$的邻域$\mathcal{O}$。这样一来，要求$\mathbf{x}_{v_i}(t)$ 收敛到点集$\mathrm{Sta}[S]$中就与$\mathbf{x}_{v_i}(t)$在平衡点$\mathbf{0}$渐近稳定一致。



图6.7 车夫拉车

对系统$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$的$\mathbf{0}$解是否渐近稳定有一个一般的判准，称为LaSalle不变原理，即设$D \subset \mathbb{R}^n$是$\mathbf{f}$在包含原点$\mathbf{0}$的一个定义域。如果在D上存在一个连续可微的正定函数$L: D \to \mathbb{R}$，$\dot{L}(t)$在D上非正且$S = \left\{\mathbf{x} \in D | \dot{L}(t) = 0\right\}$除包含方程的$\mathbf{0}$解外不再包含其他解，则该方程的$\mathbf{0}$解是渐近稳定的。例如，对方程$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1 + x_2)$，$\dot{x}_2 = x_1 - x_1(x_1 + x_2)$取$L(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)/2$，则有

$$\begin{aligned}\dot{L} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(-x_1 - x_2 &+ x_2(x_1 + x_2)) \\ &+ x_2(x_1 - x_1(x_1 + x_2)) = -x_1^2 \leq 0\end{aligned}$$

非正且$\dot{L} = 0$有$x_1 = 0$，即集合S不再含有该方程其他解，故由LaSalle不变原理知该方程的$\mathbf{0}$解是渐近稳定的。

2.1.矩阵2-范数. 一个$n\times n$矩阵$A=(a_{ij})$的范数$|A|:A\to\mathbb{R}$是一个由矩阵A到实数$\mathbb{R}$的映射，满足

(1) $|A|\geq 0$且仅当$A=0_{n\times n}$时，有$|A|$=0；

(2) 对任意常数$c\in\mathbb{R}$，有$|cA|=c|A|$；

(3) $|A+B|\leq|A|+|B|$和$|AB|\leq|A||B|$，这里A,B为$n\times n$矩阵。

对于一个$n\times m$矩阵$A=(a_{ij})$，转置A^t与矩阵A的乘积

$$A^tA=(a_{ji})_{m\times n}(a_{ij})_{n\times m}=(\widehat{a}_{ij})_{m\times m}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}\right)_{m\times m} \tag{6.13}$$

是一个$m\times m$矩阵。例如，

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&3\\1&2&0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&3\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&2&2\\0&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&3\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&9&6\\0&6&9\end{pmatrix}。$$

由定义，矩阵转置有性质$(A^t)^t=A$，$(AB)=B^tA^t$。故有，$(A^tA)^t=(A^t)^tA^t=AA^t$，即A^tA为一个对称矩阵。更进一步还知道，如果A为一个实数矩阵，则对任一个n-维列向量$\mathbf{x}$，$\mathbf{x}^tA^tA\mathbf{x}=(\mathbf{x}^tA^t)(A\mathbf{x})=(A\mathbf{x})(A\mathbf{x})^t\geq 0$。

现在，设λ为方程$\det(A^tA-\lambda I_n)=0$的一个特征根，$\boldsymbol{\xi}$为对应的特征向量，即方程$(A^tA)\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$的解，则$0\leq\boldsymbol{\xi}^tA^tA\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}^t\boldsymbol{\xi}$。注意，$\boldsymbol{\xi}^t\boldsymbol{\xi}>0$，故有$\lambda\geq 0$，即$A^tA$的特征值为非负实数，设为$\lambda_1\geq 0,\lambda_2\geq 0,\cdots,\lambda_m\geq 0$。记矩阵$A^tA$的最大特征根$\lambda_{\max}(A^tA)=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\}$，则定义矩阵$A$的2-范数为

$$|A|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^tA)}, \tag{6.14}$$

即矩阵A的转置A^t与A乘积的最大特征根。

例如，上面例子中矩阵A的特征方程

$$\begin{aligned}0 &= \left|A^tA-\lambda I_3\right|=\left|\begin{pmatrix}5&0&0\\0&9&6\\0&6&9\end{pmatrix}-\lambda I_3\right|=\begin{vmatrix}5-\lambda&0&0\\0&9-\lambda&6\\0&6&9-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (5-\lambda)(9-\lambda)^2-36(5-\lambda)\\ &= (3-\lambda)(5-\lambda)(15-\lambda),\end{aligned}$$

故有$\lambda_{\max}=15$。这样，由矩阵的2-范数定义知$|A|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^tA)}=\sqrt{15}$。

一个矩阵A的2-范数$|A|_2$是向量范数$|\mathbf{a}|$，即(4.33)的推广。一般地，对任意一个$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，有

$$|A|_2 \;=\; \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{|A\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}\,。\tag{6.15}$$

这样，由于$|A|_2=\sqrt{\lambda_{\max}\left(A^tA\right)}$，故一般地有$|A\mathbf{x}|\leq|A|_2|\mathbf{x}|$。

对定义在$D\subset\mathbb{R}^n$上函数矩阵$A(\mathbf{x}),\mathbf{x}\in D$的2-范数$|A(\mathbf{x})|_2:D\to\mathbb{R}$，是指$D$上任一点$\mathbf{x}^0$的矩阵$A(\mathbf{x}^0)$的2-范数$|A(\mathbf{x}^0)|_2$的映射。换言之，$|A(\mathbf{x})|_2$是一个由$D$映射到$\mathbb{R}$的非负函数，即$|A(\mathbf{x})|_2\geq 0$ 且满足范数条件$(1)-(3)$。以雅可比矩阵为例，当$n=3$且$f_1(\mathbf{x})=x_1^2-x_2^2/2, f_2(\mathbf{x})=x_2^2+3x_3^2/2, f_3(\mathbf{x})=x_1^2/2+x_2^2$时，(5.31)式中的雅可比矩阵

$$J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -x_2 & 0\\ 0 & 2x_2 & 3x_3\\ x_1 & 2x_2 & 0\end{pmatrix} \qquad\Longrightarrow$$

$$J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}^tJ_{\mathbf{f}|\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & x_1\\ -x_2 & 2x_2 & 2x_2\\ 0 & 3x_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x_1 & -x_2 & 0\\ 0 & 2x_2 & 3x_3\\ x_1 & 2x_2 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5x_1^2 & 0 & 0\\ 0 & 9x_2^2 & 6x_2x_3\\ 0 & 6x_2x_3 & 9x_3^2\end{pmatrix}$$

对应的，$J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}^tJ_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}$的特征方程为

$$\left|J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}^tJ_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}-\lambda I_3\right| = \left(5x_1^2-\lambda\right)\left(45x_2^2x_3^2-9\left(x_2^2+x_3^2\right)\lambda+\lambda^2\right)=0。\tag{6.16}$$

这样，求解方程(6.16)可得$\lambda_{\max}$。例如，方程(6.16)在$\mathbf{x}^0=(1,0,0),(1,1,0)$或$(1,1,1)$时分别为$(5-\lambda)\lambda^2=0$，$(5-\lambda)(-9+\lambda)\lambda=0$和$(3-\lambda)(5-\lambda)(15-\lambda)=0$，有$\lambda_{\max}=5,9$和15。对应地，该雅可比矩阵$J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}$的2-范数分别为$\left|J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_2=\sqrt{5},3$和$\sqrt{15}$。

2.2.调控方程. 系统的调控方程，欧阳博士解释说，即对基元$v_1,v_2,\cdots,v_m$输入变量$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_m$以寻求系统同步的条件。这时，系统方程(6.8)变为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t)=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i(t)\right)+h_i\left(\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t),\cdots,\mathbf{x}_m(t)\right)+\mathbf{u}_i(t),\ 1\leq i\leq m。\tag{6.17}$$

这里，$h_i\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_m\right)=c\sum\limits_{j=1}^{m}l_{ij}\mathbf{H}(\mathbf{x}_j(t))$称为耦合项，$\mathbf{u}_i(t)\in\mathbb{R}^n$ 称为调控项。

现在，假设孤立点方程$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$的解为$\mathbf{s}(t)$，对任意整数$1\leq i\leq m$，定义误差向量$\boldsymbol{\epsilon}_i(t)=\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{s}(t)$。那么，系统同步调控的目标就是找寻调控项$\mathbf{u}_i(t)$满足

的条件使得系统(6.17)实现同步。这时，

$$\lim_{t\to\infty}|\boldsymbol{\epsilon}_i(t)| \;=\; 0,\quad 1\le i\le m, \tag{6.18}$$

即对任意整数$1\le i\le m$，误差向量$\boldsymbol{\epsilon}_i(t)$为无穷小向量。由$\dot{\mathbf{s}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{s}(t))$和(6.17)，知误差项$\boldsymbol{\epsilon}_i(t)$满足的方程为

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i(t)=\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_i(t),\mathbf{s})+\overline{\mathbf{h}}_i(\mathbf{x}(t),\mathbf{s})+\mathbf{u}_i,\quad 1\le i\le m。 \tag{6.19}$$

这里，

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_i(t),\mathbf{s}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t))-\mathbf{f}(\mathbf{s}(t)),\\ \overline{\mathbf{h}}_i\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{s}\right) &= \mathbf{h}_i\left(\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t),\cdots,\mathbf{x}_m(t)\right)-\mathbf{h}_i(\mathbf{s},\mathbf{s},\cdots,\mathbf{s})。\end{aligned}$$

一般地，对系统的同步调控有两个常用的假设条件：

条件1. 存在一个常数$\alpha\ge 0$使得雅可比矩阵$J_{\mathbf{f}|\mathbf{s}}$的2-范数$\left|J_{\mathbf{f}|\mathbf{s}}\right|_2\le\alpha$。

条件2. 对任意整数$1\le i,j\le m$存在常数$\gamma_{ij}\ge 0$使得

$$\left|\overline{\mathbf{h}}_i\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{s}\right)\right|\le\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}\left|\boldsymbol{\epsilon}_i\right|。$$

这当中，欧阳博士告诉惠子，条件1是一个较强的限制条件，要求函数$\left|J_{\mathbf{f}|\mathbf{s}}\mathbf{x}\right|\le\alpha|\mathbf{x}|$，即变化后的范数不能超过$|\mathbf{x}|$ 的α 倍；条件2则是对函数$\overline{\mathbf{h}}_i, 1\le i\le m$的范数用误差函数$\boldsymbol{\epsilon}_i, 1\le i\le m$给出上界。这样一来，在系统(6.17)满足条件1和2的假设下，可以得到非线性系统同步的调控条件。

2.3.局部同步调控. 系统的局部同步是指系统在平衡点附近同步。欧阳博士解释说，这时，可以对方程(6.19)中的$\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_i(t),\mathbf{s})$ 在平衡点$\boldsymbol{\epsilon}_i=\mathbf{0}$附近按(5.31)展开并取线性项近似，得到

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i=J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\boldsymbol{\epsilon}_i+\overline{\mathbf{h}}_i(\mathbf{x}(t),\mathbf{s})+\mathbf{u}_i,\quad 1\le i\le m。 \tag{6.20}$$

这时，如果系统(6.17)满足条件1和2，取$\mathbf{u}_i=-d_i\boldsymbol{\epsilon}_i$，其中$\dot{d}_i=k_i\boldsymbol{\epsilon}_i^t\boldsymbol{\epsilon}_i=k_i\left|\boldsymbol{\epsilon}_i\right|^2$，$k_i\ge 0, 1\le i\le m$，则当$t\to\infty$ 时$\boldsymbol{\epsilon}_i\to\mathbf{0}$，即系统(6.20)在平衡点附近稳定，系统(6.17)为局部同步。那么，为什么系统(6.17)这个时候是局部同步的呢？回答这个问题的关键在于判定方程(6.20)的解在$\mathbf{0}$点稳定，可以应用李雅普诺夫判准。取李雅普诺夫函数

$$L(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\epsilon}_i^t\boldsymbol{\epsilon}_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{(d_i-\widehat{d}_i)^2}{k_i}, \tag{6.21}$$

其中的$\widehat{d}_i > 0, 1 \leq i \leq m$为待定数。如果对任意整数$1 \leq i \leq m$均有$\boldsymbol{\epsilon}_i = \mathbf{0}$，系统(6.17)已是一个同步系统。如其不然，由$L(t)$的定义(6.21)，这时至少存在一个整数$1 \leq i \leq m$使得$\boldsymbol{\epsilon}_i \neq \mathbf{0}$，即$L(t) > 0$是正定函数。那么，$\dot{L}(t)$是非负的吗？欧阳博士告诉惠子，这时，需先计算$\dot{L}(t)$，再看它在什么条件下为非负的。

注意，如$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_n)^t$则$\mathbf{g}^t\mathbf{g} = (g_1^2, g_2^2, \cdots, g_n^2)$且$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i^t = \boldsymbol{\epsilon}_i^t J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}^t + \overline{\mathbf{h}}_i^t(\mathbf{x}(t), \mathbf{s})$ $+\mathbf{u}_i^t$, $1 \leq i \leq m$。记$\overline{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{s}} = \left(J_{\mathbf{f}|\mathbf{s}} + J_{\mathbf{f}|\mathbf{s}}^t\right)/2$，现对(6.21)求导并代入(6.20)和假设条件，有

$$
\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i{}^t\boldsymbol{\epsilon}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i^t\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i\right) + \sum_{i=1}^{m}\frac{(d_i - \widehat{d}_i)\dot{d}_i}{k_i} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\boldsymbol{\epsilon}_i^t J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}^t + \overline{\mathbf{h}}_i^t(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}) - d_i\boldsymbol{\epsilon}_i^t\right)\boldsymbol{\epsilon}_i \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\epsilon}_i^t\left(J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\boldsymbol{\epsilon}_i + \overline{\mathbf{h}}_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}) - d_i\boldsymbol{\epsilon}_i\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(d_i - \widehat{d}_i\right)\boldsymbol{\epsilon}_i^t\boldsymbol{\epsilon}_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\epsilon}_i^t\left(\overline{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}} - \widehat{d}_i I_n\right)\boldsymbol{\epsilon}_i + \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\epsilon}_i^t\overline{\mathbf{h}}_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\epsilon}_i^t\left(J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}} - \widehat{d}_i I_n\right)\boldsymbol{\epsilon}_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}|\boldsymbol{\epsilon}_i||\boldsymbol{\epsilon}_j| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\left(\alpha - \widehat{d}_i I_n\right)|\boldsymbol{\epsilon}_i|^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}|\boldsymbol{\epsilon}_i||\boldsymbol{\epsilon}_j| \\
&= \boldsymbol{\epsilon}^t\left(\Gamma + \mathrm{diag}(\alpha - \widehat{d}_1, \alpha - \widehat{d}_2, \cdots, \alpha - \widehat{d}_m)\right)\boldsymbol{\epsilon}。
\end{aligned}
$$

这里，$\Gamma = (\gamma_{ij})_{m\times m}$，$\boldsymbol{\epsilon} = (|\boldsymbol{\epsilon}_1|, |\boldsymbol{\epsilon}_2|, \cdots, |\boldsymbol{\epsilon}_m|)^t$，$\mathrm{diag}(\alpha - \widehat{d}_1, \alpha - \widehat{d}_2, \cdots, \alpha - \widehat{d}_m)$为对角矩阵$(d_{ij})_{m\times m}$，即对整数$1 \leq i \neq j \leq m$有$d_{ij} = 0$，$d_{ii} = \alpha - \widehat{d}_i, 1 \leq i \leq m$。

注意，对一个$m \times m$对称矩阵A，一定存在一个实数$b < 0$使得$A + bI_{m\times m}$为负定矩阵。故此，对任意整数$1 \leq i, j \leq m$，不失普遍性，可以假设Γ为一个对称矩阵，因为如有$\gamma_{ij} \geq \gamma_{ji}$，可以在条件2中用$\gamma_{ij}$取代$\gamma_{ji}$而不影响假设条件。这样，可以选择适当的实数$\widehat{d}_i, 1 \leq i \leq m$使矩阵$\Gamma + \mathrm{diag}(\alpha - \widehat{d}_1, \alpha - \widehat{d}_2, \cdots, \alpha - \widehat{d}_m)$为一个负定矩阵。由LaSalle不变原理，方程(6.19)的每个解都收敛到$\mathbf{0}$解上，即$t \to \infty$时$\boldsymbol{\epsilon}_i \to \mathbf{0}, 1 \leq i \leq m$，系统(6.17)在$\mathbf{0}$点附近同步。

对于$h_i\left(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_m(t)\right), 1 \leq i \leq m$为线性函数的系统(6.17)，即

$$
h_i\left(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_m(t)\right) = \sum_{j=1}^{m}a_{ij}\mathbf{x}_j(t), \quad \sum_{j=1}^{m}a_{ij} = 0, \quad 1 \leq i \leq m
$$

的系统

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i(t)\right) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{u}_i(t),\ 1 \leq i \leq m \tag{6.22}$$

自然满足条件2，这样，如果系统(6.22)满足条件1，取$\mathbf{u}_i = -d_i\boldsymbol{\epsilon}_i$且$\dot{d}_i = k_i\boldsymbol{\epsilon}_i^t\boldsymbol{\epsilon}_i = k_i\left|\boldsymbol{\epsilon}_i\right|^2$，$k_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$，则系统(6.22) 在$\mathbf{0}$点附近同步。这个结论可以进一步推广。例如，假设

$$h_i\left(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_m(t)\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}p\left(\mathbf{x}_j(t)\right),\quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 0,\quad 1 \leq i \leq m$$

且函数p对$\mathbf{x}$可微，满足$\left|J_{p|\mathbf{x}}\right|_2 \leq \beta$，则有

$$\left|\overline{h}_i\left(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_m(t)\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \left|a_{ij}\right| \left|p\left(\mathbf{x}_j(t)\right) - p(\mathbf{s})\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \left|a_{ij}\right| \beta \left|\boldsymbol{\epsilon}_i\right|。$$

这时，如果有p对$\mathbf{x}$可微且$\left|J_{p|\mathbf{x}}\right|_2 \leq \beta$，取$\mathbf{u}_i = -d_i\boldsymbol{\epsilon}_i$且$\dot{d}_i = k_i\boldsymbol{\epsilon}_i^t\boldsymbol{\epsilon}_i = k_i\left|\boldsymbol{\epsilon}_i\right|^2$，$k_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$，则系统

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i(t)\right) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}p\left(\mathbf{x}_j(t)\right) + \mathbf{u}_i(t),\ 1 \leq i \leq m \tag{6.23}$$

如果满足条件1，则(6.23)的解在$\mathbf{0}$点稳定，即在$\mathbf{0}$点附近同步。

2.4.全局同步调控. 系统的全局同步，是指系统在$\mathbf{x}_i(t), 1 \leq i \leq m$定义域上的同步。那么，是否可以在条件1和2的基础上得到一个系统S在全局同步的调控条件呢？欧阳博士解释说，这时，需将孤立点方程$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$中的函数$\mathbf{f}$拆分成线性、非线性两部分，即$\dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$。这里，$B \in \mathbb{R}^{m\times m}$为常数矩阵，$\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$为一个可微的非线性映射。这时，系统方程(6.17)变为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = B\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_m(t)) + \mathbf{u}_i(t)。 \tag{6.24}$$

相应地，误差方程(6.19)变为

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i(t) = B\boldsymbol{\epsilon}_i(t) + \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{s}) + \overline{\mathbf{h}}_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}) + \mathbf{u}_i(t), \tag{6.25}$$

这里，$1 \leq i \leq m$且$\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{s}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{s}(t))$。

条件3. 存在非负常数μ使得$\left|\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{s})\right| \leq \mu\left|\boldsymbol{\epsilon}_i\right|, 1 \leq i \leq m$。

这时，如果要求函数$\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{s}), 1 \leq i \leq m$满足条件3，则系统(6.24)的全局同步与上面在$\mathbf{0}$点局部同步情形类似，即如果系统(6.24)满足条件2和3，类似地，可以

取$\mathbf{u}_i(t) = -d_i\boldsymbol{\epsilon}_i(t)$且要求$\dot{d}_i = k_i\boldsymbol{\epsilon}_i^t(t)\boldsymbol{\epsilon}_i(t) = k_i\left|\boldsymbol{\epsilon}_i(t)\right|^2$，则系统(6.24)在$t \to \infty$时有$\boldsymbol{\epsilon}_i(t) \to \mathbf{0}$，即系统是全局同步的。这里，$k_i > 0, 1 \le i \le m$为常数。那么，怎样能得到这一结论呢？欧阳博士解释说，首先，因为B是一个常数矩阵，由矩阵2-范数的定义，这时存在一个常数δ使得$|B|_2 \le \delta$。记$\overline{B} = (B + B^t)/2$，则易知$\left|\overline{B}\right|_2 \le \delta$。

与讨论系统(6.17)的局部同步类似，欧阳博士告诉惠子，这时，也需要先定义一个正定函数$L(t)$，再验证$\dot{L}(t)$是不是非负的。为此，可以取$L(t)$与(6.21)式定义的函数一致，计算$L(t)$对t的导数$\dot{L}(t)$，即

$$
\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i{}^t\boldsymbol{\epsilon}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i^t\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i\right) + \sum_{i=1}^{m}\frac{(d_i - \widehat{d}_i)\dot{d}_i}{k_i} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\epsilon}_i^t\left(\overline{B} - \widehat{d}_iI_n\right)\boldsymbol{\epsilon}_i + \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\epsilon}_i^t\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{s}) + \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\epsilon}_i^t\overline{\mathbf{h}}_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}) \\
&\le \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\epsilon}_i^t\left(\delta + \mu - \widehat{d}_i\right)|\boldsymbol{\epsilon}_i|^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}|\boldsymbol{\epsilon}_i||\boldsymbol{\epsilon}_j| \\
&= \boldsymbol{\epsilon}^t\left(\Gamma + \mathrm{diag}(\delta + \nu - \widehat{d}_1, \delta + \nu - \widehat{d}_2, \cdots, \delta + \nu - \widehat{d}_m)\right)\boldsymbol{\epsilon}。
\end{aligned}
$$

类似地，不失普遍性，假设Γ是一个对称矩阵。这时，由于δ, μ和$\gamma_{ij}, 1 \le i, j \le m$都是非负常数，可以选择适当的常数$\widehat{d}_i, 1 \le i \le m$使矩阵$\Gamma + \mathrm{diag}(\delta + \nu - \widehat{d}_1, \delta + \nu - \widehat{d}_2, \cdots, \delta + \nu - \widehat{d}_m)$为一个负定矩阵。这样，应用LaSalle不变原理，有$t \to \infty$时$\boldsymbol{\epsilon}_i \to \mathbf{0}, 1 \le i \le m$，即系统(6.24)全局同步。

对于$\mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_12, \cdots, \mathbf{x}_n)$为线性函数的系统(6.22)或是$p$对$\mathbf{x}$可微，满足$\left|J_{p|\mathbf{x}}\right|_2 \le \beta$的系统(6.23)已满足条件3。此时，进一步要求系统(6.22)和(6.23)满足条件2，取$\mathbf{u}_i(t) = -d_i\boldsymbol{\epsilon}_i(t)$且$\dot{d}_i = k_i\boldsymbol{\epsilon}_i^t(t)\boldsymbol{\epsilon}_i(t) = k_i\left|\boldsymbol{\epsilon}_i(t)\right|^2$，则系统(6.22)和(6.23)全局同步。

例如，对状态方程为

$$
(\dot{x}_{i1}, \dot{x}_{i2}, \dot{x}_{i3})^t = B\,(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})^t + (0, -x_{i1}x_{i3}, x_{i1}x_{i2})^t + \left(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3\right)^t - d_i\boldsymbol{\epsilon}_i
$$

的系统S满足上面的条件2和3。这当中，

$$
1 \le i \le 50 \quad \begin{cases}
\widehat{f}_1 = f_1(x_i) - 2f_1(x_{i+1}) + f_1(x_{i+2}), \\
\widehat{f}_2 = 0, \\
\widehat{f}_3 = f_2(x_i) - 2f_2(x_{i+1}) + f_2(x_{i+2}), \\
f_1(x_i) = r_1(x_{i2} - x_{i1}), \\
f_2(x_i) = x_{i1}x_{i2} - r_2x_{i3}。
\end{cases}
$$

这时，对任一整数$1 \le i \le 50$，如取$\dot{d}_i = k_i|\boldsymbol{\epsilon}_i|^2$，$k_i$为常数，则系统$S$全局同步。

以上判定一个系统S是否同步的实质，是将系统同步转化成误差函数$\boldsymbol{\epsilon}_i, 1 \leq i \leq m$在平衡点是否稳定问题，即在$t \to \infty$时是否有$\boldsymbol{\epsilon}_i \to \mathbf{0}$的判别，这样可以应用对系统在平衡点是否稳定的已知结果，如李雅普诺夫判准等得到系统在平衡点附近是否同步。这当中，对线性系统的稳定性判准相对简单，一种自然的想法是对函数$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t))$在平衡点附近展开，取其线性部分近似，对非线性部分以及$\mathbf{h}_i(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_m(t))$等的上界进行限制，进而由线性部分的稳定性得到系统在平衡点的稳定性，即同步条件。欧阳博士告诉惠子，这种思想进一步深化即导出系统同步的主函数判别法。

第3节 主函数法

对于一个状态方程为$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$，$A$为$n \times n$常数矩阵的自治线性系统$S$，设特征方程$\det(A - \lambda I_m) = 0$的解为$\lambda_1$（$k_1$重），$\lambda_2$（$k_2$重），$\cdots$，$\lambda_m$（$k_m$重），$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = m$，已知该方程的任一解可由基元$p_l(t)e^{\lambda_l}$线性生成。这里，对任意整数$1 \leq l \leq m$，$p_l(t)$为$t$的次数不超过$k_l - 1$的多项式。这时，易知$t \to \infty$时，当$\mathrm{Re}(\lambda_l) < 0$，$p_l(t)e^{\lambda_l} \to 0$；当$\mathrm{Re}(\lambda_l) > 0$时$p_l(t)e^{\lambda_l} \to \infty$。这样，特征根$\lambda \leq 0$是判断一个线性系统解稳定的必要条件。

现在，在线性系统基础上增加非线性项，即一般的系统$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$。那么，系统状态方程在平衡点$\mathbf{x}^*$的线性近似，即$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$是否能够决定其在平衡点的稳定性呢？这个问题的答案如果是肯定的，欧阳博士告诉惠子，无疑为解决非线性系统在平衡点的稳定性，以及系统在平衡点附近同步提供了便利条件。然而，问题的答案仅是在一些特殊情形是肯定的。特别是，当雅可比矩阵$\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}$的特征值实部都非0，即函数$\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$为双曲型时，矩阵$\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}$的特征值性状为非线性系统局部同步的判定提供了条件。

3.1.李雅普诺夫指数. 一个自治系统$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$的解如果是渐进稳定的，则不依赖于初值$\mathbf{x}(t_0)$的选择，即可以假设初值$\mathbf{x}(t_0)$、$\mathbf{x}'(t_0)$对应的解分别为$\mathbf{x}(t)$和$\mathbf{x}'(t_0)$，则当$t \to \infty$时有$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}'(t_0)$ 或$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'(t_0)| \to 0$；反之，如果解$\mathbf{x}(t)$是不稳定的，则当$t \to \infty$时$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'(t_0)| \not\to 0$，即有的$\mathbf{x}(t)$不依赖初值，有的则强烈地依赖于初值，见图6.8。那么，为什么引入李雅普诺夫指数，它能解决什么问题呢？欧阳博士告诉惠子，矩阵特征值在刻画线性系统性状中发挥着重要的作用，李雅普诺夫指数是在此基础上，对非线性系统引入的类似指数。

图6.8 解轨道与初值

(1) 1-维李雅普诺夫指数. 设函数f连续可微，由迭代方程$x_{i+1}(t) = f(x_i(t)), i \geq 1$定义一个1-维点列$\{x_i\}_0^\infty = \{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$。首先，取初值$x_0 = x(t_0), x'_0 = x'(t_0)$且让$x_0$与$x'_0$充分地接近，即$|x_0 - x'_0| \to 0$，则由函数的泰勒展开式，有估计式

$$
\begin{aligned}
&|x_1 - x'_1| \approx \left|\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}\right| |x_0 - x'_0|, \\
&|x_2 - x'_2| \approx \left|\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_1}\right| |x_1 - x'_1| \approx \left|\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_1} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}\right| |x_0 - x'_0|, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
&|x_k - x'_k| \approx \left|\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_{k-1}}\right| |x_{k-1} - x'_{k-1}| \approx \cdots \approx \left|\prod_{i=0}^{k-1} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i}\right| |x_0 - x'_0|,
\end{aligned}
$$

即经过k次迭代后，点x_k, x'_k间距离$|x_k - x'_k|$的变化与$\left|\prod_{i=0}^{k-1} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i}\right|$有关。这时，欧阳博士解释说，为从整体上衡量轨线$x(t)$和$x'(t)$相向或分离，由$e^{kL_k} = \left|\prod_{i=0}^{k-1} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i}\right|$引入一个指数$L_k$，即

$$
L_k = \frac{1}{k} \ln \left|\prod_{i=0}^{k-1} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i}\right| = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left|\frac{df}{dx}\right|_{x_i} \tag{6.26}
$$

刻画轨线$x_k(t), x'_k(t)$间经过k次迭代后的平均距离，即$|x_k - x'_k| \approx e^{kL_k} |x_0 - x'0|$。一般地，让$k \to \infty$，即讨论轨线$x_k(t), x'_k(t)$间经过无穷次迭代后的距离。这时，如果(6.26)中的极限$\lim\limits_{k\to\infty} L_k$存在，则定义1-维系统$S$的李雅普诺夫指数$L$为

$$
L = \lim_{k\to\infty} L_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left|\frac{df}{dx}\right|_{x_i}。 \tag{6.27}
$$

注意，李雅普诺夫指数与初始点x_0无关，是$k \to \infty$时的性状。举个例子，一个帐篷映射$T : [0,1] \to [0,1]$定义为

$$
T(x) = \begin{cases} \mu x, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}; \\ \mu(1-x), & \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}
$$

这里，$0 \leq \mu \leq 2$。对应的迭代方程$x_{i+1} = T(x_i)$，$dT/dx = \pm \ln \mu$。故此，

$$
L = \lim_{k\to\infty} L_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left|\frac{dT}{dx}\right|_{x_i} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \times k \ln \mu = \ln \mu。
$$

(2) n-维李雅普诺夫指数. 那么，怎样把1-维李雅普诺夫指数(6.27)推广到n-维系统呢？欧阳博士解释说，对一个由方程$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$刻画的$n$-维系统$S$，可以取$\mathbf{f}$在平衡点$\mathbf{x}^*$的线性近似(5.31)，即 $\dot{\mathbf{x}} = \left.\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^*}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)+\mathbf{x}^*$。这里，$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}$ 是函数$\mathbf{f}$对$\mathbf{x}$的雅可比矩阵，$\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^*}$表示$J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}$在点$\mathbf{x}^*$取值，即为一个常数矩阵。类似地，采用迭代方程$\mathbf{x}_{i+1} = \left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_i}\mathbf{x}_i$，$i \geq 1$定义点列$\{\mathbf{x}_i\}_0^\infty$，即有$\mathbf{x}_1 = \left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}\mathbf{x}_0$，$\mathbf{x}_2 = \left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_1}\mathbf{x}_1$，$\cdots$，$\mathbf{x}_k = \left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_{k-1}}\mathbf{x}_{k-1}$，$\cdots$。这里，与线性系统中$J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}$为一个常数矩阵$A$不同，矩阵$\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}$，$\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_1}$,$\cdots$,$\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_k}$,$\cdots$中的每一项虽仍为常数矩阵，但每一项不一定相同。类似地，对于方程$\dot{\mathbf{x}} = \left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}^*}\mathbf{x}$ 两个取不同初值$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0$的解$\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)$，它们之间的距离$|\mathbf{x}'(t)-\mathbf{x}(t)|$如图6.9所示。这时，$\mathbf{x}_k = \left(\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_{k-1}}\cdots\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_1}\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}\right)\mathbf{x}_0$，故有

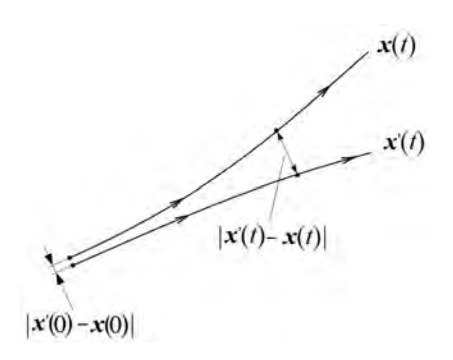


图6.9 轨线间距

$$|\mathbf{x}'_k - \mathbf{x}_k| \approx \left|\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_{k-1}}\cdots\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_1}\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}\right||\mathbf{x}'_0-\mathbf{x}_0|。$$

记矩阵$\mathbf{J}_{[k]} = \left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_{k-1}}\cdots\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_1}\left.J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0}$。如果$k\to\infty$时矩阵$\mathbf{J}_{[k]}$有限，即极限存在，可以类似于(6.27)定义李雅普诺夫指数

$$L_i = \lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left|\lambda_i(\mathbf{J}_{[k]})\right|}{k} \quad 或 \quad L_i = \lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left|\lambda_i\left(\mathbf{J}_{[k]}^t\mathbf{J}_{[k]}\right)\right|}{2k} \tag{6.28}$$

并得到李雅普诺夫指数序列$L_1 \leq L_2 \leq \cdots \leq L_n$。注意，(6.28)中第二个式子中$\mathbf{J}_{[k]}^t\mathbf{J}_{[k]}$是一个对称矩阵。这里，$\lambda_i(A)$ 表示矩阵A的第i个特征值，$1\leq i\leq n$。这时，对任一个$\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，$\lambda_i\left(\mathbf{J}_{[k]}^t\mathbf{J}_{[k]}\right), k\geq 1$均为非负实数。

一般情况下，人们采用(6.28)中的第一个式子计算李雅普诺夫指数$L_i, 1\leq i\leq n$，刻画一个动力系统在平衡点附近的收缩或发散速率，即在$L_i < 0$的方向$\boldsymbol{\xi}_i$上收缩，在$L_i > 0$的方向$\boldsymbol{\xi}_i$上发散。记$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$为特征值$\lambda_1(\mathbf{J}), \lambda_2(\mathbf{J}), \cdots, \lambda_n(\mathbf{J})$对应的特征向量，则轨线$\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)$在向量$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$的方向上分别以指数$L_1, L_2, \cdots, L_n$的速率收缩或者发散，即$t\to\infty$时，$|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}'(t)|$收敛或发散的指数速率，其实质是函数$\mathbf{f}$对一个点$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$的变化幅度。这样，采用矩阵范数定义最大李雅普诺夫指数

$$L_{\max} = \lim_{k\to\infty}\sup\frac{\ln\left|\mathbf{J}_{[k]}\right|}{k} \tag{6.29}$$

即可。这时，由矩阵范数的定义，对任意点$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$和整数$k\geq 1$，有$|\mathbf{f}(\mathbf{x})| \approx \left|\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\mathbf{x}\right| \leq \left|\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\right||\mathbf{x}| \leq e^{L_{\max}}|\mathbf{x}|$，即函数点$\mathbf{x}$经$\mathbf{f}$迭代，每次的收缩或发散不会超出$e^{L_{\max}}$倍。

(3) 线性系统指数. 李雅普诺夫指数是针对非线性系统$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$，在$k \to \infty$时对雅可比矩阵特征值求极限的结果。那么，一个线性系统的李雅普诺夫指数是什么，它与线性系统对应的矩阵特征值又是什么关系呢？欧阳博士解释说，假设方程$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$中的非线性项为$\mathbf{0}$，即系统由$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$刻画。这时，设矩阵$A$对应的特征方程$\det(A - \lambda I_n) = 0$有$n$个特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$（重根重复计算），对应的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$，即$A\boldsymbol{\xi}_i = \lambda_i I_n, 1 \le i \le n$。特别地，如果这$n$个特征根两两不同，则存在一个可逆线性变换$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}'^n$使得

$$\dot{\mathbf{x}}' = \left(T^{-1}AT\right)\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}'_1 = \lambda_1 x'_1, \\ \dot{x}'_2 = \lambda_2 x'_2, \\ \cdots\cdots, \\ \dot{x}'_n = \lambda_n x'_n \end{cases}$$

即线性方程$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$等价于$n$个独立方程$\dot{x}'_1 = \lambda_1 x'_1, \dot{x}'_2 = \lambda_2 x'_2, \cdots, \dot{x}'_n = \lambda_n x'_n$，对应的解分别为$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, x_n(t) = C_n e^{\lambda_n t}$。这里，$C_1, C_2, \cdots, C_n$为常数。这样，轨线$\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)$经$k$次迭代后，沿向量$\boldsymbol{\xi}_i$方向的平均变化率为$\sum\limits_{i=0}^{k-1} \ln e^{\lambda_i}/k$。

一般地，线性方程$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$的解为$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0$。这里，

$$e^{tA} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots。$$

例如，取$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，则有

$$e^{tA} = I_2 + t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} + \cdots + = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}。$$

这时，对一个给定的初始点$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，迭代方程$\mathbf{x}_{i+1} = e^{tA}\mathbf{x}_i, i \ge 1$定义的点列为$\{\mathbf{x}_i\}_0^\infty$，经过$k \ge 1$次迭代，有$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 = e^A\mathbf{x}_1 = e^{A^2}\mathbf{x}_0, \cdots, \mathbf{x}_k = e^A\mathbf{x}_{k-1} = \cdots = e^{A^k}\mathbf{x}_0$，微商$d\mathbf{f}/d\mathbf{x}$即雅可比矩阵为常数矩阵$e^A$，且

$$\left.\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}\right|_{x_0} \left.\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}\right|_{x_1} \cdots \left.\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}\right|_{x_{k-1}} = \prod_{i=0}^{k-1} \left.\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}\right|_{x_i} = \prod_{i=0}^{k-1} e^A = e^{A^k}, \tag{6.30}$$

即经过k此迭代，轨线$\mathbf{x}(t)$和$\mathbf{x}'(t)$间的距离在初值$|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}'(t_0)|$的基础上增长$\left|e^{A^k}\right|$倍。让$k \to \infty$，则由(6.30)式轨线沿向量$\boldsymbol{\xi}_i$方向的李雅普诺夫指数为

$$L_i = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln e^{\lambda_i\left(A^k\right)}}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k \ln e^{\lambda_i(A)}}{k} = \lambda_i(A), \quad 1 \le i \le n, \tag{6.31}$$

即线性系统$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$的$n$个李雅普诺夫指数与矩阵$A$的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$一致。

例如，对一个3-维线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 5x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 3x_3 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

对应的特征方程$\det(A - \lambda I_3) = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$的3个根为$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$，则由(6.33)式知该线性系统的李雅普诺夫指数分别为$L_1 = \lambda_1(A) = 2, L_2 = \lambda_2(A) = 3$和$L_3 = \lambda_3(A) = 6$。

这样，采用李雅普诺夫指数判定一个线性系统的稳定性就与采用矩阵特征值判定线性系统在平衡点$\mathbf{x}^*$的稳定性一致。更进一步，对自治系统$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$的轨线在$\mathbf{0}$点附近的性状有：

(1) 如存在整数$i, 1 \leq i \leq n$使得$L_i > 0$，则系统S在平衡点不稳定；如$L_i < 0, 1 \leq i \leq n$，则系统S在平衡点渐近稳定（与用矩阵特征值判定结果一致）；

(2) 如$L_1 = L_2 = \cdots = L_s = 0$，$L_i < 0, m+1 \leq i \leq n$，则系统$S$可能稳定，也可能不稳定。这时，轨线$\mathbf{x}(t)$趋于一个稳定的$m$-环空间。特别地，$m = 1$或$m = 2$时，$\mathbf{x}(t)$趋于一个稳定的极限环或双环空间。

3.2.主稳定函数. 主稳定函数是基于最大李雅普诺夫指数$L_{\max}$对系统S定义的一种函数，因为可以采用李亚普诺指数判别系统在平衡点稳定性，进而可以判别系统同步。这里，假设系统S是由m个基元$v_1, v_2, \cdots, v_m$构成的系统，状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + c\sum_{j=1}^{m} l_{ij} H(\mathbf{x}_j), \quad 1 \leq i \leq m$$

即方程(6.8)。这里，节点动力学方程为$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$，$\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$为系统第$i$个基元的状态变量，常数$c > 0$为网络耦合强度，$(l_{ij})_{m\times m}$为负的拉普拉斯矩阵，$\mathbf{H}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$为基元间的作用函数。

假设$\mathbf{s}(t)$为孤立点方程$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$的解，且$\boldsymbol{\xi}_i(t) = \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{s}(t), 1 \leq i \leq m$。如果系统$S$满足以下条件：①基元$v_1, v_2, \cdots, v_m$ 的动力学行为完全相同；②基元间的作用函数$\mathbf{H}(\mathbf{x}_j), 1 \leq i \leq m$完全相同；③点集$\mathrm{Sta}[S] = \{(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_m(t)) \,|\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \cdots = \mathbf{x}_m(t)\}$为一个不变的同步流形，即对任一点$\mathbf{x}_0 \in \mathrm{Sta}[S]$存在时刻$t^*$，使$t \geq t^*$时系统$S$的解$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$与$\mathrm{Sta}[S]$中的点充分接近；④系统状态在同步流形$\mathrm{Sta}[S]$的附近可以线性化。在这四个假设条件下，可以对系统$S$的方程(6.8)对$\mathbf{s}$求微分。这里，$\mathbf{s}$是$t$的一个函数，对$\mathbf{s}$ 求微分又称为变分，得到误差方程

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i(t) = \mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{s}}\boldsymbol{\xi}_i(t) + c\sum_{j=1}^{m} l_{ij}\mathbf{J}_{\mathbf{H}|\mathbf{s}}\boldsymbol{\xi}_i(t), \quad 1 \leq i \leq m。 \tag{6.32}$$

这里，$\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{s}}, \mathbf{J}_{\mathbf{H}|\mathbf{s}}$分别为$\mathbf{f}(\mathbf{x})$和$\mathbf{H}(\mathbf{x})$在$\mathbf{s}$处的雅可比矩阵，记$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_m)$，则方程(6.32)可改写为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{s}}\boldsymbol{\xi} + c\mathbf{J}_{\mathbf{H}|\mathbf{s}}\boldsymbol{\xi}L^t。\tag{6.33}$$

如果矩阵L可对角化，其特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，即存在可逆矩阵$P$使得$P^{-1}LP = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$，设$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}P = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m)$。则有

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_k = \left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{s}} + c\lambda_k\mathbf{J}_{\mathbf{H}|\mathbf{s}}\right)\boldsymbol{\eta}_k, \quad 1 \leq k \leq m。\tag{6.34}$$

这样，如果系统S是同步的，则方程(6.34)的解在$\mathbf{0}$点是渐进稳定的，李雅普诺夫指数$L_i(\mathbf{0}) < 0, 1 \leq i \leq n$可以保证系统$S$的解在$\mathbf{0}$点稳定或系统同步。对于一个非对称矩阵，其特征值可能是实数，也可能是复数。故此，方程(6.34)中的$c\lambda_k$可以一般性地表示为复数形式，即$c\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, i^2 = -1$。对应地，方程(6.34)可以改写成

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_k = \left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{s}} + (\alpha_k + i\beta_k)\,\mathbf{J}_{\mathbf{H}|\mathbf{s}}\right)\boldsymbol{\eta}_k, \quad 1 \leq k \leq m。\tag{6.35}$$

那么，什么是系统的主稳定函数呢？欧阳博士解释说，既然李雅普诺夫指数为负是系统(6.32)在$\mathbf{0}$点的稳定或系统同步的条件，那么，就可以取最大李雅普诺夫指数$L_{\max}$判定系统同步。这时，$L_{\max}$为对应$\alpha + i\beta$的函数$L_{\max}(\alpha + i\beta)$，称为主稳定函数，并称使$L_{\max}(\alpha + i\beta) < 0$的值$\alpha + i\beta$构成的区域$SR$为系统$S$的同步化区域，即

$$SR = \{\alpha + i\beta = c\lambda_k, 1 \leq k \leq n | L_{\max}(\alpha + i\beta) < 0\}。\tag{6.36}$$

这样一来，可由系统标号图$G^L[S]$邻接矩阵的特征值λ与耦合系数c的乘积$c\lambda$是否落入到同步化区域SR，判别系统S的同步化能力。注意，主稳定函数$L_{\max}$是平面$\mathbb{R}^2 = \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2\}$上的一个平面。如果$L_{\max}$在这个平面上的一点为负或为正，则表明系统$S$在这个点上的稳定或不稳定。特别地，如果$L_{\max}$在这个平面上的所有点均为负，说明这时的系统耦合常数c和基元间作用的结果使得系统同步。

现在，假设基元之间的作用平等，则系统S对应的标号图$G^L[S]$为无向图。这时，拉普拉斯矩阵L为对称矩阵，它的最小特征值为0，其余的均为大于0的实数，即$0 = \lambda_1(L) < \lambda_2(L) < \cdots < \lambda_m(L)$。这时，$c\lambda_k = \alpha_k$为实数，主稳定函数$L_{\max}$为对应$\alpha$的函数，同步化区域(6.36)为$SR = \{\alpha = c\lambda(L) | L_{\max}(\alpha) < 0\}$。特别地，如果对任意整数$2 \leq k \leq m$均有$c\lambda_k \in SR$，则系统$S$局部同步。

根据定义，系统S同步化区域SR由一段段的区间构成，分为以下四种类型：

类型I. 同步化区域SR为一个无界区间(α_1, ∞)，即当$0 < \alpha_1 < c\lambda_2 \leq c\lambda_3 \leq \cdots \leq c\lambda_m$时有$L_{\max} < 0$。这时，$c\lambda_2 > \alpha_1$或$c \geq \alpha_1/\lambda_2$。注意，$\lambda_2$是拉普拉斯矩阵$L$最小的非0特征值，越大所需的耦合常数$c$越小，从而系统具有越强的同步能力。

类型II. 同步化区域SR为一个有界区间(α_1,α_2)，$-\infty<\alpha_1\leq\alpha_2<\infty$，即当$\alpha_1<c\lambda_2\leq\cdots\leq c\lambda_m<\alpha_2$时有$L_{\max}<0$。这时，系统耦合常数$c$满足$\alpha_1/\lambda_2<c<\alpha_2/\lambda_m$。定义$R=\lambda_m/\lambda_1<\alpha_2/\alpha_1$。则$R$越小、越接近1则系统同步能力越强。

类型III. 同步化区域SR为有限个区间的并集合，即$SR=(\alpha_1,\alpha_2)\bigcup(\alpha_3,\alpha_4)\bigcup\cdots\bigcup(\alpha_{2k-1},\alpha_{2k})$或$SR=(\alpha_1,\alpha_2)\bigcup(\alpha_3,\alpha_4)\bigcup\cdots\bigcup(\alpha_{2k-1},+\infty)$。这时，系统同步需$c\lambda_k\in SR$对任意整数$2\leq k\leq m$成立，与系统耦合常数$c$和基元间作用的拉普拉斯矩阵$L$有关，调整系统耦合强度与基元作用。

类型IV. 同步化区域SR为空集$\emptyset$，即对任一个$\alpha\in\mathbb{R}$有$L_{\max}(\alpha)\geq 0$，不存在使$L_{\max}<0$的实数α。这时，无论怎样改变系统基元间的作用与耦合系数，不存在满足条件①-④的系统同步而需要调整假设条件。

那么，是否$c\lambda_k,2\leq k\leq m$不落在SR中的系统一定是不同步呢？答案是否定的！欧阳博士解释说，这时，只是表明不存在满足条件①-④的系统同步，但并不能得出系统一定不同步的结论。

例如，对于图6.10所示的星型系统$S_{1,m-1}$，其邻接矩阵

$$A\left(S_{1,m-1}\right)=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

对应的特征值为

$$\lambda_1=0,\lambda_2=\cdots=\lambda_{m-1}=1,\lambda_m=m,$$

图6.10 星型系统

属于第II种类型。这时，$m\to\infty$时$R=\alpha_2/\alpha_1\to\infty$而不是趋向于1，按主稳定函数判别法可以认为，对于系统基元数m很大时，系统不容易实现同步，但这仅是针对满足条件①-④的那种系统同步，并非是不能实现同步。例如，取基元状态函数$x_{v_i}(t)=x_{v_i}^3(t)+t^i/e^t$，则该系统最终会同步到孤立点函数$s(t)=s^3(t)$。

3.3.线性耦合同步. 当基元间的作用函数$\mathbf{H}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$为一个线性函数，即给定的生成基$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\}$可以表示为一个$n\times n$矩阵$H$，状态方程(6.8)表示为孤立点项$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$和线性项$H\mathbf{x}_j,1\leq j\leq m$的和，即

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t)=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)\right)+c\sum_{j=1}^{m}l_{ij}H\mathbf{x}_j,\quad 1\leq j\leq m。\tag{6.37}$$

这时，可以得到系统同步的一些条件。特别地，当矩阵H为对角矩阵时可以得到系统同步更便捷的条件，以及连图判别准则。一般地，如果存在一个由正实数组成的

对角矩阵Γ 和常数$\omega_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ 使得对任一个正数$\omega \geq \omega_0$都有

$$c\lambda_2 \geq \omega_0, \quad \left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{s}} + \omega H\right)^t \Gamma + \Gamma\left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{s}} + \omega H\right) \leq -\tau I_n, \tag{6.38}$$

则系统(6.37)在$\mathbf{0}$点是稳定的，即同步。这里，$\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{s}}$表示雅可比矩阵$\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}$在点$\mathbf{s}$取值。

那么，怎样由系统的主稳定函数得到这一结论呢？首先，由于λ_2是拉普拉斯矩阵最小的非0特征值，对于任意整数$2 \leq k \leq m$有$c\lambda_k \geq \omega_0$成立。这样，对于任意整数$2 \leq k \leq m$，由假设条件知

$$\left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{s}} + c\lambda_k H\right)^t \Gamma + \Gamma\left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{s}} + c\lambda_k H\right) \leq -\tau I_n。$$

取李雅普诺夫函数$L(t) = \boldsymbol{\eta}_k^t \Gamma \boldsymbol{\eta}_k$，这里，向量$\boldsymbol{\eta}_k$由方程(6.34)刻画。由于对角矩阵$\Gamma$中的任一对角元为正，故有$L(t) > 0$且

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= \dot{\boldsymbol{\eta}}_k^t \Gamma \boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{\eta}_k^t \Gamma \dot{\boldsymbol{\eta}}_k \\ &= \boldsymbol{\eta}_k^t\left(\left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{s}}^t + c\lambda_k H\right)\Gamma + \boldsymbol{\eta}_k^t \Gamma\left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{s}} + c\lambda_k H\right)\right)\boldsymbol{\eta}_k \leq -\tau \boldsymbol{\eta}_k^t I_n \boldsymbol{\eta}_k < 0,\end{aligned}$$

即系统(6.37)在$\mathbf{0}$点稳定或在$\mathbf{0}$点附近同步。

特别地，如果基元$v_i \in S$均处在自由状态，即对任意整数$1 \leq i_1, i_2 \leq m$，基元v_{i_1}与v_{i_2}间不存在相互作用，系统S对应的标号图$G^L[S] = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_1^L$，即$m$个环图的并，如图6.11所示。

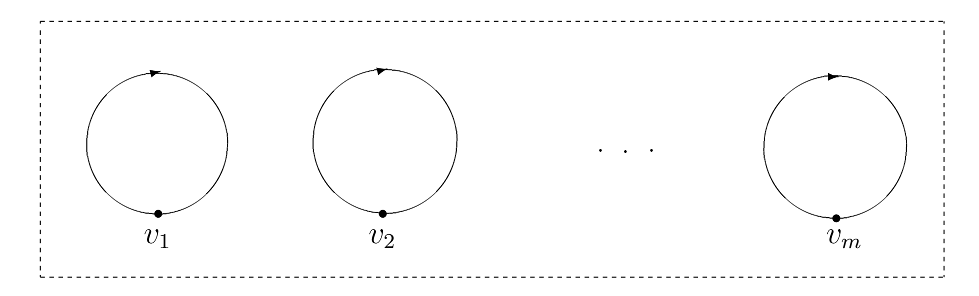


图6.11 基元自由系统

这时，系统S的邻接矩阵$A = I_m$，拉普拉斯矩阵$L = -I_m$。取$H = I_n$，$\Gamma = I_n$，则矩阵$\left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{s}} + c\lambda_k H\right)^t \Gamma + \Gamma\left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{s}} + c\lambda_k H\right)$对角线上的元为$2\left(L_k - c\lambda_k\right)$，$1 \leq k \leq n$，即条件$\left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{s}} + \omega H\right)^t \Gamma + \Gamma\left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{s}} + \omega H\right) \leq -\tau I_n$等价于对任意整数$1 \leq k \leq n$有$L_k - c\lambda_k \leq -\tau/2$。这时，取常数$\omega_0 = L_{\max}$。如果对系统$S$要求$c\lambda_2 \geq L_{\max}$，则一定有$c\lambda_k - \tau \geq L_k, 1 \leq k \leq n$。同时，对$\omega \geq L_{\max}$满足(6.38)中的条件

$$\left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{s}} + \omega H\right)^t \Gamma + \Gamma\left(\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\big|_{\mathbf{s}} + \omega H\right) \leq -\tau I_n,$$

即对基元自由系统S，要求$c\lambda_2 \geq L_{\max}$即有S在$\mathbf{0}$点的邻域上同步的结论。

第4节 连图判定

对非线性系统同步的判别，一般是转化为系统在平衡点的稳定性判别。为此，需要根据系统方程的特点构造李雅普诺夫函数，应用李雅普诺夫稳定性判准进行判别，显得有些繁琐。那么，有没有一种直观且便于计算的判别方法呢？惠子问欧阳博士。欧阳博士告诉她，对一些基元作用函数$\mathbf{H}$简单的系统，即

$$\mathbf{x}_i=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i\right)+\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{ij}(t)H\mathbf{x}_j,\quad 1\leq i\leq m, \tag{6.39}$$

存在一种图上作业，计算并判别系统同步的方法。这里，$H=\operatorname{diag}\left(h_1,h_2,\cdots,h_n\right)$为对角矩阵且对$1\leq i\leq s$有$h_i\geq 0$，$s+1\leq i\leq n$时$h_i=0$；$\varepsilon_{ij}(t)$为基元$v_j$对$v_i$的耦合强度，$\varepsilon_{ij}(t)=\varepsilon_{ji}(t)$，类似拉普拉斯矩阵有

$$\varepsilon_{ii}(t)=-\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\varepsilon_{ij}(t),\ 1\leq i\leq m。$$

图6.12 完全图K_6

这时，系统标号图$G^L[S]$的顶点集、边集和标号分别为

$$\begin{aligned}&V\left(G^L[S]\right)=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\},\\&E\left(G^L[S]\right)=\{(v_i,v_j)|\ \varepsilon_{ij}(t)\neq 0,1\leq i,j\leq m\},\\&L:\ v_i\to\dot{\mathbf{x}}_i(t),\ \ (v_i,v_j)\to\varepsilon_{ij}(t),\ 1\leq i,j\leq m。\end{aligned}$$

特别地，如果有$\varepsilon_{ij}\neq 0,1\leq i,j\leq m$，则$G^L[S]$是完全图$K_m^L$。例如，图6.12中$K_6$的顶点$v_1$标号为$\dot{\mathbf{x}}_{v_1}$，边$(v_1,v_2)$的标号为$\varepsilon_{12}(t)$。这样，如果$\varepsilon_{12}(t)=0$，则边$(v_1,v_2)$ 上的标号为0，可以在K_6^L中删除。

4.1.迹覆盖指数. 假设系统S由m个基元$v_1,v_2,\cdots,v_m$构成，$G^L[S]$为无向图。一个无向图中的一条迹，是指图中一个没有重复边的点与边的交替序列。例如，在图6.13 中易知，点边交替序列$\mathcal{P}=v_1av_2fv_6$就是一条v_1-v_6的迹。那么，什么是迹覆盖呢？欧阳博士告诉惠子，系统S 的一个迹覆盖$\mathscr{P}$是图$G^L[S]$上一个由迹组成的集合，使得对任意整数$1\leq i,\ j\leq m$存在唯一的一条v_i到v_j的迹$\mathcal{P}_{ij}\in\mathscr{P},j>i$。现在，对任一边$e\in E\left(G^L[S]\right)$和给定的迹覆盖$\mathscr{P}$，定义指标$b_e[\mathscr{P}]$为迹覆盖$\mathscr{P}$中所有通过边$e$且

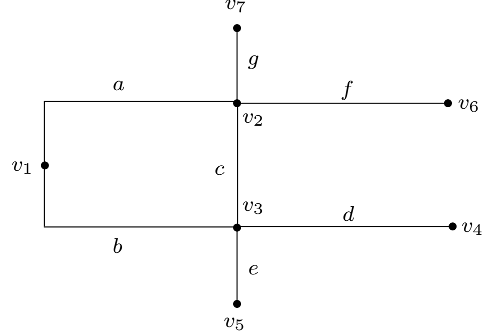


图6.13 系统图例

满足$j > i$的迹$\mathcal{P}_{ij}$的长度和。这当中，迹覆盖$\mathscr{P}$中的最大迹长和称为迹覆盖指数，记为$b_{\max}[\mathscr{P}]$，即

$$b_{\max}[\mathscr{P}] = \max\left\{\ b_e[\mathscr{P}] \mid e \in E\left(G^L[S]\right)\right\}。\tag{6.40}$$

更进一步，设$\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \cdots, \mathscr{P}_s$ 为系统S的所有迹覆盖，定义系统S的迹覆盖指数

$$b_{\min}[S] = \min\left\{\ b_{\max}\left[\mathscr{P}_i\right]; 1 \leq i \leq s\right\},\tag{6.41}$$

即系统S的迹覆盖指数中的最小值。

那么，为什么要引入迹覆盖指数，又怎样确定$b_{\min}[S]$的值呢？欧阳博士解释说，引入迹覆盖指数是用连图方法确定系统(6.39)稳定或同步的基础，可以按定义(6.40)和(6.41)确定迹覆盖指数。首先，可以先对一个给定的迹覆盖$\mathscr{P}$计算迹覆盖指数$b_{\max}[\mathscr{P}]$，再在迹覆盖指数$b_{\max}[\mathscr{P}]$中选择最小值即为$b_{\min}[S]$。这当中，对一个给定的迹覆盖$\mathscr{P}$计算$b_{\max}[\mathscr{P}]$是一件容易的事情。例如，在图6.13中按最短路行走确定的一个迹覆盖$\mathscr{P}$为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{12} = v_1av_2,\ \mathcal{P}_{13} = v_1bv_3,\ \mathcal{P}_{14} = v_1bv_3dv_4,\ \mathcal{P}_{15} = v_1bv_3ev_5, \mathcal{P}_{16} = v_1av_2fv_6,\\
&\mathcal{P}_{17} = v_1av_2gv_7,\ \mathcal{P}_{23} = v_2cv_3,\ \mathcal{P}_{24} = v_2cv_3dv_4,\ \mathcal{P}_{25} = v_2cv_3ev_5,\ \mathcal{P}_{26} = v_2fv_6,\\
&\mathcal{P}_{27} = v_2gv_7,\ \ \mathcal{P}_{34} = v_3dv_4,\ \ \mathcal{P}_{35} = v_3ev_5,\ \ \mathcal{P}_{36} = v_3cv_2fv_6,\ \ \mathcal{P}_{37} = v_3cv_2gv_7,\\
&\mathcal{P}_{45} = v_4dv_3ev_5,\ \mathcal{P}_{46} = v_4dv_3cv_2fv_6,\ \mathcal{P}_{47} = v_4dv_3cv_2gv_7,\ \mathcal{P}_{56} = v_5ev_3cv_2fv_6,\\
&\mathcal{P}_{57} = v_5ev_3cv_2gv_7,\ \mathcal{P}_{67} = v_6fv_2gv_7。
\end{aligned}$$

这个迹覆盖$\mathscr{P}$中各条迹的长度为

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{P}_{v_1v_2}| = |\mathcal{P}_{v_1v_3}| = |\mathcal{P}_{v_2v_3}| = |\mathcal{P}_{v_2v_6}| = |\mathcal{P}_{v_2v_7}| = |\mathcal{P}_{v_3v_4}| = |\mathcal{P}_{v_3v_5}| = 1,\\
&|\mathcal{P}_{v_1v_4}| = |\mathcal{P}_{v_1v_5}| = |\mathcal{P}_{v_1v_6}| = |\mathcal{P}_{v_1v_7}| = |\mathcal{P}_{v_2v_4}| = |\mathcal{P}_{v_2v_5}| = |\mathcal{P}_{v_3v_6}| = 2,\\
&|\mathcal{P}_{v_3v_7}| = |\mathcal{P}_{v_4v_5}| = |\mathcal{P}_{v_6v_7}| = 2,\ |\mathcal{P}_{v_4v_6}| = |\mathcal{P}_{v_4v_7}| = |\mathcal{P}_{v_5v_6}| = |\mathcal{P}_{v_5v_7}| = 3。
\end{aligned}$$

这样，根据$b_{kl}[\mathscr{P}]$的定义，由图6.13知

$$\begin{aligned}
b_{12}[\mathscr{P}] &= |\mathcal{P}_{12}| + |\mathcal{P}_{16}| + |\mathcal{P}_{17}| = 1 + 2 + 2 = 5,\\
b_{13}[\mathscr{P}] &= |\mathcal{P}_{13}| + |\mathcal{P}_{14}| + |\mathcal{P}_{15}| = 1 + 2 + 2 = 5,\\
b_{23}[\mathscr{P}] &= |\mathcal{P}_{23}| + |\mathcal{P}_{24}| + |\mathcal{P}_{25}| + |\mathcal{P}_{36}| + |\mathcal{P}_{37}|\\
&\quad + |\mathcal{P}_{46}| + |\mathcal{P}_{47}| + |\mathcal{P}_{56}| + |\mathcal{P}_{57}|\\
&= 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{26}[\mathscr{P}] &= |\mathcal{P}_{16}|+|\mathcal{P}_{26}|+|\mathcal{P}_{36}|+|\mathcal{P}_{46}|+|\mathcal{P}_{56}|+|\mathcal{P}_{67}|\\
&= 2+1+2+3+3+2=13,\\
b_{27}[\mathscr{P}] &= |\mathcal{P}_{27}|+|\mathcal{P}_{37}|+|\mathcal{P}_{47}|+|\mathcal{P}_{57}|+|\mathcal{P}_{67}|\\
&= 1+2+3+3+2=11,\\
b_{34}[\mathscr{P}] &= |\mathcal{P}_{24}|+|\mathcal{P}_{34}|+|\mathcal{P}_{45}|+|\mathcal{P}_{46}|+|\mathcal{P}_{47}|\\
&= 2+1+2+3+3=11,\\
b_{35}[\mathscr{P}] &= |\mathcal{P}_{15}|+|\mathcal{P}_{25}|+|\mathcal{P}_{35}|+|\mathcal{P}_{45}|+|\mathcal{P}_{56}|+|\mathcal{P}_{57}|\\
&= 2+2+1+2+3+3=13
\end{aligned}$$

且由(6.40)式知$b_{\max}[\mathscr{P}]=21$。

那么，不按最短路在图6.13上行走得到的迹覆盖$\mathscr{P}$是否一定大于21呢？答案是否定的! 例如，在上面的迹覆盖中，将$\mathcal{P}_{23}$ 改为$\mathcal{P}'_{23}=v_2av_1bv_3$，其他迹不变得到$S$的一个迹覆盖$\mathscr{P}'$。这时，仅是$b_{12}[\mathscr{P}'],b_{13}[\mathscr{P}']$和$b_{23}[\mathscr{P}']$的计算结果会发生改变。这时，

$$\begin{aligned}
b_{12}[\mathscr{P}'] &= b_{13}[\mathscr{P}']=|\mathcal{P}'_{12}|+|\mathcal{P}'_{16}|+|\mathcal{P}'_{17}|+|\mathcal{P}'_{23}|\\
&= 1+2+2+2=7,\\
b_{23}[\mathscr{P}'] &= |\mathcal{P}'_{24}|+|\mathcal{P}'_{25}|+|\mathcal{P}'_{36}|+|\mathcal{P}'_{37}|+|\mathcal{P}'_{46}|+|\mathcal{P}'_{47}|+|\mathcal{P}'_{56}|+|\mathcal{P}'_{57}|\\
&= 2+2+2+2+3+3+3+3+3=20
\end{aligned}$$

且指数$b_{\max}[\mathscr{P}']=20<b_{\max}[\mathscr{P}]$，说明按最短路行走得到的迹覆盖$\mathscr{P}$对应的$b_{\max}[\mathscr{P}]$不一定是$b_{\min}[S]$ 对应的迹覆盖，因为$b_{\min}[S]$是对$G^L[S]$所有迹覆盖对应的$b_{\max}[\mathscr{P}]$求最小值，这是确定$b_{\min}[S]$的难点。

4.2.迹覆盖判准. 那么，怎样应用指数$b_{\max}[S]$或$b_{\min}[S]$刻画系统的稳定，进而得到系统同步条件呢？欧阳博士解释说，对任意整数$1\le i,j\le m$，需引入变量$\mathbf{X}_{ij}=\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i$。这时，系统(6.39)变为

$$\dot{\mathbf{X}}_{ij}=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_j\right)-\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(\varepsilon_{jk}H\mathbf{X}_{jk}-\varepsilon_{ik}H\mathbf{X}_{ik}\right), \tag{6.42}$$

这里，$1\le i,j\le m$。应用定积分性质和$n\times n$雅可比矩阵$\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}$，有

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_j\right)-\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i\right)=\left(\int_0^1\mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\left(\tau\mathbf{x}_j+(1-\tau)\mathbf{x}_i\right)d\tau\right)\mathbf{X}_{ij}, \tag{6.43}$$

可以构造判定系统(6.42)稳定性的一个辅助系统

$$\dot{\mathbf{X}}_{ij}=\left(\int_0^1 \mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\left(\tau\mathbf{x}_j+(1-\tau)\mathbf{x}_i\right)d\tau-A\right)\mathbf{X}_{ij},\ 1\le i,j\le m。\tag{6.44}$$

这里，矩阵$A=\mathrm{diag}\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$的结构完全由矩阵$H$决定，且$1\le i\le s$时$a_i\ge 0$，$s+1\le i\le n$时$a_i=0$。注意，应用李雅普诺夫判准判别系统(6.39)同步等价于判别系统(6.44)在$\mathbf{0}$点稳定。这时，构造李雅普诺夫函数$L(t)$需要下面这个假设条件：

条件4. 对任意整数$1\le i,j\le m$，假设存在$\omega_{ij}(t)=\dfrac{1}{2}\mathbf{X}_{ij}^tD\mathbf{X}_{ij}$。这里，$D=\mathrm{diag}\left(d_1,d_2,\cdots,d_s,D_1\right)$, $d_i,1\le i\le s$为正常数，$(n-s)\times(n-s)$矩阵D_1为正定矩阵，且只要$\mathbf{X}_{ij}\ne\mathbf{0}$则$\omega_{ij}(t)$ 对t 的导数

$$\dot{\omega}_{ij}(t)=\mathbf{X}_{ij}^tD\left(\int_0^1 \mathbf{J}_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}\left(\tau\mathbf{x}_j+(1-\tau)\mathbf{x}_i\right)d\tau-A\right)\mathbf{X}_{ij}<0\tag{6.45}$$

成立，即$\omega_{ij}(t)$具有李雅普诺夫函数的性质。

注意，H和A是对角矩阵，可以取$A=a_0H$，这里a_0为一个常数。这样，对系统(6.39)在$\mathbf{f}(\mathbf{x})$连续可微的假设下应用等式(6.43)，条件(6.45)可以简化为

$$\left(\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i\right)^tD\left(\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_j\right)-\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i\right)\right)-a_0H\left(\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i\right)\right)<0。\tag{6.46}$$

另一方面，条件$\varepsilon_{ij}(t)=\varepsilon_{ji}(t)$隐含图$G^L[S]$中边$(v_{i_k},v_{j_k})$和$(v_{j_k},v_{i_k})$同时存在，合为一条边$e_k$。不失普遍性，设标号图$G^L[S]$中有$M$条边$e_1,e_2,\cdots,e_M$上的耦合强度$\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\cdots,\varepsilon_M(t)\ne 0$。这时，如果$|\mathbf{x}_i(t)|<\infty,1\le i\le m$且系统(6.39)满足条件4和

$$\sum_{k=1}^{M}\varepsilon_{i_kj_k}\left|\mathbf{X}_{i_kj_k}\right|^2>\frac{a_0}{m}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j>i}^{m}\left|\mathbf{X}_{ij}\right|^2,\tag{6.47}$$

则系统(6.39)在$\mathbf{0}$点渐进稳定。欧阳博士告诉惠子，条件(6.47)看似复杂，实则是为李雅普诺夫函数存在而引入的条件。首先，定义一个函数

$$L(t)=\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m}\mathbf{X}_{ij}^tD\mathbf{X}_{ij},$$

则由D的定义有$L(t)\ge 0$，可以进一步验证$\dot{L}(t)<0$。实际上，

$$\begin{aligned}\dot{L}(t)\ &=\ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\dot{\omega}_{ij}(t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\mathbf{X}_{ij}^tDA\mathbf{X}_ij\\&\quad-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{m}\left(\varepsilon_{jk}\mathbf{X}_{ji}^tDP\mathbf{X}_{jk}+\varepsilon_{ik}\mathbf{X}_{ik}^tDP\mathbf{X}_{ij}\right)=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3。\end{aligned}$$

这里，由条件4有$\Sigma_1 < 0$。由$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ji}(t), 1 \le i, j \le m$知$|\mathbf{X}_{ij}|^2 = |\mathbf{X}_{ji}|^2, |\mathbf{X}_{ii}|^2 = 0$和假设(6.47)知

$$\Sigma_2 + \Sigma_3 = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j>i}^{n} \mathbf{X}_{ij}^t D \left(A - m\varepsilon_{ij} H\right) \mathbf{X}_{ij} < 0。$$

这样，就有$\dot{L}(t) < 0$，即$L(t)$为系统S上的一个李雅普诺夫函数，由李雅普诺夫判准，系统(6.42)在$\mathbf{0}$点渐近稳定，即系统(6.39)同步。

那么，怎样采用系统的迹覆盖对条件(6.47)进一步明确，得到系统同步时边e_k上的耦合强度$\varepsilon_k(t)$满足的条件呢？首先，如果e_k是$G^L[S]$中的一条边，记$\overline{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_{i_k j_k}, 1 \le k \le M$。现在，对系统$S$的每一对基元$v_i, v_j, 1 \le i, j \le m$选择一条迹$\mathcal{P}_{ij}$而得到系统$S$的一个迹覆盖$\mathscr{P}$。假设$\mathcal{P}_{ij} = v_i e_1 v_{i_1} e_2 \cdots e_{|\mathcal{P}_{ij}|} v_j$，由$\mathbf{X}_{ij}$ 的定义，有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{ij} &= \mathbf{X}_{ii_1} + \mathbf{X}_{i_1 i_2} + \cdots + \mathbf{X}_{j-1j} \\ &= \overline{\mathbf{X}}_1 + \overline{\mathbf{X}}_2 + \cdots + \overline{\mathbf{X}}_{|\mathcal{P}_{ij}|} \end{aligned}$$

对任一整数$n \ge 1$，在柯西-施瓦茨不等式(4.33)中取$(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (1, 1, \cdots, 1)$有不等式$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \le n\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)$，即

$$|\mathbf{X}|_{ij}^2 = \left|\sum_{k=1}^{|\mathcal{P}_{ij}|} \overline{\mathbf{X}}_k\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{P}_{ij}|} \left|\overline{\mathbf{X}}_k\right|\right)^2 \le |\mathcal{P}_{ij}| \sum_{k=1}^{|\mathcal{P}_{ij}|} \left|\overline{\mathbf{X}}_k\right|^2,$$

代入(6.47)式右边有

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j>i}^{m} |\mathbf{X}_{ij}|^2 \le \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j>i, e_k \in \mathcal{P}_{ij}}^{m} |\mathcal{P}_{ij}|\right) \left|\overline{\mathbf{X}}_k\right|^2。$$

故此，如要求

$$\varepsilon_{i_k j_k}(t) > \frac{a_0}{m} \sum_{j>i, e_k \in \mathcal{P}_{ij}}^{m} |\mathcal{P}_{ij}| = \frac{a_0}{m} b_{e_k}[\mathscr{P}],\ 1 \le k \le M$$

则条件(6.47)一定成立。这样就有，如果系统(6.39)中的边$e_1, e_2, \cdots, e_M$上的耦合强度$\varepsilon_k(t)$满足

$$\varepsilon_k(t) > \frac{a_0}{m} b_{e_k}[\mathscr{P}] \text{ 或更进一步，} \varepsilon_k(t) > \frac{a_0}{m} b_{\min}[S],\ 1 \le k \le M, \tag{6.48}$$

则系统(6.39)在$\mathbf{0}$点是渐进稳定的，即系统同步的结论。

那么，怎样应用(6.48)的耦合条件构造同步系统呢？欧阳博士说，可以Lorenz系统为例进行说明。气象研究中有一种抽象的对流模型，即采用在热对流管中的下方加热、上方冷却，研究流体的动态行为。在这个模型中，用x_1表示流体速度，x_2和x_3分别表示水平和垂直的温度差。基于这种模型，美国气象学家Lorenz于1963年提出了一个3-维自治的流体状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = bx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - cx_3 \end{cases},$$

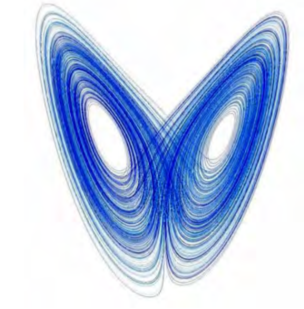


图6.14 Lorenz吸引子

称为Lorenz系统。这当中，a、b是与流体已知常数相关的常数，c是与流体空间相关常数。特别是，当$a = 10.0,\ b = 28.0,\ b = 8/3$时，系统处于混沌状态，敏感地依赖初始点的选择，数值模拟见图6.14。

这时，可以应用条件(6.48)耦合构造同步系统。例如，取m个Lorenz系统为基元构成系统S，即每个基元行为遵从Lorenz系统，标号图$G^L[S]$为图6.10所示的星型。这时，对任意整数$1 < i \leq m$，基元v_i仅与v_1间仅存在唯一的一条迹$|\mathcal{P}_{1i}| = 1$。同时，对任意整数$1 < i, j \leq m$；基元v_i, v_j间的迹必然过顶点v_1，即$|\mathcal{P}_{ij}| = 2$。这样，$\mathscr{P} = \{\mathcal{P}_{1i}, \mathcal{P}_{ij}; 1 < i, j \leq m\}$是图$G^L[S]$的一个迹覆盖。对应地，经过边$v_1v_i$的迹长求和为

$$\sum_{j>i, e_k \in \mathcal{P}_{ij}}^{m} |\mathcal{P}_{ij}| = 1 + 2(m-1) = 2m - 3。$$

这时，由(6.48)只要边上的耦合强度

$$\varepsilon_k(t) > \frac{a_0}{m} b_{e_k}[\mathscr{P}] = a_0 \left(2 - \frac{3}{m}\right),$$

则由这m个Lorenz系统耦合成的系统S同步，其中a_0是一个非0常数。

4.3.图比较判准. 对两个$n \times n$矩阵A, B，如果$A - B$是半正定的，即对任意一个n-维列向量$\mathbf{x}$，$\mathbf{x}^t(A - B)\mathbf{x} \geq 0$，记为$A \succeq B$。这时，一定存在一个可逆矩阵$P$使得$P^{-1}(A - B)P = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s, 0 \cdots, 0)$，$\lambda_i \geq 0, 1 \leq s \leq n$。特别地，如果至少存在一个$\lambda_i > 0, 1 \leq s \leq n$，即$A - B$是正定的，则记$A \succ B$。这样，就在$n \times n$矩阵上建立了一种偏序。类似地，对两个有相同顶点的$n$阶图$G, H$，如果它们对应的拉普拉斯矩阵$L(G), L(H)$满足$L(G) \succeq L(H)$或$L(G) \succ L(H)$，则定义$G \succeq H$或$G \succ H$以明确它们间的序。这样由定义，对任意常数$c, c \neq 0$，$cG \succeq H$或$cG \succ H$当且仅当$c\lambda_k(G) > \lambda_k(H)$或$c\lambda_k(G) \geq \lambda_k(H), 1 \leq k \leq n$。

记$G^L[S]$的边集$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_M\}$。由系统(6.39)的定义，对基元$v_{i_k},v_{j_k},1\leq k\leq M$，图$G^L[S]$中存在非0边$e_k=(v_{i_k},v_{j_k})$当且仅当其上的耦合强度$\varepsilon_{e_k}(t)\neq 0$。定义边$e_k=(v_{i_k},v_{j_k})\in E\left(G^L[S]\right)$对应的初等拉普拉斯矩阵$L_{e_k}=\left(l_{ij}^k\right)_{M\times M}$为

$$l_{ij}^k=\begin{cases}-1, & e=(v_{i_k},v_{j_k})\vee(v_{j_k},v_{i_k}),\\ 1, & e=(v_{i_k},v_{i_k})\vee(v_{j_k},v_{j_k})\\ 0, & e\neq(v_{i_k},v_{j_k})\wedge(v_{j_k},v_{i_k})\wedge(v_{i_k},v_{i_k})\wedge(v_{j_k},v_{j_k})。\end{cases}$$

这里，符合$\vee$表示“或”，$\wedge$表示“交”或“且”。换言之，初等拉普拉斯矩阵L_{e_k}是在$(i_k,j)k)$和(j_k,i_k)位置上为-1，在(i_k,i_k)和(j_k,j_k)位置上为1，其余位置上均为0的一个$M\times M$矩阵。由初等拉普拉斯矩阵的定义有分解式

$$L_{G^L[S]}=\sum_{e\in E}\varepsilon_e(t)L_e。\tag{6.49}$$

对初等拉普拉斯矩阵排序$L_{e_1},L_{e_2},\cdots,L_{e_M}$，则对任意$c_1,c_2,\cdots,c_{M-1}>0,M\geq 2$有

$$c\sum_{i=1}^{M-1}c_iL_{e_i}\succeq L_{e_M}\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{i=1}^{M-1}c_iL_{e_i}\succeq\frac{1}{c}L_{e_M},\tag{6.50}$$

其中，$c=\sum\limits_{i=1}^{M}1/c_i$，这个式子可以由数学归纳法得知。

首先，$M=2$时(6.50)中的等式成立。这时，(6.50)的左边$=c_1L_{e_1}=1/(1/c_1)L_{e_1}=$右边。当$M=3$时，设$\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^t$为一个列向量，则(6.50)式即要求

$$c_1\mathbf{x}^tL_{e_1}\mathbf{x}+c_2\mathbf{x}^tL_{e_2}\mathbf{x}\ \geq\ \frac{1}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}}\mathbf{x}^tL_{e_3}\mathbf{x}$$

或矩阵形式

$$c_1\mathbf{x}^t\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mathbf{x}+c_2\mathbf{x}^t\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\mathbf{x}\geq\frac{1}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}}\mathbf{x}^t\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\mathbf{x},$$

即

$$c_1\left(x_1-x_2\right)^2+c_2\left(x_2-x_3\right)^2\geq\frac{c_1c_2}{c_1+c_2}\left(x_1-x_3\right)^2。$$

现在，设$a=x_1-x_2,b=x_2-x_3$则$a+b=x_1-x_3$代入上式中，有

$$c_1a^2+c_2b^2\geq\frac{c_1c_2}{c_1+c_2}(a+b)^2\quad\Rightarrow\quad(c_1a-c_2b)^2\geq 0$$

显然成立，且以上每一步都可逆，故知(6.50)式在$M=3$时成立。

一般地，假设(6.50)式在$3\le M\le k$时成立，考虑$M=k+1$时的情形。这时，由归纳假设有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}c_iL_{e_i} &= \sum_{i=1}^{k-1}c_iL_{e_i}+c_kL_{e_k}\\ &\succeq \frac{L_{e_{k-1}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{1}{c_i}}+c_kL_{e_k}\succeq\frac{L_{e_{k+1}}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{1}{c_i}+\frac{1}{c_k}}=\frac{L_{e_{k+1}}}{\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{c_i}},\end{aligned}$$

即$M=k+1$时(6.50)式也成立。应用数学归纳法，知(6.50)式对任意的$M\ge 2$成立。特别地，在(6.50)式中取$c_1=c_2=\cdots=c_{M-1}=1$有

$$(M-1)\sum_{i=1}^{M-1}L_{e_i}\ \succeq\ L_{e_M}。\tag{6.51}$$

基于图比较的系统同步判准需要以下假设条件：

条件5. 对任意向量$\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j\in\mathbb{R}^n$，当$\varepsilon>a>0$时

$$(\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i)^t\left((\mathbf{f}(\mathbf{x}_j)-\mathbf{f}(\mathbf{x}_i))-\varepsilon H\left(\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i\right)\right)\le -c\left|\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i\right|^2$$

成立。这里，c为一个正数，$H=\mathrm{diag}(h_1,h_2,\cdots,h_s,0,\cdots,0)$为对角矩阵。

对列向量$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_m$，记$\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1^t,\mathbf{x}_2^t,\cdots,\mathbf{x}_m^t)^t$为一个$nm$-维的列向量。类似地，记$\mathbf{f}(\mathbf{x})=(\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)^t,\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2)^t,\cdots,\mathbf{f}_m(\mathbf{x}_m)^t)^t$。设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{kl})_{p\times q}$，则$A$和$B$的克罗内克乘积定义为$A\otimes B=(a_{ij}B)_{mp\times nq}$。例如，

$$\begin{pmatrix}3&1&4\\0&1&0\\4&1&3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&4&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\4&1&3&0&0&0\\0&0&0&3&1&4\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&4&1&3\end{pmatrix}$$

这样，系统(6.39)可以更紧凑地写成

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})-\left(L_{G^L[S]}\otimes H\right)\mathbf{x}。\tag{6.52}$$

这时，如果条件5成立，且在$G_{G^L[S]}$的顶点集上存在一个无向标号图G_0^L使得对任意t有

$$L_{G_0^L}L_{G^L[S]}\succ a_0L_{G_0^L},\tag{6.53}$$

则有$\mathbf{x}^t\left(L_{G_0^L}\otimes I_n\right)\mathbf{f}(\mathbf{x})\leq a_0\mathbf{x}^t\left(L_{G_0^L}\otimes H\right)\mathbf{x}$。这时，定义$L(t)=\frac{1}{2}\mathbf{x}^t\left(L_{G_0^L}\otimes I_n\right)\mathbf{x}$，则由条件(6.52)知$\dot{L}(t)\leq 0$且等号仅当$\mathbf{x}_i=\mathbf{x}_j, 1\leq i,j\leq m$，即$\mathbf{x}_i, 1\leq i\leq m$在集合$\mathrm{Sta}[S]$中时成立。换言之，$L(t)$为一个李雅普诺夫函数，即对满足条件5的系统(6.39)，如果存在图G_0^L满足图比较(6.53)式，则系统(6.39)同步。

对给定基元$\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$的系统S上的标号图$G^L[S]$，如果基元间均存在耦合作用与反作用且遵从牛顿第三定律的特性，即作用与反作用大小相同，作用方向相反，则对应的系统标号图为完全标号图K_m^L。这时，最小迹覆盖

$$\mathscr{P}=\{\ \mathcal{P}_{ij}\mid\mathcal{P}_{ij}=v_{i_k}e_kv_{j_k}, 1\leq k\leq m(m-1)/2\},$$

即$b_{\min}[S]=1$。这时，由(6.48)式只要边$e_k, 1\leq k\leq m(m-1)/2$上的耦合强度$\varepsilon_k(t)>a_0/m$则系统(6.39)同步。这样，一种自然的想法是在(6.53)中取$G_0^L=K_m^L$，将条件(6.53)表述为一种图与图间的比较关系。这时，$L_{K_m^L}=mI_m-J$，其中J是元均为1的$m\times m$矩阵且有$L_{K_m^L}L_{G^L[S]}=mI_mL_{G^L[S]}=mL_{G^L[S]}$。这样，条件(6.53)为

$$mL_{G^L[S]}\succ a_0L_{K_m^L}\quad\Rightarrow\quad G^L[S](t)\succ\frac{a_0}{m}K_m(t)。\tag{6.54}$$

应用(6.54)，条件(6.53)还可用图$G^L[S]$的最小非0特征值表示为$\lambda_2\left(G^L[S]\right)>a_0$，因为完全图$K_m^L$的拉普拉斯矩阵特征值为0和$m(m-1$重)，即$\lambda_2\left(G^L[S]\right)=m$，故只要$\lambda_2\left(G^L[S]\right)>a_0$即有(6.54)式。

类似地，可以选择标号图G_0^L为其他已知$b_{\min}[S]$或$\lambda_2\left(G_0^L\right)$的图类，应用(6.53)给出系统(6.39)同步的图比较条件。同时，也可以在(6.39)中去掉$\varepsilon_{ij}(t)=\varepsilon_{ji}(t), 1\leq i,j\leq m$，即耦合对称的假设而得到与(6.48)或(6.53)类似的系统同步条件。注意，系统(6.39)中H是一个对角矩阵的假设，蕴含了系统基元间的耦合作用是一种孤立的线性作用，即对任意整数$1\leq i\leq m$，基元$v_j, 1\leq j\leq m$对v_i的作用可以表示为$\mathbf{x}_j$的线性函数即$h_j\mathbf{x}_j$而与其他基元$v_k, k\neq j$作用于v_i无关。

第5节 同步益害

同步是宇宙万物展现在人眼中的一种重要的运动性状，是人类系统认知万物、把握事物变化规律进而造福人类自己的基础。欧阳博士告诉惠子，十七世纪中叶，欧洲各国一些人热衷于远航探险。那时，人们已经掌握了利用太阳和海平面间的夹角确定航行纬度，但缺乏有效的方法测量经度，准确确定船只所在的航行位置的难点在于当时找不到一个计时准确的时钟。为此，惠更斯与合作者用机械钟在一次航行中进行了试验。这次实验中，他们为防止时钟因为船上的颠簸停摆，同时放置了

两个时钟。这次试验获得了成功，较为准确地预测了船所在位置。但怎样才能保证船上两个时钟的时间相同，使得一个时钟停摆后可以根据另一个正常工作的时钟重新设置时间呢？惠更斯搬来两把老旧的靠背椅，在两个椅背上架了一根木棍，然后在棍子上挂了两个沉重的木摆，以此来模拟航行中悬挂于船舱上的个时钟的摆动。实验让惠更斯惊讶地发现，无论两个木摆的初始位置如何，大约30分钟后两个木摆总是会以相同的频率摆动，且二者的相位总是处于相反的位置，实现反相同步。惠更斯曾将钟摆的同步现象写信告诉英国皇家学会但没有引起人们的关注。惠更斯未能从数学上对观察到的现象给出理论解释，但在他的《钟摆论》中对同步现象的物理机制给出了解释，即钟摆同步的原因在于两个钟摆通过木梁晃动进行能量交换、信息传递和相互作用，当两个钟摆反相同步时，作用于木梁上的合力为零，以使整个系统则处于一个平衡态。那么，怎样用数学对钟摆同步现象进行刻画呢？许多学者构建数学模型，从理论上对钟摆同步进行了研究。这当中，较有影响力的是上世纪八十年代Kuramoto提出的相同步模型。那么，什么是相同步呢？假设两个振子O_1,O_2的行为可以用相位$\phi_1(t),\phi_2(t)$刻画，如果存在整数n,m或是存在一个充分小的正数ε使得



图6.15 钟摆同步

$$|n\phi_1(t)-m\phi_2(t)|=0 \quad 或 \quad |n\phi_1(t)-m\phi_2(t)|\leq\varepsilon, \tag{6.55}$$

即相位间存在固定的比例关系或是在固定的比例关系下很接近，则称振子O_1,O_2相同步，这实际上是一种弱化的同步，比本章第1节(6.9)式定义的系统同步要弱，因为两个振子O_1,O_2即便是相同步，它们的振幅也可能不同。

为刻画钟摆的相同步，Kuramoto假设一组振子$O_i,1\leq i\leq m$构成系统S且振子间间均存在耦合，耦合强度相同。这时，系统S对应的标号图为K_m^L，系统方程为

$$\dot{\phi}_i(t)=\omega_i(t)+\frac{c}{m}\sum_{j=1}^{m}\sin\left(\phi_j(t)-\phi_i(t)\right),\quad 1\leq i\leq m。 \tag{6.56}$$

这里，ϕ_i是第i个振子的相位，$\dot{\phi}_i$是对应的角频率，ω_i为振子孤立即无耦合时的自然频率，c为耦合强度。特别地，对$m=2$或系统标号图为K_2^L情形，方程(6.55)简化为

$$\begin{cases}\dot{\phi}_1(t)=\omega_1(t)+\frac{c}{2}\sin\left(\phi_2(t)-\phi_1(t)\right)\\ \dot{\phi}_2(t)=\omega_2(t)+\frac{c}{2}\sin\left(\phi_1(t)-\phi_2(t)\right)\end{cases} \tag{6.57}$$

这时，如果系统相同步，取$\phi_2'(t)=(m/n)\phi_2(t)$对振子$O_2$的相位代换。不失普遍性，

仍记$\phi_2'(t)$为$\phi_2(t)$，则有$\phi_1(t)-\phi_2(t)=$常数，即$\dot{\phi}_1(t)-\dot{\phi}_2(t)=0$，代入方程(6.56)有

$$\omega_1(t)-\omega_2(t)-c\sin\left(\phi_1(t)-\phi_2(t)\right)=0,$$

这说明耦合强度$c\geq|\omega_1(t)-\omega_2(t)|$时，振子$O_1,O_2$就具备了相同步条件。特别是，振子$O_1,O_2$的自然频率$\omega_1(t)$与$\omega_2(t)$越接近越容易实现相同步。类似地，对方程(6.56)还可以采用平均场法对系统S的相同步进行一般性讨论。

系统同步(6.9)要求在某一时刻t^*后，基元轨线趋于一致的要求太强了。欧阳博士解释说，自然界中出现这种同步现象的机率极小，多数时候是一种近似同步，按一定规则变化出一幅幅美丽的图画，如图6.16中的鸟群、孔雀开屏和鱼群等。



(a) (b) (c)

图6.16 近同步现象

这时，需要对系统同步(6.9)适当放宽，类似于相同步(6.55)引入泛同步的概念，即对任意整数$1\leq i,j(i\neq j)\leq m$，在$t\to\infty$时存在调节函数$g_{ij}(\mathbf{x}_j(t))$使得

$$\mathbf{x}_i(t)-g_{ij}(\mathbf{x}_j(t))\mathbf{x}_j(t)\to\mathbf{0}\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{t\to\infty}|\mathbf{x}_i(t)-g_{ij}(\mathbf{x}_j(t))\mathbf{x}_j(t)|=0。\tag{6.58}$$

特别地，当$g_{i1}(\mathbf{x}(t))=g_{i2}(\mathbf{x}(t))=\cdots=g_{im}(\mathbf{x}(t))$，即系统调节函数为一个给定的函数$g(\mathbf{x}(t))$时更需要从理论上搞清，进行数据模拟和控制，服务于人类自身发展。但任何事物都是一分为二的，同步应用也不例外，既有其有利于人类社会的一面，也存在有害的一面。

5.1.同步益处. 按系统动力学的观点，欧阳博士告诉惠子，能为人类服务的系统大多是同步系统或是泛同步系统，因为对这类系统，小到家用电器、大到航天飞机或宇宙飞船，人类可以进行系统的自动控制设计，把控或调节系统运动状态，按“趋利避害”的原则实现人类希望的控制目标。

（1）同步运动. 人类在模拟自然现象中，最需要模拟的是运动，拓展人类的活动区域和空间。例如，牛顿力学刻画质点或刚体的运动规律等。注意，刚体运动是质点运动的“同步”推广，为什么这样说呢？因为如果把一个刚体划分为基元，无论基元多大或多小，各基元一定是按照一个孤立点方程运动，即同步。这里，孤立点方程就是刚体的运动方程。但对于柔体或近柔体，如生物体或自组织系统就不能下

这样的结论。欧阳博士问惠子:“把一个人分为干体、手和脚5个部分。那么，两只脚能不能一只向前一只向后地行走?”惠子回答说:“当然不能！一只脚向前一只脚向后根本走不动，因为两只脚用力方向相反抵消了。”欧阳博士说:“正确！那就是说，人要前行必须是两只脚同时向前行，这与干体一起不就是同步吗!”惠子深有感悟地说:“是啊！这时两只脚与干体需同步运动!”欧阳博士问她:“脚和手一个向前，一个向后是做同步运动吗?”惠子说:“它们一个向前一个向后，方向不一致，应该不是同步。可是，它们又都在跟随干体前行，好像也在做同步运动呢！”见惠子对此还有些含混，欧阳博士解释说，脚和手一个向前一个向后，是为了人体运动中的平衡，可以近似地认为它们在做反同步。其中，脚和躯干一致同步向前，手向后摆是在维持人体运动平衡。惠子听后若有所悟地点点头。欧阳博士进一步解释说，如果把人手的状态函数乘以调节函数-1，那么，人的手和脚就与干体一样在做同步运动了。故此，按(6.58)式人体的这5个部分是在做泛同步运动。一般地，如果将陆地一个动物划分为脚、手和主干等基元，则这个动物运动一定是泛同步的，因为假设主干相对大地的运动状态为$\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$，手和脚相对于动物主干部分的运动分别为$\mathbf{x}_2 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_2)$和$\mathbf{x}_3 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_3)$，则当$t \to \infty$时，该动物的手和脚相对于地球坐标系的运动方程



图6.17 人步行运动



图6.18 历史车轮

$$\begin{cases} \mathbf{x}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_2) \to g_{21}(\mathbf{x}_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{x}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_3) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_3) \to g_{31}(\mathbf{x}_3)\mathbf{f}(\mathbf{x}_3) \end{cases}$$

即$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2/g_{21}(\mathbf{x}_2) \to \mathbf{0}$，$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3/g_{31}(\mathbf{x}_3) \to \mathbf{0}$为泛同步。欧阳博士进一步解释说，为什么历史的车轮是如图6.18那样的向前行走而不能开倒车？因为人眼能只能看到前面而看不到后面！这样，假设存在一个均匀地时光流逝参数即时间t，那么，我们有$t > 0$且遵从加法群$(\mathbb{R};+)$中的可加性，对任意两个时间t_1, t_2有$t_1 + t_2 > t_1$的性质。相应地，事物T在人类观测中随着时间t的流逝而变化，可以由状

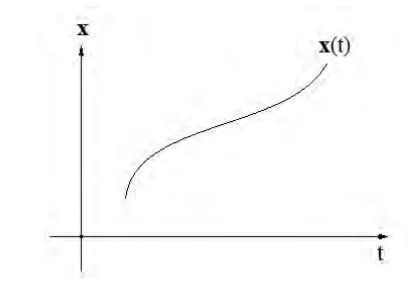


图6.19 事物与时间同步

态方程$\mathbf{x}_T = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$刻画，见图6.19。这实际上也是一种同步假设，是假设事物的发展变化与时间t泛同步，即$t \to \infty$时

$$\mathbf{x}_T - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}_T - \frac{1}{t} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot t = \mathbf{0}。$$

这里，调节函数$g(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))/t$。

欧阳博士告诉惠子，同步应用中最常见的情形是车轮运动，包括人力车、汽车和火车。这当中，大型平板运载车、火车的车轮数在数十个或上百个。那么，怎样保证这些车轮做同步运动呢？这一点在火车设计中尤其重要，与惠更斯解释钟摆相同步类似，三个一组由大梁或钢架保证车轮同步运动，应对轨道的平直差异、缝隙和拐弯需要，轮子和钢轨接触的部分被设计成斜面，外圈直径小内圈大。这样，火车拐弯时左右轮子都是中轮接触钢轨，大轮、小轮悬空在钢轨上不起作用，小轮走小圆，大轮走大圆。

（2）同步信息. 机械运动中的信息，如力的分配等经由构件感知自动完成传递。类似地，信息传递是在一个组织内物理位置上的移动，通过文字、语言、电码、图像、色彩、光和气味等载体传播以到达受众，是生态系统基本功能之一，包括发出端和接收端。同步传递，指接收端同时收到发出端在某一时间t发出信息或指令。

同步在通讯领域应用的著名例子是同步卫星，即应用运行在与地球同步轨道上的人造卫星传输各种电视节目，丰富了人的文化生活。同步卫星运行在距地球大约为36000km的高度上，采用多级火箭发射，见图6.20。在地面发射时，先是将卫星送入近地即初始轨道上运行；当卫星飞临地球赤道上空时，地面控制火箭再次点火加速，让卫星在赤道平面上按椭圆轨道运行。然后，待卫星飞临轨道最远地点时，地面再次控制火箭点火加速，将卫星最终送入到相对地球静止的运行轨道。

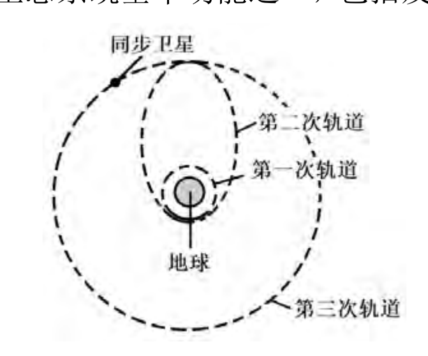


图6.20 同步卫星

同步卫星之所以称为“同步卫星”，是因为在地面上观测同步卫星，卫星与地球的相对位置保持不动，处在相对静止状态。而在地球外观测同步卫星，卫星则是处在运动状态，其运行方向与地球自转方向相同，运行轨道为位于地球赤道平面上的圆形轨道，周期与地球自转一周的时间相同，即23小时56分4秒，速度大约为3.08km/s，与地球自转角速度相等，即同步卫星是与地球同步运行的卫星。

（3）与自然同步. 人为万物的成员之一。欧阳博士告诉惠子，是人在认知中假设万物遵从与时间t同步，在刻画万物随时间t的发展与变化。如果把“人”视为独立

于万物之外，人与万物中的其他组份自然构成一个2-元系统，见图6.21。这当中，乾卦与坤卦中的阳爻与阴爻即乾元、坤元，构成人与自然间的耦合作用，形成一幅乾元“奋发向上”，坤元“谨慎前行”，二者浑然一体的图画，即中国古文化中太极图的自然景象，类似于猫和老鼠构成的生态关系，可以近似地用Lotka-Volterra模型刻画，得出“人与自然和谐共生”的结论，即《道德经》第四十章中的“反者道之动，弱者道之用”，循环往复的变化与发展。欧阳博士解释说，这正是中国古哲学中“天人合一”，即人与自然“协同共生”的同步思想。

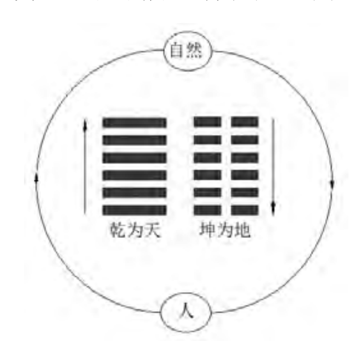


图6.21 人与自然系统

人与自然同步发展的思想，在孔子为《易经》作的《文言传》中表达的更为明确，对“大人”行为提出要“与天地合其德，与日月合其明，与四时合其序，与鬼神合其吉凶”，这当中的“合”即同步要求，要求人的行为与天地、日月、四时和鬼神同步，因为“有德”的“德”指人与自然合拍即同步的修为，是中国人文教化的追求。对应地，“大人”是“有德有位”的人。同时，在人与自然这个2-元生态系统中，人在依赖自然生存的同时，其主观意识会对自然发生反作用。这当中，符合自然发展规律的行为与自然共生；对自然的侵扰或破坏行为如不加以约束，累积到一定程度会产生质变，促成自然对人类的反扑，表现为一些极端自然灾害频繁爆发，影响人类自己的生存发展。正是基于人与自然的这种生态关系，中国古人对自然的侵扰行为定性为“无德”而唾弃，要求人与自然同步即“有德”，与自然共生，这与猫和老鼠或Lotka-Volterra模型等2-元生态系统中所蕴含的“对立统一”思想一致。

类似地，与人类观测到的自然系统不同，人类社会中的各种组织是由人构成的生物系统，是人为实现一定的目标，相互协作结合而成的集体或团体，在一定程度上会受到人的主观意识的制约。在这种情形下，组织同样需要科学认知自然并与自然同步，即组织纲领须指引组织随时间t进程有序发展，包括：① 组织结构相对稳定；②组织纲领、行为规范得到成员的普遍认同与遵从；③ 组织内部的利益冲突可调和等。所以，如果把一个组织的成员视为基元，成员在组织结构上发挥相互影响或耦合作用。那么，组织的理想状态是一个与自然协同且成员按既定纲领和目标的同步系统，而这恰是中国先哲们为人类可持续发展绘制的一幅蓝图。

5.2.同步害处. 人类作为万物中的一个组份，对万物的认知犹如盲人摸象，与老子《道德经》开篇中“名可名，非常名”或苏轼在《题西林壁》中“不识庐山真面目，只缘身在此山中”的思想一致，即人对万物的认知是人类自己对万物的一种局

部认知。如果站在人与自然这个2-元系统中审视人对万物的认知，即其在有益于人类的同时会对自然产生有害的结果。同时，欧阳博士解释说，科学的局限性又常让人看不清对自然有害的一面，需要人类采用组合的方法进行研究，把科学成果放到人与自然这个2-元系统中考量，服务于人类自己。历史的经验表明，忽略科学应用对自然的影响，不仅会对自然产生侵扰，对人类也会产生负面影响，出现事故或灾难，同步也不例外，如蚂蚁、蝗虫群同步地对粮食等农作物的撕咬和毁坏等。

[**齐步过桥事件**] 这是一个真实的因齐步过桥引发惨剧的事件。1831年，一队拿破仑士兵穿戴整齐，在指挥官口令下迈着整齐的步伐通过法国昂热市的一座斜拉索大桥。看着士兵整齐威武的雄姿，一些人不自觉地在跟在队伍后面也走上了桥面。不想，在队伍快接近桥中部时，桥面突然发生强烈的振动。不一会儿，大桥索道断裂，桥面坍塌，官兵和桥上的行人跌入水中，部分人因此失去生命。后经过一些专业机构的实地勘查和研究，造成这次惨剧的原因是士兵齐步走与吊桥固有频率产生了共振， 因为士兵齐步走的频率碰巧与大桥固有频率一致，造成桥体振动的叠加效应，使振幅超过了最大抗压能力，致使桥体垮塌。这次事件引发了专业人士对同步现象的反思。欧阳博士说，后来许多国家规定，大队人马步行过桥时，将“齐步走”改为“便步走”，以避免类似事件的发生。

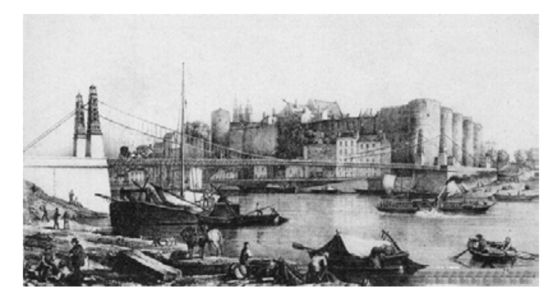


图6.22 部队齐步过桥危害

法国拿破仑士兵齐步过桥事件在于士兵齐步走的频率与大桥固有频率产生叠加效应。类似地，大风与桥梁频率的叠加同样也能造成大桥的垮塌。例如，美国华盛顿州的一座建于1938年塔科马海峡大桥，在1940年11月7日垮塌，原因是桥面在大风下发生了强烈的反对称扭转振动，70分钟后桥面折断坠落峡谷，而当时的风力也就是八级左右，但大风的频率与大桥固有频率发生了叠加效应。

此外，丢入池塘水中的一块小石子引起波纹的波峰、波谷是一种同步现象，在池塘中形成一个个顺次相连的波浪，让人流连忘返。这种同步现象也会产生危害。例如，欧阳博士解释说，洪水泛滥时，波峰一波波地拍打农舍造成农舍垮塌，长时间侵泡农作物造成农作物减产；漫天飞来的蝗虫落在田里，一波波啃食着农作物，造成农作物颗粒无收；地震波对建筑物、构筑物的毁坏等，无一不是同步运动对人类社会造成危害的事例。

谣言，指的是在没有事实的前提下，一些别有用心的人为实现其个人目的故意捏造并通过现代传播途径，如互联网或自媒体等在公众中散布的言论。例如，捏造某一公众人物的死亡、婚姻或是私生子信息等在社会公众网络上炒作，吸引观众或

粉丝猎奇的心理实现其商业目的等。谣言传播与病毒类似，速度快，尤其是在互联网或是手机终端的传播，受众会层层放大，对扰乱社会不亚于病毒传播的危害。那么，怎样定量计算谣言传播的范围呢？假设某一类谣言的传播指数为R，即一个谣言传播者将一个谣言平均传播给R个人。这样，第k级同步收到谣言的人数为R^k个。例如，图6.23中$R = 3$，第1级同步收到谣言的人数为3人，第2级人数为$3^2 = 9$人，$\cdots$。这样，谣言一级级地传播下去，直到正面消息的出现才会终止。这里，谣言的每一级传播构成一个波峰面，谣言同步到位于达波峰面的受众。那么，为什么一些人会相信谣言并一级级地进行传播呢？欧阳博士解释说，原因在于正面消息的缺失。人们得不到正面消息时，就会为谣言传播留下生存的土壤。同时，也并不是所有谣言都会对社会造成危害。有些谣言在某种情形下可以起到休闲与娱乐的作用。例如，娱乐圈中一些谣言的散布人往往是谣言的主角或其背后所得利益者，“炒作”而已，观众将其当作一种娱乐，作为饭后聊天或炫耀的资本，就连传播者本人可能也不相信谣言是真的，因为人在生活之余需要一定程度上的精神放松，娱乐而已。

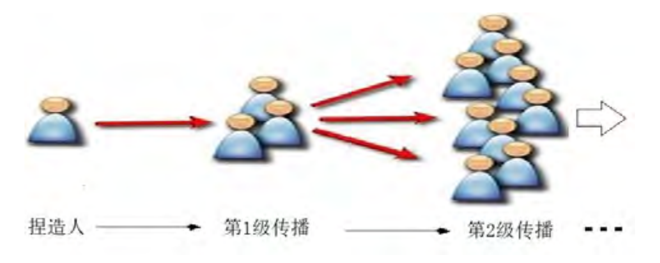


图6.23 谣言传播

第6节 注释与评论

6.1. 同步是一种有趣的运动现象，对人类社会而言既有益处又存在害处，最早由惠更斯研究同步钟摆开始，后逐渐受到人们的重视。实际上，人对万物的认知有一个不能回避的假设，即人类认知一件事物与该事物的真实行为同步。否则，人类不可能认知该事物，实现与万物的同步共进。故此，同步是人类模拟其他动物造福人类，提高生存能力的基础，因为仅当系统各组件按协调一致的方向同步进展才能最终实现既定目标。反之，则可能无法实现既定目标，甚至造成机毁人亡。

6.2. 一般地，系统同步刻画的，是系统基元在开始可能不同步但随着时间的发展趋于一致的一种现象，如观众对一场演出股掌，在开始几秒钟掌声并不一致，但几秒钟后掌声则一致或同步。在自动控制领域，需人们进行主动的同步调控，以防止系统出现不同步状态。一般地，同步系统的每个基元态减去最终的同步态，得到基元态的误差向量在$\mathbf{0}$点一定是渐进稳定的。这样，系统同步问题可以转化为系统稳定问题，由系统的渐进稳定条件得到系统是否同步的结论，见文献[HLW]、[CLW]和[LLC]等。

6.3. 系统同步的主函数法由Pecora和Carrol在文献[PeC]中提出，其实质是假设基元间的作用平等，应用李雅普诺夫最大指数为负值的条件，假定系统在**0**点处渐近稳定性，进而确定系统的同步化区域，见文献[PeC]和[LLC]。对李雅普诺夫指数的进一步讨论可见与动力系统有关的文献，如文献[BrG]和[Lyn]等；系统同步的连图判定法针对的是一类相对特殊的非线性系统，由Igor Belykh等人在文献[BBH1]和[BBH2]中提出并研究，文献[LLC]中有专门的一章对这种方法进行了介绍。本章中，我们采用图论术语引入了迹覆盖指数的概念，对其连图判定的思想和图比较判准进行了一些概括与简化。



荒畦九月稻叉牙，蛰萤低飞陇径斜。

— 唐.李贺《南山田中行》

第 7 章
矛盾系统

****

是谁多事种芭蕉，
早也潇潇，晚也潇潇。
是君心绪太无聊，
种了芭蕉，又怨芭蕉。

— 清.蒋坦《秋灯锁忆》

第1节 逻辑一致

人对万物认知中有一个基本假设，即一件事物的变化遵从因果规律且人按对事物的观测可以把握事物的这种因果关系，预测事物的未来。这一假设要求人在对万物认知中遵从“逻辑一致”性，不存在前后不一致，违反逻辑规则而出现的逻辑错误，即同一个主体对事物的认知不能作出前后矛盾或互相对立的判断。例如，先秦韩非子在他的《韩非子-难一》中有一则关于茅和盾的寓言故事，说是楚国有一个商人在市场上兜售盾牌和长矛，向过往的行人吹嘘他左手中的盾牌说：“我手中这面盾牌坚固极了，没有什么东西能穿透它！”接着，又吹嘘他右手中的长矛说：“我手中这根长矛锋利无比，再坚固的东西它也能穿透！”这时，人群中有一个人实在看不下去了，对他说：“你的盾坚固无比，你的茅尖锐无比，好啊，实在是好啊！请用你右手中的矛刺左手中的盾，让大家看看结果怎么样？”这个人一下子傻眼了，站在那里张口结舌，回答不上来。这就是“矛盾”一词的来源，因为什么都能刺穿的矛与什么都不能刺穿的盾不可能同时存在这个世界上，即他的话语在逻辑上自相矛盾。



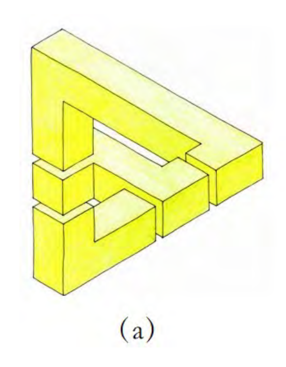
图7.1 矛与盾

人类在对万物的认知中，一直在遵从“逻辑一致”的假设基础上，试图刻画事物变化的因果关系，认为这种由“因”到“果”过程是唯一的，可以定量刻画。表面上，欧阳博士告诉惠子，这种假设对于非生物似乎是正确的，但对于生物则不一定，因为动物对自然有一种主观意识能力，植物看似也有这种主观意识能力，只是在地域上有一定局限性。欧阳博士问惠子：“在人在没有完全搞清一件事物变化机理的前提下，凭什么假设它是非生物，凭什么假设它一定没有主观意识能力，又凭什么假设它的行为遵从逻辑一致性呢？”惠子有些含糊地问欧阳博士：“像一块泥土、一块矿石一样的物质为什么不能假设它是非生物呢？”欧阳博士解释说：“生物也好，非生物也罢，都是人自己的界定，因为人至今也没搞清楚意识的本源，进行模拟。如果单纯从运动与静止区分，又有哪一件事物不是处在运动中的呢，即便是一块你看起来处在静止状态的矿石也是相对的，因为至少在微观层面上，它内部的原子、原子核和电子不是一直在那里不停地运动着的吗！”惠子点点头说：“是这样的，爸爸！运动是绝对静止是相对的。可是，如果一件事物前后行为不一致，人又怎么能认知

这件事物呢!”欧阳博士回答说:“这个问题问得好!经典科学一直认为事物变化遵从逻辑一致的原则。那么,谁来界定这里的‘一致’还是‘不一致’呢?”惠子回答说:“应该是人类自己吧!可是这样一来,假设事物变化中遵从逻辑一致性与假设人能对其认知不就是一回事了吗?”欧阳博士肯定地说:“正确!是人自己在界定这种一致性,是人自己在刻画事物的变化,祈求万物变化与人的认知同步。这里的认知主体是人,是人类自己。可是在人的眼中,矛盾又是‘无处不在,无时不有’。也就是说,任意事物的变化过程中都存在矛盾这种逻辑上的不一致,这说明了什么?”惠子反问着说:“这是不是说明人对万物认知的局限性,说明人对事物的认知应当遵从循序渐进的原则?”欧阳博士肯定了她的看法,说这还只是问题的一个方面。更重要的,在于这说明了人对万物的认知中,坚守逻辑一致的原则不可能认知万物,需要不断地扩展人类认知万物的方法和手段,将经典科学中的逻辑一致扩展到对矛盾即“逻辑不一致”的包容,形成新的“逻辑一致”,因为这正如上面那则关矛与盾故事寓言的,人认知万物首先需要做到自我逻辑一致,对万物认知是真相而不是假象,实现对万物的认知与万物变化同步,进而把握万物。

1.1.认知同步. 科学认知一件事物的核心在于对事物真相的认知。这当中,有两个事项需要讨论:一是人类认知万物是循序渐进的,不可能“一朝一夕”地一下就能把握事物本真;二是人类认知的局限性,把握事物真实可能需要历经万代,也可能永远在认知的路上。

(1)假象成真. 人类凭借所拥有的“六根”,即眼、耳、鼻、舌、身和意认知万物,形成对万物认知的共识。对六根在人之中的地位,有这样一句话,即:“耳听为虚,眼见为实”,意思是传闻不一定是真的,亲眼所见的真实可靠。那么,眼见就一定为实吗?答案是不一定!眼见可能是假象但却同样能引起人心灵的震撼与共鸣。


(a)


(b)


(c)

图7.2 错位图像

例如,为什么大多数人都认为图7.2(a)中的彭罗斯三角形不可能,是思维上感觉它不可能在平面上出现,而它实际上是一种三维形体的错位投影。欧阳博士告诉惠子,一些摄影爱好者利用物体位置差异拍摄出许多奇异的,令人不可思议的美丽

图片。例如，图7.2（b）中的那个人真的在托着空中一团云吗？图7.2（c）的那个小姑娘真的拿两个手指就可以把她爸爸拽起来吗？当然不是，这不过是错位摄影的结果，让不在一起的物体投影到平面上的结果。

那么，让不同人站在不同的地点进行观测不就可以得到真相了吗？惠子这样问到。例如，在图7.2（b）和（c）中，在人和云彩或是小姑娘与她爸爸之间选择拍摄位置，一定可以得到不同的拍摄照片。欧阳博士解释说，变换不同的拍摄位置的确可以解决视觉错位问题，得到事物的真实拍摄结果，即在人力所能及的范围内解决视觉错位。那么，超出了人力所能及的范围会怎样，还会得到真实的认知结论吗？这时，由于人体构造基本上是一致的，即便是所有的观察人看到的景象都一致，所有人对一件事物的认知同步也不一定代表着事物真实，因为人的六根近乎一致，感知事物的结果也可能趋向于一致，但可能仍然是假象而不是事物的真相。这当中有一个著名的例子，即寻找宇宙中心问题。农耕社会中，人们日出而作，日落而息，几乎所有人都认为地球是宇宙的中心，这种观点直到1543 年哥白尼发表《天体运行论》提出日心说，但并不为人们所接受。直到1609年伽利略发明了天文望远镜，发现了一些支持日心说的天文现象才开始引起人们关注，逐渐承认地球绕着太阳转，认为太阳是宇宙中心。现如今，航天科技的发展以使人们知晓，太阳，包括银河系的中心都不是宇宙的中心。那么，宇宙中心在哪里？这个问题的答案需要不断修正，并非是人的认知同步就是正确答案。

（2）局部为真. 既然任何一个人都是经由其六根在感知一件事物，那么，为什么人们还会对认知的结论发生争吵呢？欧阳博士解释说，原因在于对事物认知结果的不同。这里，人体构造虽然基本相同，但不同的人对事物的反映、感知能力有差别，包括先天和后天能力。这种对事物感知能力的差别，导致对同一件事物的认知视角、客体的不同，进而出现认知结论上的差异。例如，“盲人摸象”那个故事中，为什么6个盲人对大象形体认知的结果分别是柱子、绳子、大萝卜、蒲扇、墙或管子的模样而与常人认知不同呢？因为盲人没有视觉，他们只能经由手触摸大象身体对大象感知。不同的盲人触摸到的大象身体部位不同，感知结果不同，造成他们每个人对大象认知结果的不同，即认知结果不同步。

那么，常人与盲人认知万物的差异在哪里呢？欧阳博士告诉惠子，差异在于盲人缺少正常人“六根”中“眼”的感知，即视觉认知能力，以其“五根”或者更少的感知能力在认知万物，这在常人看来，是造成盲人认知万物局限的根本原因。故事中，那几个盲人是在缺少视觉状态下对大象外形的认知，是一种局部认知。类似地，地球上的生物对万物的认知也是局部认知。例如，在人类看来，蚂蚁生活在2-维空间即平面上，它们没有立体感知能力，在食蚁兽面前只能是任其宰割。它们可能永远

也认不清人的面目。这样一来，一个自然的问题是对人认知能力的反思，即"人的六根对万物的认知是事物的真实面目吗？"答案如果是肯定的，人在地震、海啸等极端自然灾害面前就不应该"束手无策"而应该能控制这些自然灾害发生，成为宇宙的"统治者"。然而，人类数十亿年的进化史表明，在人与自然这个2-元系统中，人处在"认知自然"和"适应自然"这样一个低微层次，对距地球稍远的自然规律尚且认知不清，又和谈成为宇宙的统治者呢！故此，人类对万物的认知仍只能视为一种局部认知，是人"六根"对万物的界定，与其他动物，如蚂蚁界定一件物体为平面事物类似，不一定是万物的本来面目，而是回归到老子在《道德经》中"道可道，非常道；名可名，非常名"的论断。



图7.3 海啸

听到这里，惠子心中产生一个疑问："如果人对万物的认知是局部认知，人类造出的各种服务于人类生活的器具，如汽车、火车、飞机和轮船等为什么又在真实地服务于人类呢？"欧阳博士解释说，这当中有一个基本问题，即"局部认知是否为不正确的认知？"当然不是！局部认知是指在一定限制条件下成立的结论。当然，超出了人类设置的限制条件，局部认知则有可能不再正确。故此，对于那些在人力所能及或是人类可控范围内得到的认知，虽然仍是一种局部认知，但只要是在认知条件下应用就不会对人类社会造成危害，但这一点常为使用者所忽视。例如，采用树枝或干草C生火消耗氧气O_2，产生二氧化碳CO_2，化学规律为$C+O_2=CO_2$，即一个碳分子与一个氧分子结合生成一个二氧化碳分子是一种局部认知，它的假设条件是什么？是在碳分子和氧分子相互匹配构成的一个封闭系统中，在燃烧条件下遵从这一化学反应规律。然而，宇宙万物是相互联系、相互制约的。人类进化史表明，人重来不是在一个封闭系统中应用这一化学反应而是把燃烧产生的二氧化碳想当然地排入自然，以为自然可以无限制地消纳人类排放的二氧化碳，这在一定程度上打破了自然中的二氧化碳平衡或守恒态。与此相应，自然重回二氧化碳守恒态需要对这种不平衡进行自发调整，这就是极端自然灾害频发，生命或人类生存受影响的原因，是局部认知不遵从限制性条件应用而表现出的一个典型例子。

1.2.自组织系. 人类对万物的认知是以人的认知刻画万物变化，即人的认知与万物变化同步。理论上，对那些无主观意识的非生物体，只要是在人力所能及的范围内，人能依其变化进行客观刻画即可实现这种同步。那么，人类对于生命体或者更进一步，对于有主观意识的生命体，人类的认知是否是其本来面目呢？欧阳博士

告诉惠子，人类能把握生命体变化的前提是人类认知与其变化同步，这在理论上几乎不可能实现，因为生命体，特别是那些有主观意识的生命体几乎不会按人的主观意识发展变化，因为它们的主观意识独立于人类。这在一定程度上，解释了为什么人类的一些科学成就应用于生物领域在一定程度上失灵，因为生物体有生命，带有一定的主观意识，与人类的认知不一定同步。一般地，这种带有自发调节能力的系统称为自组织系，即不需系统外部的干预，系统内部能自发地调节系统基元和相互作用，实现从一种系统态到另一种系统态的转化。这在物种进化、人类思维进化和社会组织发展等系统中，不难发现这种自组织过程的痕迹。

（1）基元能动性. 自组织系统具有一种独立于人意识之外的自我调节或修复能力，实质上是一种主观意识能力。无论是单独还是群体动物，人们都很难采用确定性认知把握其变化。例如，针对哥本哈根学派提出量子态"坍缩"假设，薛定谔提出的那只让人揪心的小猫生死问题， 即表明人类对生命体认知上想与事物真实逻辑一致或同步的不可能性，人们甚至给不出一个逻辑一致的回答。



图7.4 薛定谔的猫

[**薛定谔的猫**] 将一只可爱的小猫放入一个底部安置了毒气开关的不透明黑箱子里，然后合上盖子，如图7.4。当然，猫是活的，可以在箱子里自由走动，如果它不小心踩动了毒气开关，毒气会很快充满整个盒子，猫最后会被毒死。但如果猫没有踩到毒气开关， 猫则是活着的。然而，在人打开箱盖子前，无从知晓猫的生死状况。薛定谔问:"那只可爱的小猫到底是死了还是仍然活着？"

这是一个怪异的问题，即无论回答猫是"活"还是"死"都不完全，都面临着可能正确也可能不正确的结局，而且一旦打开盒子，猫是生还是死唯一确定。为什么存在这样摸棱两可的答案？因为在闭上到打开盒子盖之间，猫的信息丢失了，无法建立"逻辑一致"的因果关系，除猜测外无法判断猫是"活"还是"死"。这时，最好的办法是在盒子内假设一部摄像机，随时观测猫在盒子内的状况，建立因果关系进而回答那只猫的生死问题，即要在打开盒子之后才能确定猫是死是活。然而，客观上，猫的生死怎会依赖于人的观察呢？猫的生死就是确定的，只不过是人在认知中丢失了一段猫的信息，建立不了猫从"生"到"生或死"之间的因果关系。

那么，"怎样用数学刻画薛定谔的猫这种生死状态呢？"欧阳博士说，用$\mathbf{L}$、$\mathbf{D}$分别表示猫的生态和死态，则薛定谔猫的态可以表示为$\mathbf{L}+\mathbf{D}$，即可能是活态$\mathbf{L}+\mathbf{D}\to\mathbf{L}$，也可能是死态$\mathbf{L}+\mathbf{D}\to\mathbf{D}$。这当中的问题，在于人怎样认知薛定谔的猫是生还

是死呢？人对薛定谔猫生死的认知需要打开盒盖，看一看猫是生还是死。然而，猫的态本为$\mathbf{L}+\mathbf{D}$，在人打开盒盖一瞬间，为什么会由$\mathbf{L}+\mathbf{D}$变为$\mathbf{L}$或$\mathbf{D}$？为了给出逻辑一致的解释，在十九世纪三十年代，由玻尔等领导的哥本哈根学派提出猫的态坍缩假说，即$\mathbf{L}+\mathbf{D}\rightarrow\mathbf{L}$或$\mathbf{L}+\mathbf{D}\rightarrow\mathbf{D}$依赖人的观测。不观测时猫态为$\mathbf{L}+\mathbf{D}$，观测的一瞬间猫态变为$\mathbf{L}$或$\mathbf{D}$。这在形式上看似逻辑一致，解释清楚猫的生与死了，但却遗留下一个人类认知万物中的隐患，即"薛定谔猫的生死有赖于观测，是人的观测决定了猫的生死"，这不符合人对客观事物的认知规律。

这样，为给出薛定谔猫逻辑一致的解释，需要重新审视盒子中的猫态$\mathbf{L}+\mathbf{D}$是什么。一般地，它可以解释成两个向量之和，即猫的生态与死态的叠加态。在这一点上，波尔等领导的根本哈根学派是以人对猫的观测确定生死，认为薛定谔猫的生死由人的观测决定。那么，人是否可以完整地观测猫态$\mathbf{L}+\mathbf{D}$即生$\mathbf{L}$与死$\mathbf{D}$变化的悲壮场景呢？如果人对万物的认知带有一定的局限性，就不可能同时观测到薛定谔猫的生态$\mathbf{L}$与死态$\mathbf{D}$而只能是在打开盒子的一瞬间看到猫是生或是死，即猫的生态或者死态二者只能人类只能观测到其一，问题不是出在观测瞬间的"态坍缩"而是出在人的观测或认知局限。沿着这种思想，物理学家惠勒门下的一位博士生艾弗瑞特，于1956年向博士学位委员会提交的博士论文"波动力学的非概率阐释"中，对薛定谔猫的生死态提出了一种"多世界"解释，认为薛定谔猫的"生"与"死"分别存在于生$\mathbf{S}_1$与死$\mathbf{S}_2$两个不同空间，如图7.5所示，但在特定的时间，人只能进入其中的一个空间S_1或S_2观测猫的生死，即猫态空间为S_1和S_2的并$S_1\bigcup S_2$且$S_1\bigcap S_2=\emptyset$，是一个平行空间。



图7.5 猫态重叠空间

学术研究需不断地否定自我，创新认知理念、方法与手段，促进人与自然协调发展。艾弗瑞特这种对薛定谔猫生死的多世界解释，无疑是对人类既有认知理念的一次突破，但同时也是在挑战当时的学术主流，即哥本哈根学派倡导的"态坍缩"解释，被视为一种"怪异"思想而不予接受，他也因此未能在1956年通过博士论文答辩。依靠惠勒在学术界的影响力和指导，艾弗瑞特对博士论文进行局部调整与修改后，于第二年通过了论文答辩并获得博士学位。对此，艾弗瑞特感觉极度的失望与压抑，再不愿谈及物理，为求生只好到美国防部一个部门任职，于1982年在闷闷不乐中去世。他的多世界解释直到二十世纪七十年代，另一位物理学家德威特和他的学生公开发表文章拥护艾弗瑞特对薛定谔猫生死态的多世界解释，学术界才逐渐接受了多世界解释是一种逻辑一致的理论，并普遍应用于量子力学中对量子态的解

释。2007 年，美国一本知名期刊，即《科学美国人》出了一期专刊，以纪念艾弗瑞特对薛定谔猫的多世界解释诞生五十周年，以及其在突破人类认知上的贡献。

（2）系统能动性. 在对一件事物的系统认知中，系统由基元组合构成。于是，确定系统中哪一类组份或是子集为基元就是一件重要的事情。系统基元的选取以刻画系统行为且数量最少为准，不宜无限制的细分下去。例如，欧阳博士解释说，在薛定谔的猫中，是以那只猫作为一个整体作为系统基元。猫作为一种动物，其子系统有皮肤、骨骼、肌肉、消化、呼吸、循环、排泄、神经、内分泌系和生殖等10个系统，由大约10^{27}个原子构成，有大约2.5亿个神经细胞，约40亿个脑细胞，数10亿个体细胞等。那么，是否可以用猫的10个系统或约10^{27}个原子、数十亿个细胞组合刻画一只猫呢？答案是肯定的！但这样做的结果，除了增加问题的复杂性外，对回答薛定谔问题的本身并没有帮助，因为系统或细胞的生与死并不代表猫的生与死。这样，在刻画薛定谔猫的生死问题中，仅需把那只猫作为基元而无需继续细分。类似地，刻画一群动物的行为，可以把每个动物作为系统基元；刻画微生物或病毒对人体的影响或伤害，则需要以人体系统或细胞为基元构建自组织系统S。

这时，系统标号图$G^L[S]$与一般的系统标号图类似，由基元v构成$G^L[S]$顶点；顶点v和u间如果存在作用，则定义(v,u)或(u,v)为$G^L[S]$中的一条边。对应的，定义顶点标号为基元v的态，边标号为其连接的两个基元间的作用强度。那么，怎样采用系统标号图$G^L[S]$对这种自组织系统态进行刻画呢？欧阳博士解释说，薛定谔的猫中，只有一只猫，对应的系统标号图是单点图K_1，其上的态标号为生态S_1 和死态S_2的并，即平行空间$S_1\bigcup S_2$。

一般地，无论是微观系统S，如脑细胞构成的大脑还是宏观系统S，如同类动物构成的群，假设S由m个基元构成，每个基元有n个态$s_1,s_2,\cdots,s_n$。这时，一个简单问题是系统S一共表现出多少种态$n(S)$呢？一般地，系统S的态与每个基元的态有关，即基元的态不同对应系统不同的态。这样，利用乘法法则，$n(S)=\prod\limits_{i=1}^{m}n=n^m$，即$n^m$个态。例如，对薛定谔的猫只有生与死两个态即$n(S)=2$。对于$m$只猫构成的一个猫的家族，类似于薛定谔，问这个家族出现的态即情形，则有



图7.6 薛定谔猫群

$$\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}=2^m$$

种。这里，组合数中的整数$0,1,\cdots,k,\cdots,m$表示这个家族中猫的存活数量。

1.3.矛盾系统. 对薛定谔猫生死的多世界解释为解决人类认知中的"矛盾"，解释韩非子那则"矛盾"寓言中到底是矛比盾锋利还是盾比矛坚固，即商人手中的矛与盾表现出的态了。实际上，在商人用右手中的矛刺向左手中的盾之前，"矛比盾锋利"和"盾比矛坚固"作为人眼可观测的"态"都存在，与薛定谔猫的生死，即图7.5类似，是两个平行空间S_1和S_2但人眼只能看到一种，即"矛比盾锋利"或"盾比矛坚固"的结果。这样的现象在人类生活中还有许多。例如，"龟兔赛跑"中，到底是"兔子获胜"还是"乌龟获胜"，虽然乌龟行进速度比兔子慢，但如果兔子偷懒或是腿上出了其他状况，乌龟也不是没有获胜的可能。这也正是"龟兔赛跑"的哲学寓意，即看问题要全面，依据局部结论认知未知事物不一定正确。类似地，盲人摸象那则寓言故事中，盲人对大象形状的认知在常人看都不正确，可为什么盲人在那里坚持己见地争论不休呢？欧阳博士解释说，因为他们中间没有人承认自己对大象的感知是局部认知，每个人都认为自己对大象的认知是正确的。类似地，人类在对那些力所不能及的事物认知时又何尝不是如此呢！解决人对事物认知中争论的理想状态与盲人摸象中的那位"觉者"类似，即出现一位比常人的"六根"感知多，有"七根"以上的感知器官或组织，告诉人类他对万物的认知结果。然而，即便出现这样一位拥有"七根"或"八根"以上的觉者，他对万物的认知就一定是事物的本来面目吗？在逻辑上，除非这位智者是与宇宙同在、无所不能的"万物之神"，他对万物的认知仍是一种局部认知！这也正是老子《道德经》开篇中"名可名，非常名"的本意。

那么，怎样解决人类局部认知产生的矛盾，又怎样在对万物认知中坚守逻辑一致原则呢？答案是构建一种包容矛盾的认知体系，因为在艾弗瑞特为薛定谔的猫给出的多世界解释$\mathbf{L}+\mathbf{D}$中生$\mathbf{L}$与死$\mathbf{D}$是一对矛盾，它们同处于一个猫态$\mathbf{L}+\mathbf{D}$之中。

在人类的认知体系中，公理是依据人类长期理性的实践事实，无需再证明而接受的基本命题；命题是人类依据公理遵从逻辑一致原则推出的认知结论，这类命题一般是无矛盾即相容的。这样，构建一个包容矛盾的逻辑体系需要在认知公理上包容矛盾，进而认知事物的本来面目。

Smarandache矛盾系统. 一个系统S中的公理A称为是Smarandache否定的，如果公理A在S中可以同时成立与不成立，或者是出现以两种以上的情形不成立。对应地，一个包含Smarandache否定公理的系统S称为Smarandache矛盾系统。

那么，这种包容矛盾存在的Smarandache矛盾系统是否一般性地存在呢？答案是肯定的！例如，包含Smarandache否定公理的Smarandache几何。我们知道，欧几里德几何是五条公理推演的结果，即：①由任意一点到另一点可作直线；②一条有限直线可以继续延长；③以任意点为中心及任意的距离可以画圆；④凡直角都相等；⑤从直线外一点只能作一条平行直线。现在，取$\mathbb{R}^2$为一个欧几里德平面，A,B,C为$\mathbb{R}^2$上

三个不共线的点。定义s-点$\mathcal{P}_s$为平面$\mathbb{R}^2$上的所有点，s-直线$\mathcal{L}_s$为欧几里德几何中那些经过且仅经过A, B, C中一个点的直线，则这样的点线集合$\{\mathcal{P}_s; \mathcal{L}_s\}$构成平面$\mathbb{R}^2$上的一个Smarandache几何。

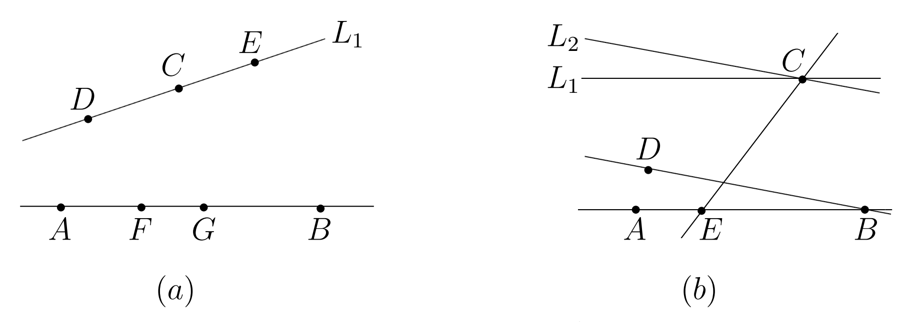


图7.7. Smarandache几何示例

首先，欧几里德几何中的第1公理在$\{\mathcal{P}_s; \mathcal{L}_s\}$ 中变成一条s-直线或无s-直线，因为过两个与A, B, C中点不共线的点D, E存在一条s-直线经过D, E；但经过AB上的两个s-点F, G或是这两个点不与A, B, C 中的点共线，则$\{\mathcal{P}_s; \mathcal{L}_s\}$中没有经过$F, G$的$s$-直线，如图7.7(a)所示；其次，欧几里德第5公理在$\{\mathcal{P}_s; \mathcal{L}_s\}$中成为一条平行直线或无平行直线，因为取$L_1, L_2$为经过点$C$的两条$s$-直线，其中$L_1$平行但直线$L_2$不平行于$AB$。这时，经过任一个不在$AB$上的$s$-点$D$不存在平行于$L_1$的$s$-直线。但如果线段$DB$，$DA$或$DC$碰巧平行于$L_2$，则过点$D$存在一条$s$-直线平行于$L_2$。否则，过$s$-直线$L_2$外的一点$D$不存在平行于$L_2$的$s$-直线，如图7.7（b）所示。

注意，在薛定谔猫生死态多世界解释$\mathbf{L}+\mathbf{D}$中定义命题A:"猫是活的"，B:"猫是死的"，则命题A或B都有Smarandace否定公理性质，即$\mathbf{L}+\mathbf{D}$是一个Smarandache矛盾系统。按照经典科学中的逻辑一致，可以按命题A和命题B对猫态$\mathbf{L}+\mathbf{D}$进行空间分解，得到猫的生态$\mathbf{L}$和死态$\mathbf{D}$且有$\mathbf{L}\bigcap\mathbf{D}=\emptyset$，即$\mathbf{L}$与$\mathbf{D}$平行。这样的"+"是一种特殊的向量空间加法，称为直和，记$\mathbf{L}+\mathbf{D}$为$\mathbf{L}\bigoplus\mathbf{D}$。对这种猫态$\mathbf{L}+\mathbf{D}$的进一步推广即为Smarandache重叠空间，定义为

Smarandache重叠系统. 对整数$n\geq 1$，设$(\mathcal{S}_1, \mathcal{R}_1), (\mathcal{S}_2, \mathcal{R}_2), \cdots, (\mathcal{S}_n, \mathcal{R}_n)$为$n$个两两不同的经典数学系统，即对任意整数$1\leq i\leq n$ $\mathcal{R}_i\subset\mathcal{S}_i\times\mathcal{S}_i$，有$\mathcal{S}_i\neq\mathcal{S}_j$或$\mathcal{S}_i=\mathcal{S}_j$但$\mathcal{R}_i\neq\mathcal{R}_j$，$1\leq i, j\leq n$，一个Smarandache重叠系统定义为

$$(\mathscr{S}; \mathscr{R})=\bigcup_{i=1}^{n}(\mathcal{S}_i, \mathcal{R}_i) \tag{7.1}$$

这里，$\mathscr{S}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathcal{S}_i$，$\mathscr{R}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathcal{R}_i$。

薛定谔猫态$\mathbf{L}+\mathbf{D}$中有$\mathbf{L}\bigcap\mathbf{D}=\emptyset$，但一般地，对Smarandache重叠系统则不要求$(\mathcal{S}_1, \mathcal{R}_1)\bigcap(\mathcal{S}_2, \mathcal{R}_2)=\emptyset$，即它们之间允许有重叠，交集不一定是空集。欧阳博士

告诉惠子，任何一个Smarandache矛盾系统都是Smarandache重叠系统。实际上，假设系统S是一个Smarandache矛盾系统，由定义可以分为以下两种情形：

情形1. 系统S中存在一个Smarandache否定公理A同时成立与不成立。

这时，定义$\Sigma_1 = \{x \in S$使公理A成立$\}$，$\Sigma_2 = \{y \in S$使公理A不成立$\}$。则有$S = \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$, 即$S$是一个Smarandache重叠系统。

情形2. 系统S中存在一个Smarandache否定公理A不成立，其不成立情形为W_1, $W_2, \cdots, W_s, s \geq 2$。

这时，对任意整数$1 \leq i \leq s$，定义$\Sigma_i = \{x \in S$使公理A以W_i的情形不成立$\}$，且$\Sigma_0 = S \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} \Sigma_i$。这里，集合$\Sigma_0$可能是一个空集，则有

$$S = \left(\bigcup_{i=1}^{s} \Sigma_i\right) \bigcup \Sigma_0,$$

即S是一个Smarandache重叠系统。

这样，一个Smarandache矛盾系统S等价于一个Smarandache重叠系统$(\mathscr{S};\mathscr{R})$，可以取$(\mathcal{S}_i, \mathcal{R}_i), 1 \leq i \leq n$为系统基元，则系统标号图$G^L[S]$的顶点集和边集为

$$V\left(G^L[S]\right) = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots, \mathcal{S}_n\},$$
$$E\left(G^L[S]\right) = \{(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j) \,|\mathcal{S}_i \bigcap \mathcal{S}_j \neq \emptyset,\ 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

且对任意整数$1 \leq i \neq j \leq n$，顶点和边标号为

$$L: \ \mathcal{S}_i \to L(\mathcal{S}_i) = \mathcal{S}_i \text{ 且 } L: \ (\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j) \to L(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j) = \mathcal{S}_i \bigcap \mathcal{S}_j。$$

例如，假设集合$\mathcal{S}_1 = \{a, b, c\}$，$\mathcal{S}_2 = \{a, b, e\}$，$\mathcal{S}_3 = \{b, c, e\}$，$\mathcal{S}_4 = \{a, c, e\}$，即$n = 4$且$\mathcal{R}_i = \emptyset, 1 \leq i \leq 4$时，

$$S = \bigcup_{i=1}^{4} \mathcal{S}_i = \{a, b, c, d, e\}$$

为一个Smarandache重叠系统，对应的系统标号图$G^L[S]$为图7.8中的完全标号图。

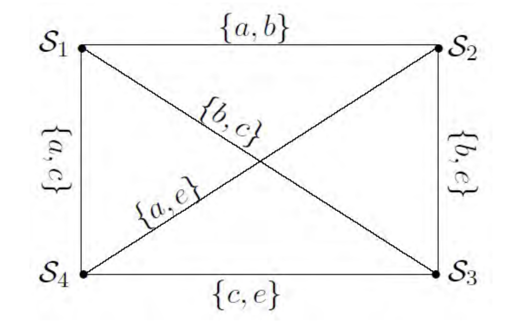


图7.8 Smarandache **系统标号图**

欧阳博士告诉惠子，既然一个Smarandache矛盾系统等价于一个Smarandache重叠系统，这样一来，在遵从逻辑一致的原则下认知万物，人们就需要刻画一件事物对应的Smarandache重叠系统S或其对应的标号图$G^L[S]$的状态，按盲人摸象故事中那位觉着为盲人的指引认知一件事物，而这种认知恰是一种组合认知。

第2节 量子纠缠

人类认知一件事物本来面目的实质，在于刻画该事物对应的Smarandache重叠系统，系统基元可能遵从，也可能不遵从同步规则。一般地，设$S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(\mathcal{S}_i,\mathcal{R}_i)$为一个Smarandache重叠系统，对应的系统标号图为$G^L[S]$。这时，映射$\iota_v: G^L[S]\to v\in V\left(G^L[S]\right)$，即$\iota_i: S\to(\mathcal{S}_i,\mathcal{R}_i)\,,1\le i\le n$称为坍缩映射，对应的物理含义是一件事物的本来面目$G^L[S]$到人的局部认知$v_i$，即子系统$(\mathcal{S}_i,\mathcal{R}_i)$的映射，是人的认知过程刻画。这当中，对任意整数$1\le i\le n$，子系统$(\mathcal{S}_i,\mathcal{R}_i)$不是孤立的，与其他系统$(\mathcal{S}_j,\mathcal{R}_j)$，即$\mathcal{S}_i\bigcap\mathcal{S}_j\neq\emptyset$的系统$\mathcal{S}_j,1\le j\neq i\le n$间存在基元重叠。相应地，标号图$G^L[S]$中与与一个顶点$v_i$邻接的那些顶点在系统$S$中重叠。

在数学上，坍缩映射可以看作是由一件事物的整体$G^L[S]$到局部$v_i\in V\left(G^L[S]\right)$的投影，如图7.9所示正方体的正投影。现在，一个自然的问题是这样的坍缩映射是否客观存在呢？答案是肯定的！例如，薛定谔猫的生死态$\mathbf{L}\bigoplus\mathbf{D}$是一个Smarandache重叠系统$P_2^L$。这时，存在两个人的局部认知态，即猫的生态$\iota_L:\mathbf{L}\bigoplus\mathbf{D}\to\mathbf{L}$和死态$\iota_D:\mathbf{L}\bigoplus\mathbf{D}\to\mathbf{D}$。在人打开盒盖时，发现猫处在生态$\mathbf{L}$，即"猫是活的"，则"猫是死的"不成立，推知$\mathbf{D}=\emptyset$，且反之亦然。故此，薛定谔猫的生死态$\mathbf{L}\bigoplus\mathbf{D}$是一个$n=2$的重叠系统。同时，猫的生或死在人类看来具有排他性，即一只猫是活的或者是死的，二者必居其一但不能同时出现。

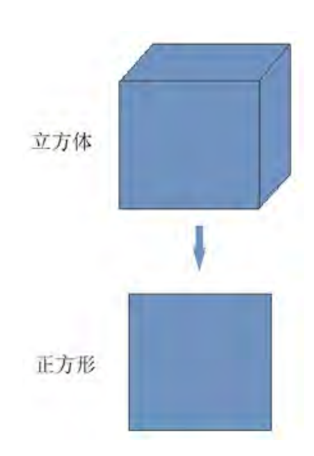


图7.9 立方体正投影

人类对一件事物T由的局部认知到整体认知是个渐进过程，即第二章第五节中的表示式

$$T=\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\mu_i\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{k\ge1}\{\nu_k\}\right),$$

这实际上是一个Smarandache重叠系统，其中的$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$为事物T在时刻t的已知特征，$\nu_k,k\ge1$为未知特征。那么，"怎样刻画(7.2)式中Smarandache重叠系统的坍缩映射呢？"问题的关键在于怎样理解式子中的$\{\mu_i\},1\le i\le n$和$\{\nu_k\},k\ge1$。欧阳博士告诉惠子，如果将T等价于一个由元构成的Smarandache重叠系统$\widetilde{T}$，即$\widetilde{T}=\{a_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$。这里，$\Lambda$为$T$中元对应的指标集合。假设$T$中任一个元$a_\lambda$的特征为$\chi(a_\lambda)$，则特征$\mu_i$或$\nu_k$实质上是在对$T$中的元按特征$\mu_i$或$\nu_k$ 进行分类

$$\{\mu_i\}=\{a_\lambda\in T|\chi(a_\lambda)=\mu_i\}\,,\quad\{\nu_k\}=\{a_\lambda\in T|\chi(a_\lambda)=\nu_k\}\,,\tag{7.2}$$

即对任一整数$1 \leq i \leq n$或$k \geq 1$，$\{\mu_i\}$和$\{\nu_k\}$分别为T中那些特征μ_i或ν_k的元组成的一个子集。这样，事物T上的坍缩映射即为人类认知T的特征

$$\mu_i : T \to \{\mu_i\} \quad 和 \quad \nu_k : T \to \{\nu_k\}, \tag{7.3}$$

类似于对薛定谔猫生或死的观测，对任一整数$1 \leq i \leq n$或$k \geq 1$，这里的特征μ_i或ν_k是人对事物T观测的结果。但与对薛定谔猫的观测不同，这里的特征$\{\mu_i\}, 1 \leq i \leq n$和$\{\nu_k\}, k \geq 1$在$n \geq 2$时不再具有排他性质。

惠子听到这里有点疑惑，问欧阳博士："爸爸，'特征'一词感觉有点抽象，您能不能举一个通俗的例子解释一下坍缩映射呢？"欧阳博士问她："一个筐中装满了苹果和梨，你怎样确定筐中有多少个苹果、多少个梨？"惠子回答说："这个简单，可以从筐中把苹果或梨一个个地跳出来，再数一遍就知道筐中有多少个苹果、多少个梨了。"欧阳博士又问她："你为什么要把苹果或梨一个个地从筐中挑出来呢？"惠子回答说："苹果和梨是不一样的水果。"欧阳博士问她："为什么苹果和梨是不一样的水果呢？"惠子回答说："因为它们的口感、味道、含糖、水和酸等不同！"欧阳博士点了点头告诉她，这里，苹果或梨是区别筐中水果的特征。相应地，把苹果或梨从筐中一个个地挑出来的过程，恰是由筐中水果到苹果或梨的一个坍缩映射。

2.1.量子纠缠. 经典力学采用质点的位置和动量描写质点的状态。例如，设A、B是真空中质量分别为m_1和m_2 两个弹性小球，以速度v_1和v_2 在原点O正撞后沿着一条直线逆向而行，如图7.10所示。这时，假设碰撞后小球A、B的速度分别为v_1'和v_2'，则根据经典力学中的动量守恒定律

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

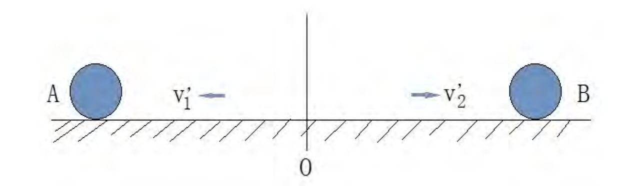


图7.10 小球碰撞

知小球B的运动速度

$$v_2' = \frac{m_1(v_1 - v_1') + m_2v_2}{m_2},$$

即仅需对A、B中的一个小球测量碰撞后的速度即可知另一个小球的速度。类似地，生活中也有这样的体验。例如，某人有一双袜子，一只红色一只白色。在一个漆黑的夜晚，他穿上袜子后走到路灯下看了看左脚，发现左脚上的是红色袜子。那么，他不用再看右脚即推断出右脚上穿着白色袜子，因为红色、白色袜子各只有一只，非此即彼。这两个例子类似于微观世界中的量子纠缠现象但都不是量子纠缠，因为它们都不具有随机性，是在逻辑上可以直接得出的结论。

微观粒子最诡异的性质莫过于它的不确定性，欧阳博士解释说，对微观粒子，

人无法准确地同时测量出它的位置和动量，即遵从测不准原理，运动带有一定的随机性。这时，与宏观世界情形不同，人们无法采用因果关系预测粒子的状态，因为双缝实验表明在人与微观粒子构成的2-元系统中，人的测量行为会干扰微观粒子状态，无法获得独立于人测量行为的粒子状态。这样，刻画宏观质点的方式不适用微观粒子。为此，物理学家波恩引入了波函数刻画微观粒子状态，认为微观粒子是空间和时间的一个复函数$\Psi(x,y,z,t)$，称为"波函数"，将$|\Psi(x,y,z,t)|^2$解释为粒子在时刻t出现在点(x,y,z)附近单位体积内的概率，且遵从波的叠加原理，即如果$\Psi_1(x,y,z,t)$，$\Psi_2(x,y,z,t)$是两个系统可能状态的波函数，则

$$\Psi(x,y,z,t)=c_1\Psi_1(x,y,z,t)+c_2\Psi_2(x,y,z,t) \tag{7.4}$$

是系统的波函数，且满足薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)+U\Psi。$$

这里，m是粒子的质量，c_1,c_2是两个常数，$\hbar=6.582\times10^{-22}MeVs$为普朗克常数，$U$粒子场的势能。以薛定谔猫的态为例，$\Psi_1(x,y,z,t)$和$\Psi_2(x,y,z,t)$分别表示猫的生态和死态，则对应的坍缩映射为$\Psi(x,y,z,t)\to\Psi_1(x,y,z,t)$和$\Psi(x,y,z,t)\to\Psi_2(x,y,z,t)$，即波函数坍缩。

那么，什么是量子纠缠呢？量子纠缠是微观粒子的一种现象，指两个纠缠在一起的粒子分离后，对其中一个粒子进行测量，另一个粒子也会即刻发生相应的状态变化。1935年爱因斯坦和另外两位物理学家在《物理评论》上发表了一篇后人称之为EPR论文，讨论两个微观粒子的弹子球游戏，认为一个物理理论对物理实在的描述如果是完备的，那么物理实在的每个要素都必须在该理论中有对应的量，即完备性判据。当人们不对体系进行任何干扰却能确定地预言某个物理量的值时，必定存在着一个物理实在的要素对应于着这个物理量，即实在性判据。这里的实在性判据包含着"定域性假设"，即如果测量时两个体系不发生相互作用，那么对第一个体系所能做的无论什么事都不会使第二个体系发生任何实在的变化，但量子力学不满足这些判据，是不完备的。例如，无论在何时对两个分离后的纠缠粒子A和B之一进行测量，只要测量A的自旋方向是向上，则B 的自旋方向一定向下；反之，如果测量A的自旋方向向下，

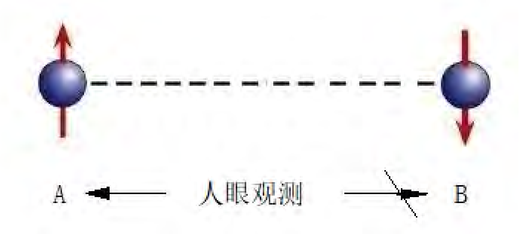


图7.11 纠缠粒子

则B的自旋方向一定向上，如图7.10 所示。类似的粒子性质还有位置、动量等。换言之，对粒子B的这些性质测量结果与A相反，可以仅测量其中一个粒子，如粒子A 就

知道粒子B的性质，类似于经典力学两个弹性小球碰撞后仅需测量一个小球就可知另一个小球状态的情形，然而这里的微观粒子与经典力学中小球的确定性不同，微观粒子带有随机性。

经典力学中，人们对碰撞后的小球A测量时，不会影响A的运动状态，但在微观世界中，测量粒子A会影响A的运动状态。在这种情形下，仿佛是存在一种信息传递，把人对粒子A的测量“瞬时”告知了粒子B。但它是怎么告知的，又是如何告知的，人们又苦于找不到信息传递介质。不得已，只能将这种粒子纠缠现象归为一种违反经典力学规律的“超距作用”，爱因斯坦甚至将量子纠缠称为“如幽灵一般可怕的远距效应”，因为它与粒子干涉试验类似，无法采用经典力学的规律解释，这也从一个侧面再次说明人类认知的局限性。

那么，对量子纠缠现象应怎样进行解释呢？爱因斯坦的追随者，物理学家玻姆于1957年提出了一种隐变量解释得到了爱因斯坦的赞赏，即在量子世界中，粒子仍是沿着一条精确的连续轨迹在运动，但这条轨迹不单是由人在宏观世界中发现的力决定，还受到量子势的影响。这种量子势由粒子的波函数产生，随时向粒子提供所在环境的能动信息，引导着粒子运动走向，造成粒子不同于宏观物体的神奇表现。在玻姆对量子纠缠现象的隐变量解释中，量子系统的性质不单是属于系统本身，粒子的演化一方面取决于系统，另一方面取决于测量仪器，对隐变量测量结果的统计分布会随测量装置的不同而不同。这样一来，保证了玻姆的隐变量解释与量子力学对测量结果的预测完全相同。然而，尽管波姆为量子纠缠给出了一种与量子力学一致的解释，但因为引入了粒子的隐变量，粒子确定的位置和速度在原则可能永远不为人测知，人类也可能永远无法知道粒子真实的运动轨迹。这也是波姆的隐变量解释让一些人不接受的原因。

在数学上，很容易刻画量子纠缠的隐变量解释。假设S和S'是两个集合，如果已知映射$f: S\to S'$和$f': S'\to S$是到上的，即$f(S)\supseteq S'$，$f'(S')\supseteq S$，则称S和S'为一个纠缠对。这时，人们只要知道S和S'中的一个集合，则另一个集合可以由映射f或f'作用得知。例如，f或f'是一个$1-1$ 对应映射或者$f:\{S,S'\}\to\{0,+1\}$是一个2-值函数且满足排他性，即对任意的$x\in S, y\in S'$满足$f(x)\neq f(y)$，则S和S'一定是一个纠缠对。更进一步，还可以在集合S和S'上赋予代数结构，如群、环或域，则由它们的代数性质很容易由一个集合得到另一个集合。例如，假设S和S'为两个同构的有限域，则可得到一个纠缠对S和S'。类似地，薛定谔猫的生**L**和**D**，以及量子纠缠中的A和B是在满足排他性时的2-值函数情形，构成的也是纠缠对。那么，一个纠缠对S和S'是否一定可以为人的肉眼观测到呢？答案是不一定！欧阳博士告诉惠子，并非任何一种自然现象人的“六根”都能认知，因为人对万

物认知有一定的局限性。但由此诱发的问题是，人类对万物认知中，“是否仅因隐变量不能眼见为实而不认可波姆的隐变量解释呢？”当然不能！欧阳博士解释说：“隐变量解释是对量子纠缠的一种科学解释！”

2.2.超距作用. 玻姆对量子纠缠的隐变量解释旨在微观世界重回决定论或因果论，即微观粒子仍沿着精确连续轨迹运动，只是人类因隐变量的原因无法对粒子进行精确测量。那么，为什么波姆对量子纠缠的隐变量解释不为一些人认同呢？是因为隐变量之所以为“隐”，对人测量来说就是找不到这样的物理实在，仍没有解释清楚“超距作用”即信息的瞬时传递问题，这通过审视相比人类生活世界少一个维度的蚂蚁在平面世界的生活可以解释。在人类看来，蚂蚁生活的世界只有长、宽而没有高度的概念。对于平面I上的两个点A和B，在A点的蚂蚁要传递给在B点的蚂蚁一个信息，只能是经由平面S上的一系列点(x, y) 组成的线段AB进行传递，如图7.12所示。但在人类看来，还有一条更近的信息传递通道，即沿着垂直方向z传递。这样，A、B两点在平面I上虽然处于不同位置，但它们在z 方向上的距离为0，就一定可以沿z方向实现瞬时信息传递，即瞬时传递，但这相对于蚂蚁，即便是在人理解上则是一件类似幽灵作用的不可思议事件。

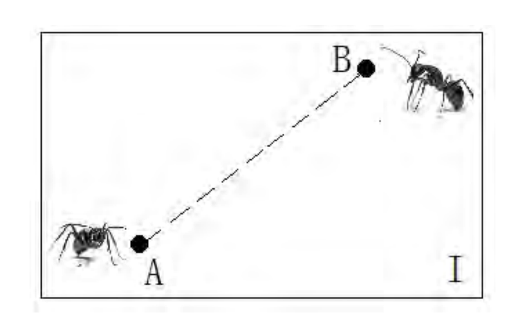


图7.12 蚂蚁体验幽灵作用

这当中的核心问题在于，信息传递需要的空间维度是多少，一定需要三个维度即空间介质传递吗？欧阳博士告诉惠子，人们在理解信息传递时一般是类比所见力的传递过程，这是人类最便于感知的情形。正是基于这样一种感知过程，人们在理解信息传递时，认为一定存在人的可见介质进行信息传递，把介质存在的3-维空间错误地理解为信息传递空间。那么，人类进行的各种可见传递是否一定是3-维空间呢？答案是不一定！例如，能量、热量和光等事项传递的确需要“可见介质”传递，但引力、磁力的传递是经由介质传递的吗？牛顿力学中把引力视为一种超距作用，爱因斯坦将引力解释为空间弯曲作用，断言人类生活的空间不是平直空间而是弯曲空间，是空间的弯曲效应形成了引力并据此提出了引力场方程，他实际上是在解释牛顿力学中的“超距作用”；麦克斯韦将磁力现象解释为空间特性即场作用，同样没有发现传递介质而是后人假设存在一种磁介质在传递磁力。这里，无论是引力还是磁力传递，都没有发现人类可见传递介质。故此，把引力、磁力的传递空间视为3-维空间并没有证据。同样，人们假设语音、信号传递是在借助线缆、光缆中的传递介质，但对无线信号的传递机制并不清楚，只是依据麦克斯韦的电磁场

理论能够实现，对信息传递介质所需的空间维度是多少并不清楚。特别是，在人类的认知中把信息理解为数据或编码，信息传递为1-空间即可而无需3-维空间。那么，为什么人们认为信息传递需要3-维空间或场呢？因为这是人在传递介质可视的假设下，认为它的传递需要场，即一种在每个点赋权的3-维空间，但人们至今也未在实验中观测到引力、磁力或信息的传递过程，仅是将它们解释为空间效应。

这一点解释清楚，就可以把波姆对量子纠缠解释中的隐变量解释清楚，进而理解为什么在人视觉下量子纠缠是一种“超距作用”或“幽灵作用”。人类对万物认知中有一个先验假设，即“信息一定经由人可视的介质传递，是在人可视的3-维空间中传递”，类似于蚂蚁囿于平面认知情形，在图7.12中认知不到A、B两点沿z方向同样可以传递信息，特别是当A、B两点在z方向上的距离趋于0时，沿z方向即可实现信息的瞬时传递。假如蚂蚁对此有认知能力，它们只能将其解释为“超距作用”，因为在蚂蚁看来，从A点传递信息到B点，只能是经由一组顺次相接且在平面I上的线段AB到达B点，但在人看来，不过是A、B两点沿z方向的距离趋于0的结果。

那么，波姆对量子纠缠隐变量解释中的隐变量处在什么位置，是在人的视觉空间内吗？如果是，人们最终会找到这些隐变量；但如果其中的隐变量不在人的视觉空间内，人的“六根”可能永远也发现不了爱因斯坦等EPR论文中追求的“物理实在”。在这种情形下,“实现不了眼见为实是否就不承认它的存在呢？”当然不是！因为人对万物的认知有局限，受人的“六根”感知的制约，对那些遵从逻辑一致原则的认知（解释）仍是一种科学认知（解释），同样属于科学的范畴。

这当中还有一个问题，为什么人们接受爱因斯坦对引力是空间弯曲效应，麦克斯韦对磁力是磁场效应的解释而不接受量子纠缠中的信息传递是隐变量作用呢？欧阳博士解释说，人们之所以接受爱因斯坦对引力、麦克斯韦对磁力的解释，是因为虽然空间弯曲与磁场效应仍不是“眼见为实”，但人们可以想象出空间弯曲和磁铁吸引的情形，故而接受他们的解释。相应地，不接受波姆对量子纠缠隐变量解释的原因在于“隐”字，人们无法想象这个在背后操控量子间信息传递的变量怎样实现信息传递，即:①认为信息传递需要3-维介质；②不同生物空间的嵌入结构。对事项①，上面已阐述，即信息传递需要的维度是1-维空间而不是3-维空间；对事项②需要给出生物空间的嵌入结构，进而理解超距作用。那么，什么是生物空间呢？生物空间的定义如下：

生物空间. 生物空间是某一生物种群生存与认知万物的欧氏空间$\mathbb{R}^k, k \geq 2$。

例如，蚂蚁空间是欧几里德平面$\mathbb{R}^2$，人的空间是欧几里德3-维空间$\mathbb{R}^3$，比人认知能力更强的“生物”空间是$\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \cdots$等。那么，在高维生物空间中，低维生物空间是怎样堆磊的呢？同一种群生物的认知能力相同，生物空间应该是一样的。这

在高出一个维度的生物看来，不过是增加了一个维度，即低维度生物空间在多出的那个维度上的值是相同的。例如，蚂蚁的认知空间为平面$\mathbb{R}^2$，嵌入到人的认知空间$\mathbb{R}^3$中，在第三个维度z上的坐标值是一样的。这样，按认知能力划分，生物空间的嵌入$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4 \cdots$并非是杂乱无章而是有一定规律可循的，这个规律就是底层生物空间嵌入到上一个生物空间中，增加的那个坐标值相同，表现为

$$\{(x,y,0,\cdots,0)\} \subset \{(x,y,z,0\cdots,0)\} \subset \{(x,y,z,w,0\cdots,0)\} \subset \cdots。 \tag{7.5}$$

这当中为简化起见，底层生物空间增加的维度坐标表示为0。例如，蚂蚁空间和人的认知空间关系$\{(x,y,0)\} \subset \{(x,y,z)\}$等。

现在，欧阳博士解释说，可以解释量子纠缠中出现的“超距作用”了，即纠缠粒子间的信息传递是经由第四个维度w传递的，因为信息传递需要的空间维度是1-维。那么，这种超距作用是怎样实现的呢？因为两个纠缠粒子在人的视觉下分开后仍处在人的认知空间$\mathbb{R}^3$，它们第四个维度的坐标值相同。这样，人一旦对粒子A测量，粒子B便同时知晓，无需介质传递。

一般地，对一个Smarandache重叠系统$S = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(\mathcal{S}_i,\mathcal{R}_i)$也可以设置(7.5)这种子系统$(\mathcal{S}_i,\mathcal{R}_i)$, $1 \leq i \leq n$在S中的嵌入关系，即

$$\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_1 \bigcup \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1 \bigcup \mathcal{S}_2 \bigcup \mathcal{S}_3 \subset \cdots \subset S \tag{7.6}$$

满足$\mathcal{S}_i \bigcap \mathcal{S}_j = T_{ij} \subset \mathbb{R}^{k_{ij}}, 1 \leq i \neq j \leq n$。这时，对任意两个子系统$(\mathcal{S}_i,\mathcal{R}_i)$, $(\mathcal{S}_j,\mathcal{R}_j)$，如存在一个整数序列$ii_1\cdots i_sj$使得$k_{ii_1}, k_{i_1i_2}, \cdots, k_{i_sj} \geq 1$，则在理论上可以实现子系统$(\mathcal{S}_i,\mathcal{R}_i) \to (\mathcal{S}_j,\mathcal{R}_j)$的信息传递。更进一步，如果有$k_{ii_1}, k_{i_1i_2}, \cdots, k_{i_sj} \geq 3$则可实现由子系统$(\mathcal{S}_i,\mathcal{R}_i)$ 到子系统$(\mathcal{S}_j,\mathcal{R}_j)$, $1 \leq i \neq j \leq n$的3-维物体迁移。

2.3.幸运数字游戏. 假设有X、Y两个盒子，每个盒子中有红色、蓝色小球各1个。游戏是每三个人，设A、B、C为一组，依次在X、Y中抽小球，规则是每个人均从X盒子抽取一个小球或是一个人从X、另两个人从Y中抽取小球；每个人抽完后需将小球放回原盒子中待下一个人再次抽取，并在一张纸上填写抽到幸运数字是1还是-1，答案对小组其他成员保密；获胜条件是小组均在X中抽取小球时幸运数字的乘积为-1 或是一个人在X、两个人在Y中抽取小球时幸运数字的乘积为1。例如，某一个小组成员均在X中抽取，A回答的幸运数字为-1，B、C两人回答的幸运数字均为1，则三人抽取小球的幸运数字的乘积为$-1 \times 1 \times 1 = -1$，小组获胜。

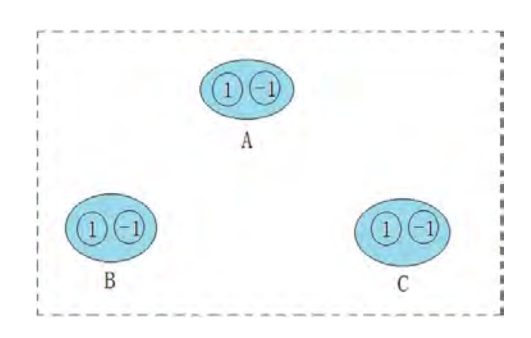


图7.13 三人随机抽球游戏

现在，记A、B、C在X或Y盒子中抽取小球后回答的幸运数字分别为X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C。这当中的每个量，如X_A或Y_A有1或-1两个取值，如图7.13所示。那么，一个小组怎样才能在游戏中获胜呢？按游戏规则，小组获胜需满足下面四个条件之一，即

$$X_AX_BX_C = -1, \quad X_AY_BY_C = 1, \quad Y_AX_BY_C = 1, \quad Y_AY_BX_C = 1。 \tag{7.7}$$

例如，$X_A = 1, Y_B = 1, Y_C = 1$等。注意，如果$X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C$和$Y_C$在每个式子中的取值相同，则这4个等式的乘积为$(X_AY_AX_BY_BX_CY_C)^2 = -1$，这在实数域上不可能成立。故此，$X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C$和$Y_C$在(7.7)不同的等式中取值不一定相同。这样，求解方程(7.7) 得知小组获胜时$X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$取值的想法行不通。

显然，欧阳博士解释说，如果在游戏中允许一个人将抽取小球后回答的幸运数字告知组内另外两个人，小组很容易获胜。例如，A在X中抽到红色小球，回答幸运数字为-1 时，B 和C 只要需要在抽取小球后回答幸运数字均为1或均为-1时小组即获胜；类似地，A在Y中抽取红色小球回答幸运数字为-1时，B、C两人在X、Y中抽取小球后一个回答幸运数字为1，一个回答为-1 时小组即获胜而无需看抽取小球的颜色。然而，游戏规则是A、B、C三人不得将自己抽取小球后回答的幸运数字告知组内他人，阻断了小组成员间的信息传播。

那么，是否存在这样一种规则，使小组三个成员抽取小球回答幸运数字1或-1可以获胜呢？答案是肯定的，即利用量子纠缠而不为抽取小球的颜色所困扰！在方法上，需事先制备3个自旋纠缠态的微观粒子，如电子、光子等。解开纠缠后，A、B、C三人各保存一个微观粒子。现在，如果A在X盒子中摸小球，他就测量手中微观粒子沿x轴方向的自旋，将测量得到的1或-1作为幸运数字；类似地，如果A在Y盒子中摸小球，测量手中的微观粒子沿y轴方向的自旋值1或-1并作为他的幸运数字。这时，小组三个人如果都是在X盒子中摸小球，回答的幸运数字乘积一定是-1；如果一个人在X盒子，两个人在Y盒子中摸小球，回答的幸运数字乘积一定是1。为什么是这样呢？因为A、B、C三人手中的微观粒子是纠缠后分离的微观粒子，沿着x轴方向测量自旋方向，测量结果是一个-1两个1；类似地，沿x轴方向测量自旋方向为-1，沿y 轴方向测量的自旋方向是一个1一个-1。这样，当A、B、C三人在X盒子中摸小球回答的幸运数字乘积是-1；而一个人在X盒子、两个人在Y盒子摸小球时回答的幸运数字乘积是1，满足游戏获胜条件。

2.4.量子隐形传态. 人类生活在3-维空间中，可以在$\mathbb{R}^3$中随意进行3-维物体迁移而无需借助更高维度，但怎样实现对低维物体、介质进行迁移或传输，如不借助3-维介质怎样实现1-维信息传递仍是个未解决的问题，因为人眼中客观物质的维度是3-维。这当中，无线电传递借助的是电磁波，是在应用麦克斯韦的电磁场，即3-维场传

递信息而非信息的1-维传递。欧阳博士告诉惠子，量子纠缠对人类实现信息的1-维传递，即隐形传递富有启迪。

在上面幸运数字游戏中，小组利用量子纠缠的"超距作用"或"隐形传输"而在游戏中获胜，这当中，小组获胜应用的恰是量子的隐形传态。一般地在量子通信中，假设需要在甲、乙两个人之间传输粒子α的量子态Ψ。那么，怎样在网络上进行信息传输而不泄密呢？经典做法是对传递信息加密，在A、B间分配事先定好的密钥进行加密和解密。这时，如果密钥失窃即发生信息泄密。对此，量子的隐形传态可以有效预防信息泄密，因为对纠缠后分离的量子，每次测量结果都不一样。那么，量子隐形传输是怎样进行的呢？量子隐形传输过程，如图7.14 所示的甲传输信息α给乙。



图7.14 量子隐形传输

这里，EPR源指生成纠缠粒子并将其分离的装置或系统。首先，需要给甲、乙各分配一个纠缠后分离的微观粒子A、B；其次，甲对粒子α和A进行一次联合测量，这一测量将导致α、A、B 构成的粒子系统发生坍缩。这时，由于粒子A、B发生过纠缠，"超距作用"将量子态Ψ的一种变换操作隐形地由A传递给B，乙对粒子B的测量即知晓甲对粒子A的测量结果；这样，当乙收到甲通过信息通道传递来的测量结果，即量子态Ψ的表征变换结果后，对测量结果采用逆变换即可还原粒子α的量子态Ψ，实现粒子α量子态Ψ的隐形传输。

欧阳博士告诉惠子，量子隐形传输技术的核心是应用纠缠粒子分离后的超距作用，是由3-维介质降为1-维的信息传递，即应用空间嵌入套(7.5)第四个维度进行信息瞬时传输的事例，但人们至今并不清楚1-维信息传递的机理，仅是建立在量子纠缠上的一种唯象应用。注意，量子纠缠是一种特殊的Smarandache纠缠对，而量子则是密钥发生器。人们对量子纠缠感觉神秘并非是编码或密钥本身，而是因量子行为的神秘与不确定性。实际上，与图7.14中的量子隐形传输类似，可以应用Smarandache重叠系统和Smarandache纠缠对S, S'一般性地给出编码和解码密钥。这时，假设需要传递信息I，信息发出人甲取一个Smarandache重叠系统$\widetilde{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$，用$A_i, 1 \leq i \leq m$中的某些集合和Smarandache纠缠对$S$对信息编码、加密得到加密信息$\widetilde{A}'$，再采用公开的

数字编码对信息编码或加密编码数字化得到$I(\widetilde{A}')$在经典信道上传输；接收人乙对收到的信息采用公开的数字编码密钥和Smarandache纠缠对中的S'解码，得到$\widetilde{A}'$和$\widetilde{A}$，再利用Smarandache重叠系统的坍缩映射由$\widetilde{A}$得到$A_i, 1 \leq i \leq m$获取真实信息。当然，类似于量子纠缠中的EPR源，需有一种便携带Smarandache纠缠对和重叠系统特征的密钥发生器，进而才能一般性地拓广超距作用在信息传输中的应用。

第3节 数学局限

数学是一门刻画空间和数量关系的形式科学，其局限性源于科学的局限性。本质上，数学讨论的对象都是人为定义的抽象，其主要功用是为其他科学定量刻画万物，理解宏观和微观事物提供一种抽象工具。一方面，数学是人类抽象思维的产物，可以视为科学的科学；另一方面，物质决定意识，数学是万物在人脑中的反映与抽象。数学创造源于人类对万物的认知，源于一般性地解决人类社会实践中出现的各种问题和抽象。数学需要在总结前人认知方法与技巧的基础上，进行形式抽象、逻辑演绎和推广，上升为理解万物自然真实的抽象科学。一般地，数学形成模式为：观测与实验→科学假说→数学模型→假说与实验→归纳与演绎→数学理论。

事物是复杂的，甚至它有时与其他事物或多或少地存在着交叉。那么，什么是一件事物的自然真实呢？事物的自然真实，是其在世上的过去、现在以及将来的存在状态，不依赖人的意志为转移。这种界定意味着人在理解、把握自然真实上是局部与渐进的，某一时刻人类理解的自然真实并不一定是事物的自然真实。故此，理解、把握事物的自然真实成了人类发展中一个主要的科学目标。那么，既然数学是人类基于逻辑一致原则为认知万物而构建的形式演绎科学，一个数学结论真能反映事物的自然真实吗？答案是不一定！因为数学是基于人对万物观测的抽象与演绎产物。这当中有两个事项需要辨析：一是人对万物的观测认知有局限，并非一定是"眼见为实"。例如，图7.15所示著名的Ames房间问题。这当中，Ames房间在平面上是一个梯形而非矩形，但在观测点上看是一个矩形。同时，左上角的A在观测者看来，不是在房间的左上角而感觉是在视觉矩形的左上角，即人在观测点上对A位置的观测是一种错位；二是万物在人类眼中并非一定是

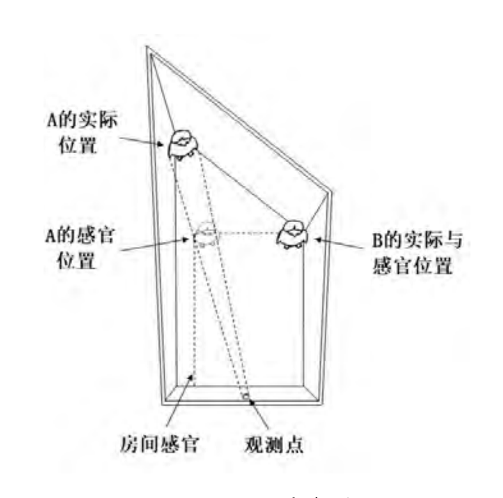


图7.15 Ames 房间问题

逻辑一致，即数学的逻辑一致原则不一定能刻画所有事物，这在对一件事物采用抽象符号刻画或是将其限定在某一个假象的抽象空间中尤其如此。例如，在人类认知中，薛定谔的猫要么“生”要么“死”。但人在打开盒盖前，猫态可能是“生”也可能是“死”，不符合人的逻辑一致原则而需要用重叠空间$\mathbf{L}\bigoplus\mathbf{D}$对猫态进行刻画。

数学既然是一种形式科学，采用形式符号刻画万物就是数学的主要工作。这里，一个符号对应于万物中某一件事物或是事物的某一个局部特征的“名”，是对事物或其局部的统一称谓。那么，事件或符号对应的事物局部与对应的形式符号含义是否一致呢？欧阳博士告诉惠子，采用形式符号定义一件事物时，形式符号在某种意义上限制或拓宽了其对应的事物本身，这就是《道德经》中“名可名，非常名”的哲学含义。同时，符号间的运算、公理或对应关系在遵从逻辑一致原则基础上形成一个数学系统，推导出的定理或命题是这些形式符号间重叠关系的体现。这种数学系统中的重叠关系是符号和运算、公理或对应关系的产物，是人类定义的符号和运算、公理或对应关系刻画万物的产物，并非一定是万物的本来面目。

数学的终极目标是将万物映射为形式符号，对万物间关系的任一个命题可以采用形式符号证实或证伪，进而认知宇宙万物。这种想法如果成立，人类就可以借助形式符号认知宇宙万物。然而，来自多瑙河畔一个著名的数理逻辑学家哥德尔于1931年证明了这样的数学系统不存在，形式符号系统与万物在逻辑一致原则下不等同，这就是著名的哥德尔不完备定理，与图7.16 中那句不能证明上帝存在的断言类似，即“*对任一个相容的形式系统S，只要其中蕴涵皮亚诺算术公理，就一定可以在S中构造出一个既不能证实也不能证伪的命题*”。这里，皮亚诺算术公理是关于自然数集$\mathbb{Z}^+$结构的五条公理，即: ①1是自然数；②每一个确定的自然数n都有一个确定的后继数n'，n'也是自然数。换言之，数n的后继数n'就是排列在n后面的那个数$n+1$. 例如，$1'=2, 2'=3, \cdots$等；③如果m、m'都是自然数k的后继数，那么$m=m'$；④1不是任何自然数的后继数；⑤任一个关于自然数的命题P，如果证明了P对自然数1 成立，又在假设P对自然数n为真时证明了P对n'也成立，则命题P对所有自然数都成立，这条公理又称为归纳公设，一般称为数学归纳法。



图7.16 上帝不能证明存在

注意，任何一个命题的证明步骤均离不开皮亚诺算术公理。这样一来，根据哥德尔不完备定理，人们永远也不能发现一个万能的公理系统证明一切数学真理，即人类想通过形式符号认知万物，用人类自己的思想构建万物的逻辑关系在理论上并不成

立，数学较之整个人类科学的局限性更大。这一点还可以从数学认知一件事物的方法，即在数学抽象与演绎中得到印证，进一步体验数学认知万物的局限性。

3.1.数学抽象局限. 一般地，采用数学认知一件事物，需要抽取同类事物共同的、本质的属性或特征，舍弃事物其他非本质的属性或特征，构建数学模型模拟事物动态行为，分析、把握事物的变化特征，称为“数学抽象”过程，如图7.17所示，是数学认知事物的普遍方法。数学抽象可以简单地概括为四种，即：①弱抽象，即从对象中选取某一特征抽象，使对象内涵减少、结构变弱、外延扩张，获得的数学模型涵盖事物种类较对象事物更广；②强抽象，即在事物原型中引入新特征，使模型刻画的事物内涵增加、结构变强。同时，收缩事物的外延，把一些看似不相关的数学概念联系起来，获得较对象事物结构更丰富的数学结构；③构象化抽象，即根据逻辑上的需要，构想一种不能由现实事物直接抽取, 但完全可以理想化的数学对象作为一种新元素添加到某种数学系统中，使之具有完备性；④公理化抽象，即选取一些不证自明的结论为公理推演出其他结论，以使对应的数学系统遵从逻辑一致原则。例如，代数学中群论、环论、域论和理想论，几何学中的欧氏几何、黎曼几何、罗巴切夫斯基几何等均是公理化抽象的产物。



图7.17 数学抽象

数学抽象的宗旨，在于把一件具体事物用抽象符号进行表征，选择有效的数学系统或方法对事物构建数学模型。对应地，数学抽象要求数学符号系统的特性应与对象事物的行为一致，进而可以用数学符号系统模拟事物行为。但这种情形在实践中根本不会出现，因为客观事物行为不以人的意志为转移，即为什么人们在对一件事物抽象时，需要弱或强抽象并伴随构想或公理化抽象，所得数学模型是事物行为近似模拟的原因。

那么，为什么数学模型仅是对一件事物行为的近似模拟呢？欧阳博士告诉惠子，这当中有人对一件事物认知原因，也有数学作为人类的科学，在刻画万物上存在局限性的原因。

首先，是人对事物主要属性或特征的认知，即人是否能够准确把握一件事物的主要属性或特征的答案并不一定是肯定的。同时，对一件事物的主要属性或特征并没有判定标准。这样一来，人为对一件事物划分的主要、次要属性或特征中，次要属性或特征是否一定不影响事物的行为呢？答案是否定的！即便以人自己为例，为什么一个人有时会出现非理性即违反公序良俗的行为呢？答案是公序良俗对应的是社会秩序、公共利益、社会公德和社会风尚等一般行为规范。然而，有“一般”就一

定有“特殊”或“个例”。在人或动物这种有自调节能力的社会系统中，不存在个体基元同步规律，只能要求多数个体在某一特定行为或是某一时间段上趋于同步，引导社会向前发展。

其次，在于哥德尔不完备定理已经表明，不存在这样一种在遵从逻辑一致原则基础上表征万物的数学符号系统，即任何一个数学系统刻画事物行为都只能是对事物某一个或某几个属性或特征在某一个时间段的刻画，是采用人类假象的一套符号系统、规则对事物行为的一种局部刻画。同时，也没有一种统一的数学方法适用于刻画所有事物行为。这样，人们在构建一件事物的数学模型时，不得不对一件事物的主要属性或特征的行为状态进行人为假设，以适应选定的数学方法或工具。这在一定程度上，造成由数学模型得到的结论仅是事物行为在一定约束条件下的近似刻画。超出设定的约束条件时，事物的属性或特征，以及事物行为不再遵从人类模拟的数学规律。那么，这在人们用数学系统模拟一件事物的行为时又是如何表现出来的呢？欧阳博士告诉惠子，这种人为约束条件可以猫和老鼠构成的2-元系统(5.26)，即Lotka-Volterra的捕食者-被捕食者模型

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(-\mu + cy) \\ \dot{y} &= y(\ \lambda\ - bx) \end{cases}$$

为例，进一步深入讨论。



图7.18 捕食-被捕食模型

这里，Lotka-Volterra的捕食者-被捕食者模型仅是对2-元系统中的种群规模进行刻画。在这个2-元系统中，猫和老鼠分别代表捕食者和被捕食者，种群规模记为x, y，是模型刻画的目标。在构建这个模型时，他们假设在没有老鼠时猫的平均增长率为$-\mu$，在没有猫捕食时老鼠的平均增长率为λ，且存在常数b和c，即老鼠的出现使猫的平均增长率由$-\mu$增长为$-\mu + cx$，增长比例为猫种群规模的c倍；猫的出现使得老鼠的平均增长率由λ减少为$\lambda - by$，减少比例为老鼠种群规模的d倍。这样，解种群状态方程(5.26)，捕食者$x(t)$和被捕食者$y(t)$种群间有$y^{\mu}x^{\lambda} = C_1 e^{cy+bx}$，即方程(5.45)的关系。这里，$C_1$ 为一个常数。

那么，怎样从Lotka-Volterra的捕食者-被捕食者模型构建中看出数学抽象的局限呢？首先，是猫的自然死亡率$-\mu$或老鼠的自然增长率λ为一个常数是一种人为假设，即可以假设猫和老鼠种群在自然状态下，增长遵循Logsitic方程(3.5)，即$\dot{x}(t) = -\mu t$，$\dot{y} = \lambda(t)$。注意，这当中的$\mu(t)$和$\lambda(t)$是t 的函数，随时间变化而变化，不一定是常数。换言之，即便在自然状态下，猫和老鼠种群规模平均增长率$\dot{x}$和$\dot{y}$也不一定是常数，而是与猫、老鼠的先天素质、食品供给和生存环境状况有关的变量。假设它

们的自然平均增长率为常数是一种人为假设，是为抽象与简化问题，构建方程(7.8)需要而进行的假设；其次，老鼠的出现使养活的猫平均增加率cx，猫的出现使老鼠平均减少率$-by$也是一种人为计算假设，是在猫和老鼠即有规模上x, y基础上作的一种假设。同时，这里的c, b也应是t的函数。假设它们是常数，实际上是在假设单位时间内猫的平均食量是一个常数而不考虑猫食量随时间的变化，以及作为猫口中的食物，不考虑老鼠身体的大小而人为假设猫的平均增加和老鼠的平均减少率是一个即有种群规模的线性函数$cx, -by$等。类似地，这种常数或遵循的变化规则在大多数学模型中均是一种人为假设，是假设事物遵循人类设定的一种均匀变化规律，这就是数学抽象的局限性。否则，人们可能无法构建或无法求解事物的状态方程。

3.2.数学演绎局限. 数学演绎，指从一般性的前提或公理出发，通过推导即"演绎"得出具体陈述或数学结论的过程，有三段论、选言推理、假言推理和关系推理等演绎形式。这当中，①三段论是演绎的常见模式，一般由"大前提"（已知的一般原理或结论P）、"小前提"（所研究的特殊情况或条件S）和"结论"（由一般原理或结论对特殊情况的判断C）等三个部分组成。形式上，由命题$P \to C$和$S \subset P$推出$S \Rightarrow C$的结论。例如，"P：人有两只眼睛"和"S：张山是一个人"一定有"C：张山有两只眼睛"的结论；②假言推理有充分条件假言和必要条件假言两种。其中，充分条件假言的原则，是小前提肯定或否定大前提的前件，结论就肯定或否定大前提的后件。例如，大前提：末位数是偶数的数能被2整除，小前提：某一个数的末位数是6，这个数一定能被2整除。必要条件假言的原则，是小前提肯定大前提的后件，结论就需要肯定大前提的前件；小前提否定大前提的前件，结论就要否定大前提的后件。例如，大前提：只有浇水充足大白菜才能长得好，小前提：这块地的大白菜长得好，结论：这块白菜地浇水充足；③选言推理以选言判断为前提，分为相容选言和不相容选言两种。相容选言的原则，是大前提是一个相容选言，小前提否定了其中一个或一部分选言，结论就需要肯定剩下的一个选言。不相容选言的原则，是大前提是个不相容的选言，小前提肯定其中的一个选言，结论则需要否定其它选言；小前提否定除其中一个以外的选言，结论则需要肯定剩下的那个选言；④关系推理是前提中至少有一个是关系命题的推理形式，如对称关系推理、反对称关系推理和传递性关系推理等。例如，$x = y \Rightarrow y = x$，$x \geq y \Rightarrow y \leq x$，以及$x \geq y, y \geq z \Rightarrow x \geq z$等。

数学演绎中，每一步推理都需要遵从相应的限制性条件。否则，可能会得到一个荒谬的演绎结论。例如，下面是一个"$1 = 2$"的错误证明：

首先，取两个实数$a, b > 0$且假设$a = b$。接下来，在$a = b$的两边同时乘b，有$a \times b = b \times b$，在其两边同时减$a \times a$，有$a \times b - a \times a = b \times b - a \times a$。对$a \times b - a \times a = b \times b - a \times a$的两边分解因式有$(b-a)a = (b+a)(b-a)$，两边再同时除以$b-a$有$a = b+a$。

接下来，由假设$a=b$有$a=a+a=2a$。这样，应用假设$a>0$，在$a=2a$的两端同时除以a就有$1=2$。

当然，这是一个错误的证明，因为1和2是自然数集$\mathbb{Z}^+$中的两个不同的数字。那么，上面的推理错在什么地方？欧阳博士告诉惠子，既然假设$a=b$，就有$a-b=0$。这样一来，还能在等式$(b-a)a=(b+a)(b-a)$的两边除以$a-b$么？当然不能，因为$a-b=0$，不能用0作除数。惠子问欧阳博士："爸爸，为什么在数学中0不能作除数呢？"欧阳博士解释说，数学中，$c=a/b$是指$c=a\times 1/b$。这里，$1/b$是b 的乘法逆，即$b\times 1/b=1$的意思。这样，$a/0$的意思是$a\times 1/0$，即存在一个数$1/0$使得$0\times 1/0=1$。然而，由乘法规则，任何一个数与0的乘积等于0，$0\times 1/0=1$这个式子不可能成立，这就是数学中规定0不能作为除数的原因。惠子突发奇想问："$1/0$在数学中是没有意义，可在高等数学中求0/0型极限。那么，0/0是不是在数学中就有意义呢？"欧阳博士解释说，同样，0/0的意思是$a\times 0=0$，这个式子对任意一个数a都成立，即形式上0/0可以等于任何一个数，同样没有数学计算上的意义，至于高等数学中讲的0/0型极限，其分子、分母是两个无限趋于0但永远不等于0的无穷小量，并不违反0不能作除数的运算规则。

(1) 演绎结论局限. 数学追求系统的统一、对称和简单等完美特性。这当中，统一性体现的是数学在形式上的共同性、关联或一致性，表现为数学概念、规则、方法的统一，理论的统一，以及数学和其它科学的统一；对称性是事物和谐的一种特殊的符号表现，是一种数学美的享受，包括数学的系统性、封闭性和等价性等；简单性表现在数学结构、数学方法和表达形式的简单与简洁，便于人的理解和把握。这当中，没有演绎方法，如对构建的微分方程模型不知怎样求解，或是得不到简洁的演绎结论等，均造成数学演绎结论的局限性。

与数学追求完美或刻画功能相对，宇宙事物大多是不均匀、非对称、杂乱无章的，不能用一种统一、对称、均匀或简单的符号系统对其动态行为刻画。正因为此，欧阳博士解释说，数学演绎结论大多是"条件真实"而非绝对真实，是在一定条件下的符号真实，不一定对应事物行为的真实状态。追求体系的完美易于导致数学抽象刻画事物行为的初衷相违背，表现在：①数学概念越抽象（许多仅是在原概念基础上增加某些条件或是换个符号或术语）、数学分支越多与事物特性及状态的刻画越脱节，数学演绎是在追求符号完美而非定量刻画或认知事物的方法或工具；②数学结论在形式上越简洁，前提中人为设定的条件越多，刻画的事物行为或状态越狭窄，能把握事物行为的情形越少；③人对万物的系统认知中，任何一件事物都是有限基元的组合，但数学在于追求无限或边界情形，给出量$n\to\pm\infty$或时$t\to\pm\infty$的结论以使数学结论简洁，这在人类认知中不可能出现；④对一些人的"六根"不能

准确认知或界定的事物行为，如微观粒子行为等引入几率即可能性，是对事物的不确定性行为采用一种模糊方法或手段刻画，结论仍只能是“可能性”，一种模糊而非确定性的结论。同时，这在一定程度上增加了人对事物认知的复杂性。例如，在薛定谔的猫中，猫的生死在打开盒子后一望便知，在《韩非子-难一》那则矛与盾的寓言中，只要那位商人用他右手中的“矛”刺一下左手中的“盾”即可知晓到底是他的矛尖锐无比还是他的盾坚固无比。这里，在薛定谔的猫中，对认知缺乏的是猫放入盒子到打开盒盖这一段“因”；在矛与盾寓言中，缺乏的是右手中的矛刺向左手中的盾这一段“因”，即人在黑箱的状态下给出猫的生死、矛与盾尖锐或坚固的“果”，数学上是一个间断函数即人认知的局限性，不可知而“强之曰知”，得到两种各自50%可能性的结论，仍是一种模糊认知。

对数学这种过于追求形式完美而远离认知万物初衷的发展趋势，爱因斯坦曾在1921年一次演讲《几何学与我的经历》中抱怨到：“数学定理一旦用于事物的自然真实，它们什么也没有确定；而它们一旦给出确定的结论，又往往不是针对事物的自然真实。”与此同时，伴随着人类社会的发展与对自然的认知，实践中越来越多的问题找不到适用数学，不知道应当怎样刻画其行为与特征进而把握自然真实，数学的局限性日显严重。在这种情形下，欧阳博士说，需要的是重新审视数学在坚守逻辑一致原则的基础上，怎样化解或包容人类眼中无处不在的矛盾以拓广数学系统刻画宇宙万物的能力，与其他科学一起共同促进人类对万物本来面目的认知而非一味地追求形式上的完美。

（2）演绎矛盾局限. 数学演绎的宗旨是得到演绎结论，用简洁的公式、符号或结论概括数学规律。那么，演绎中如果出现了前后不一或矛盾是否一定意味着事物或事物行为不存在呢？欧阳博士告诉惠子，这时，需要检验的不是事物存在还是不存在，因为事物就在那里，肯定存在！需要检验的是把事物某一个特征的抽象，即符号的内涵和外延是否恰当，构建的数学模型是否恰当，以及演绎的过程是否符合逻辑，引用的理论、定理或公式是否正确等。

例如，在上一节幸运数字游戏中，符号X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C分别表示小组成员A、B、C三人在盒子X 或Y中抽取小球后回答的幸运数字，小组获胜是满足

$$X_AX_BX_C=-1,\quad X_AY_BY_C=1,\quad Y_AX_BY_C=1,\quad Y_AY_BX_C=1,$$

即方程(7.7)。同时，求解方程(7.7)得知获胜时X_A,Y_A,X_B,Y_B,X_C,Y_C取值的想法行不通，因为这四个式子的乘积$(X_AY_AX_BY_BX_CY_C)^2=-1$，与在$\{-1,1\}$上取值矛盾。那么，欧阳博士问惠子：“由此能否断定这个游戏中小组没有获胜的情形呢？”惠子回答说：“当然不能，因为对3个自旋纠缠后分离的粒子测量自旋方向并回答幸运数

字总能获胜!”欧阳博士继续问惠子:“这一演绎过程到底错在什么地方呢?”惠子想了想,如实回答说:“我看不出来,感觉每一步都没有问题可最后却得到一个矛盾的方程$(X_AY_AX_BY_BX_CY_C)^2=-1$,让人不可思议。”欧阳博士告诉她,首先,需要分析求解方程组

$$\begin{cases} X_AX_BX_C &= -1 \\ X_AY_BY_C &= 1 \\ Y_AX_BY_C &= 1 \\ Y_AY_BX_C &= 1 \end{cases}$$

是什么意思,隐含的假设是什么;其次,是对矛盾方程$(X_AY_AX_BY_BX_CY_C)^2=-1$给出合理解释,还原符号假设与游戏规则的差异。按照游戏规则,小组三人是均在X盒子抽小球后回答幸运数字或是一个人在X中,两个人在Y盒子中抽小球。欧阳博士解释说,这时,求解方程(7.7)意味着小组三个人无论是在X 还是在Y盒子中抽小球,一个人回答的幸运数字始终如一,即不能发生变化,这与游戏规则并不一致,至少应区分在X盒子抽取小球获胜情形和在Y盒子抽小球获胜情形,即分别求解方程

$$① \ X_AX_BX_C=-1 \ 和 \ ② \begin{cases} X_AY_BY_C=1 \\ Y_AX_BY_C=1 \\ Y_AY_BX_C=1 \end{cases}$$

即便如此,上面求解方程组②是什么意思?欧阳博士说,这同样是在假设一个人在Y盒子抽小球后回答的幸运数字一样,因为只有他每次回答的幸运数字一样,解方程组②才有意义。但是,游戏规则明确X_A,Y_A,X_B,Y_B,X_C和Y_C可以在$\{-1,1\}$中按其主观意愿随意选取,与求解(7.7)或是②没有关系,得到矛盾$(X_AY_AX_BY_BX_CY_C)^2=-1$是人为假设$X_A,Y_A,X_B,Y_B,X_C$和$Y_C$ 在每个方程中的值均相同,这与游戏规则不一致所致。听到这里,惠子若有所悟地说:“是这样啊,爸爸!可这样一来,应怎样求解方程(7.7)才与游戏规则一致呢?”欧阳博士告诉她,应对方程(7.7)中的每个方程$X_AX_BX_C=-1$,$X_AY_BY_C=1$,$Y_AX_BY_C=1$或$Y_AY_BX_C=1$在值域$\{-1,1\}$上独立求解,这样得到的X_A,Y_A,X_B,Y_B,X_C和Y_C值才与游戏中的规则一致。

第4节 矛盾真实

数学系统遵循逻辑一致的原则,应用于事物行为刻画,演绎中出现矛盾则不一定是表明事物不存在,可能是符号的内涵与外延限制所致,也可能是数学系统或规则的选用不当所致。这在幸运数字游戏中表现最为明显,那里的不恰当演绎得到矛盾$(X_AY_AX_BY_BX_CY_C)^2=-1$。这种矛盾由人的符号模拟不当引起,可以

经由假设游戏中的每次抽取所在空间不同，即将变量$X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$替换为$X_A^1, X_B^1, X_C^1, X_A^2, Y_B^2, Y_C^2, Y_A^3, X_B^3, Y_C^3$和$Y_A^4, Y_B^4, X_C^4$ 后可以得到解决。欧阳博士告诉惠子，一个数学系统演绎中出现了矛盾，从逻辑一致原则看一定是数学演绎中的某一步或某几步演绎中存在错误，因为数学系统是一个自洽系统。但应用一个数学系统模拟一件事物行为，数学演绎中如果出现矛盾，除演绎过程中存在错误外，大都是数学系统应用不当，即数学系统刻画行为与事物行为不完全一致，而是人为假设事物变化遵循数学系统中的规则所致。这在采用数学模拟一个自调节系统，如动物群体行为时尤其如此。



图7.19 骏马奔腾

现在，设$A = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$和$B = \{H_1', H_2', H_3', H_4'\}$为两组马群，每组马群由四匹马组成，如图7.19所示。注意，每一匹马都有自己的思想和行动，马群A或B不一定是一个同步而是一个自调节生物系统，它们在行动上不一定协调一致。这时，对马群A或B的行为不能简单地用一组可解方程的解刻画。例如，假设马群A和B中的每一匹马沿着图7.20所示欧氏平面$\mathbb{R}^2$上(LES^N)或(LES^S)的四条直线奔跑。

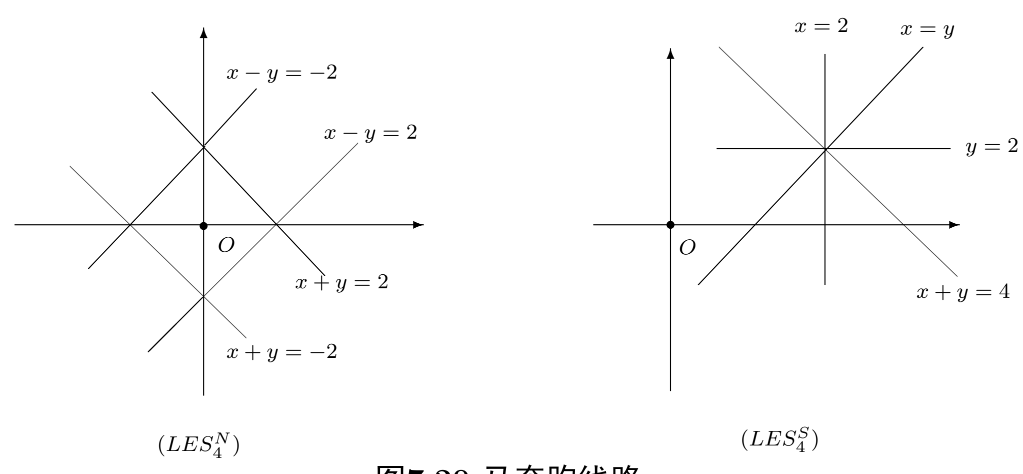


图7.20 马奔跑线路

这样，由图7.20中马的奔跑线路易知A和B两组马分别沿四条直线奔跑构成两

个线性方程组，即

$$(LES_4^N)\quad \begin{cases} x+y &= 2 \\ x+y &= -2 \\ x-y &= -2 \\ x-y &= 2 \end{cases} \qquad\qquad (LES_4^S)\quad \begin{cases} x=y \\ x+y=4 \\ x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

欧阳博士问惠子："应怎样刻画A组和B组马在平面上的运动行为呢？"欧阳博士解释说，这时，一个很自然的想法是求解这两个线性方程组。显然，第一个方程组无解，第二个方程组有解$(2,2)$。那么，据此我们是否能断言A组马什么也不是，是个空集；B组马的行为是都待在点$(2,2)$上不动呢？当然不能，因为A组和B组马的确是在欧氏平面$\mathbb{R}^2$上沿着四条直线奔跑。那么，为什么经由解方程组(LES_4^N)和(LES_4^S)却得到这样的类似于盲人摸象对大象形状得出的荒谬结论呢？欧阳博士解释说，这与幸运数字游戏中的情形类似，在于这当中每个方程的变量x,y是否相同，求解方程组(LES_4^N)和(LES_4^S)的实质是假设每一组方程中的变量x,y相同。然而，不同方程中的x,y对应马在直线上奔跑经过的平面点(x,y)，理论上应是决然不同的。这样，求解方程组(LES_4^N)和(LES_4^S)并没有实际意义。

实际上，一匹马在欧氏平面$\mathbb{R}^2$上奔跑的轨线的确可以由对应的直线方程解进行刻画，但绝对不是A或B组对应的四个方程的解。这时，A或B组马对应的轨线$\mathrm{Orb}(A)$或$\mathrm{Orb}(B)$应分别为平面上点集的并集，即

$$\begin{aligned} \mathrm{Orb}(A) &= \{(x,y):\ x+y=2\}\bigcup\{(x,y):\ x+y=-2\} \\ &\quad \bigcup\{(x,y):\ x-y=2\}\bigcup\{(x,y):\ x-y=-2\}, \\ \mathrm{Orb}(B) &= \{(x,y):\ x=2\}\bigcup\{(x,y):\ x+y=4\} \\ &\quad \bigcup\{(x,y):\ x=y\}\bigcup\{(x,y):\ x=2\}, \end{aligned}$$

这里，轨线$\mathrm{Orb}(A)$或$\mathrm{Orb}(B)$正是本章第1节中定义的Smarandache重叠系统。那么，人们求解方程组(LES_4^N)或(LES_4^S)又是在追寻什么样的客观事实呢？这时，求解方程组(LES_4^N)或(LES_4^S)的实质，是在找寻A或B组中的四匹马的奔跑线路是否有交点，是否需要预防两匹马撞在一起，即沿着(LES_4^N)中的线路奔跑不会，但沿着(LES_4^S)中的线路奔跑有可能在点$(2,2)$撞在一起，需要调整奔跑线路的设置，或是在(LES_4^S)情形调整四匹马的奔跑速度，以避免马匹在点$(2,2)$相撞。由此可知，矛盾方程同样可以对应一种事物的自然真实，即群体动物行为。对群体动物行为刻画的一般化，即是数学上矛盾方程组对应的非均匀系统。

4.1.非均匀系统方程组合解. 系统状态方程是假设系统S的任一个基元$v\in S$的状态遵循其对应状态方程刻画的微分运算规律。一般地，如果系统方程(5.20)可解，

基元v对应的解$\mathbf{x}_v(t)$可以完整地刻画基元v的状态。那么，如果系统S的状态方程是一组矛盾方程，是否可以推断系统S不存在呢？答案是否定的！欧阳博士解释说，因为系统S及其基元是一种客观存在，存在性不容置疑。那么，为什么得到的系统方程是一个矛盾方程组呢？答案是对系统S中基元行为刻画或数学抽象上符号的空间重叠效应。这样的系统S一般称为非均匀系统，定义如下：

非均匀系统. 一个非均匀系统S是这样一种由基元$P_i, 1 \leq i \leq p, p \geq 2$及其内相互作用构成的系统$S$，使得基元$P_i$在时刻$t$满足方程$\mathscr{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$。这里，$\mathscr{F}_i(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = 0$且$\mathscr{F}_i$在点$(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$的领域$U$上满足隐函数定理中隐函数存在的条件。

由上述定义，非均匀系统S在n-维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的状态方程为

$$S = \begin{cases} \mathscr{F}_{v_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \\ \mathscr{F}_{v_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathscr{F}_{v_p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \end{cases} \text{或向量方程 } \overline{\mathscr{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}。 \tag{7.9}$$

现在，由假设方程组(7.9)中的函数$\mathscr{F}_{v_1}, \mathscr{F}_{v_2}, \cdots, \mathscr{F}_{v_p}$满足隐函数定理中隐函数的存在条件，即存在解流形$S_{\mathscr{F}_i} \subset \mathbb{R}^n$ 为$\mathscr{F}_i$：$S_{\mathscr{F}_i} \to 0$，$1 \leq i \leq p$。那么，在几何上看，方程组(7.9)无解或有解的条件是

$$\bigcap_{i=1}^{p} S_{\mathscr{F}_i} = \emptyset \quad \text{或者} \quad \bigcap_{i=1}^{p} S_{\mathscr{F}_i} \neq \emptyset。 \tag{7.10}$$

这时，应怎样解释方程组(7.9)的无解或有解呢？注意，方程组(7.9)的解表示的是时刻t时基元$v_1, v_2, \cdots, v_p$的状态重叠，并非是基元$v_1, v_2, \cdots, v_p$的状态，因为基元v_i的状态是解流形$S_{\mathscr{F}_i}, 1 \leq i \leq p$，类似于薛定谔猫的生态和死态的重叠。对应地，方程组(7.9)无解表示的是系统基元状态间无重叠，并非是系统状态不存在，因为系统基元$v_1, v_2, \cdots, v_p$的状态分别由解流形$S_{\mathscr{F}_i}, 1 \leq i \leq p$进行刻画。

这样，对系统行为的刻画应是$\bigcup\limits_{i=1}^{p} S_{\mathscr{F}_i}$而非$\bigcap\limits_{i=1}^{p} S_{\mathscr{F}_i}$。换言之，经典数学中采用方程组(7.9) 的解应用于系统认知万物，仅当系统所有基元的状态相同，即$S_{\mathscr{F}_i} = S_{\mathscr{F}_j}, 1 \leq i, j \leq p$或

$$\bigcup_{i=1}^{p} S_{\mathscr{F}_i} = \bigcap_{i=1}^{p} S_{\mathscr{F}_i} \tag{7.11}$$

时才成立。这样，一般应采用$\bigcup\limits_{i=1}^{p} S_{\mathscr{F}_i}$而非$\bigcap\limits_{i=1}^{p} S_{\mathscr{F}_i}$刻画一个非均匀系统$S$的状态。值得注意的是，$\bigcup\limits_{i=1}^{p} S_{\mathscr{F}_i} \subset \mathbb{R}^n$是一个并集，虽在一定程度上可以刻画系统$S$的状态但仍不能完整反映系统基元的状态，对理解系统$S$的状态存在一定差异。那么，在这种情形

下应怎样刻画系统S的状态呢？欧阳博士告诉惠子，这时，需引入矛盾方程组(7.9)的组合解概念，即由基元的解流形定义方程(7.9)的G-解如下：

非均匀系统组合解. 对任一个整数$p\geq 1$，非均匀系统方程(7.9)的组合解或G-解是一个标号图G^L，其顶点集和边集定义为

$V\left(G^L\right)=\{S_{\mathscr{F}_i},\ 1\leq i\leq p\}$；

$E\left(G^L\right)=\left\{(S_{\mathscr{F}_i},S_{\mathscr{F}_j})\mid \text{如果对任意整数}1\leq i,j\leq p\ S_{\mathscr{F}_i}\bigcap S_{\mathscr{F}_j}\neq\emptyset\right\}$。

对应地，G^L上的顶点、边标号定义为

$$L:\ S_{\mathscr{F}_i}\to S_{\mathscr{F}_i},\qquad (S_{\mathscr{F}_i},S_{\mathscr{F}_j})\to S_{\mathscr{F}_i}\bigcap S_{\mathscr{F}_j}.$$

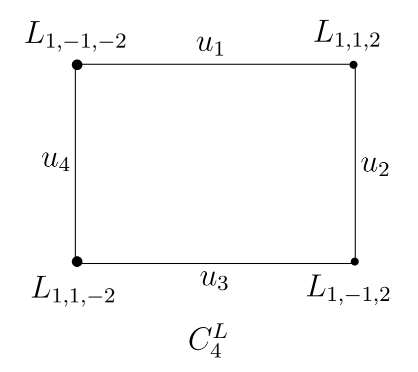
经典数学中，$\bigcap\limits_{i=1}^{p}S_{\mathscr{F}_i}=\emptyset$时，方程组(7.9)视为包含矛盾、无意义而不再讨论。然而，方程组(7.9)矛盾大多是因为系统基元状态的重叠，并非是因系统或基元的不存在。在这种情形下，研究矛盾方程组(7.9)的组合解远比经典数学解更有意义，即

组合解的存在性. 对任一个整数$p\geq 1$，非均匀系统(7.9)的组合解G^L一定存在。

这样，刻画一个非均匀系统无需再讨论其对应的方程(7.9)是否可解或是否矛盾，因为它的组合解一定存在，且组合解可以恰当地刻画系统基元行为。例如，在图7.20中，将A和B组马的奔跑直线上的点集记为$L_{a,b,c}=\{(x,y)|ax+by=c,ab\neq 0\}$，定义$(LES_4^N)$中两条直线交点为

$$\begin{aligned}u_1&=L_{1,-1,-1}\bigcap L_{1,1,2},\quad u_2=L_{1,1,2}\bigcap L_{1,-1,2},\\ u_3&=L_{1,-1,2}\bigcap L_{1,1,-2},\quad u_4=L_{1,1,-2}\bigcap L_{1,-1,-2}\end{aligned}$$

和(LES_4^S)中四条直线的交点为v，则方程组(LES_4^N)和(LES_4^S)对应的组合解见图7.21，分别为一个标号4-圈图C_4^L和一个标号4阶完全图K_4^L。



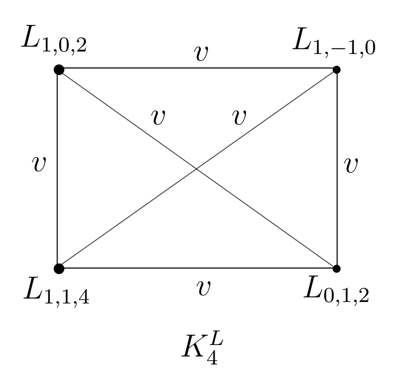


图7.21 方程(LES_4^N)和(LES_4^S)的组合解

4.2.非均匀系统组合特征. 系统方程(7.9)是一个代数方程组，对方程组的两端求微分，即有微分方程组

$$\begin{cases} \dot{\mathscr{F}}_{v_1}(\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})=0 \\ \dot{\mathscr{F}}_{v_2}(\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{\mathscr{F}}_{v_p}(\mathbf{x},\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}})=0 \end{cases} \tag{7.12}$$

简记为方程组(DES_p)。这里，既然代数方程组(7.9)的组合解存在，对应的微分方程组(7.12)的组合解就一定存在。这样，也可以用组合解对应的标号图G^L刻画非均匀系统(7.9)或(7.12)的性质，得到系统的组合特征。

（1）代数方程组. 代数方程组(7.9)中任意两个方程，如第i个方程与第j个方程解集的交为空集，即$S_{\mathscr{F}_i}\bigcap S_{\mathscr{F}_j}=\emptyset$的情形称为“平行方程”。由定义，这时一定有$\left(S_{\mathscr{F}_i},S_{\mathscr{F}_j}\right)\not\in E\left(G^L\right)$，即$G\not\simeq K_p$；反之，如果代数方程组(7.9)有解，则一定有$G\simeq K_p$。更进一步，可以对代数方程组(7.9)中的方程按“平行”分类，即纳入同一类的方程相互平行。假设最后的分类结果为$\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2,\cdots,\mathscr{C}_s$，$1\leq s\leq p$，则由非均匀系统(7.9)组合解$G^L$的定义，易知这时$G\simeq K_{n_1,n_2,\cdots,n_s}$，其中，$n_i=|\mathscr{C}_i|$且$n_1+n+2+\cdots+n_s=p$。

代数方程平行的情形可以由线性代数方程进一步形象化。对两个线性代数方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1$和$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2$，它们无交点或平行的条件是对应变量的系数成比例，满足

$$c=a_{j1}/a_{i1}=a_{j2}/a_{i2}=\cdots=a_{jn}/a_{in}\neq b_j/b_i, \tag{7.13}$$

即这两个线性代数方程矛盾。这样，如果线性代数方程组(7.9)矛盾无解，则其中一定存在两个线性代数方程，不失普遍性，假设为第i个和第j个方程的变量系数满足条件(7.13)。那么，是否可以用组合方法进一步刻画一个不可解的线性代数方程组(7.9)呢？答案是肯定的！欧阳博士告诉惠子，以$n=2$为例，可以进一步刻画不可解线性方程组的组合特征。这时，方程(7.9)为

$$AX=(b_1,b_2,\cdots,b_p)^T。 \tag{7.14}$$

这当中，

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} \end{bmatrix}, \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

且$p\geq 2$。这时，(7.14)中每个方程对应于欧氏平面$\mathbb{R}^2$上的一条直线，其组合解G^L对应于可平面图$K_{n_1,n_2,\cdots,n_s}$。这样，可以对不可解2-元方程组采用平面点集的交图G^L_{leq2}刻画，即方程(7.14)不可解当且仅当其组合解是一个阶数$|H|\geq 2$且每条边均为直线段的平面图H。这里，平面点集上的交图G^L_{leq2}定义如下：

$$V\left(G_{leq2}\right)=\left\{\left(x_1^{ij},x_2^{ij}\right)\middle|\,a_{i1}x_1^{ij}+a_{i2}x_2^{ij}=b_i,\ a_{j1}x_1^{ij}+a_{j2}x_2^{ij}=b_j,1\leq i,j\leq p\right\};$$

$$E\left(G_{leq2}\right)=\{(v_{ij},v_{il})|\,\text{平面点}\left(x_1^{ij},x_2^{ij}\right)\text{与}\left(x_1^{il},x_2^{il}\right)\text{间直线段上的点。}\}$$

这当中，顶点$v_{ij}=(x_1^{ij},x_2^{ij})$，$1\leq i,j\leq p$。例如，图7.22中给出了一个由5个基元组成的非均匀系统$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$及其对应平面图G_{leq2}^L。

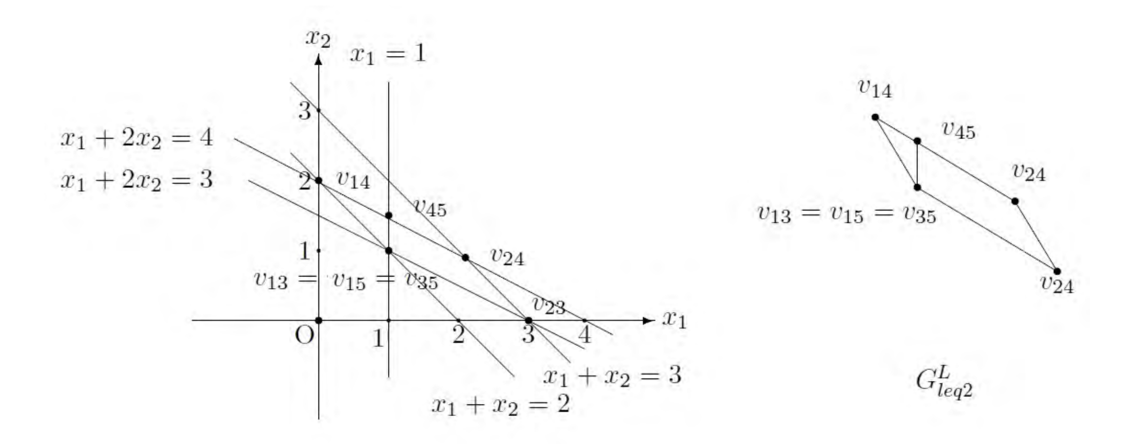


图7.22 2-元不可解方程平面图

这当中，每个基元$v_i,1\leq i\leq 5$遵从线性变化规律，即

$$v_1:\ x_1+x_2=2,\quad v_2:\ x_1+x_2=3,$$
$$v_3:\ x_1+2x_2=3,\quad v_4:\ x_1+2x_2=4,\quad v_5:\ x_1=1\text{。}$$

（2）微分方程组. 对任意整数p, $n\geq 1$，设

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathscr{F}_1(\mathbf{x}),\ \dot{\mathbf{x}}=\mathscr{F}_2(\mathbf{x}),\cdots,\dot{\mathbf{x}}=\mathscr{F}_p(\mathbf{x})\qquad (DES_p^1)$$

为一阶常微分方程组，$\mathscr{F}_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$连续且$\mathscr{F}_i(\overline{0})=\overline{0},1\leq i\leq p$。特别地，

$$\dot{\mathbf{x}}=A_1\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}}=A_2\mathbf{x},\ \cdots,\ \dot{\mathbf{x}}=A_p\mathbf{x}\qquad (LDES_p^1)$$

为一阶线性微分方程组，

$$\begin{cases}x^{(n)}+a_{11}^{[0]}x^{(n-1)}+\cdots+a_{1n}^{[0]}x=0\\ x^{(n)}+a_{21}^{[0]}x^{(n-1)}+\cdots+a_{2n}^{[0]}x=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x^{(n)}+a_{p1}^{[0]}x^{(n-1)}+\cdots+a_{pn}^{[0]}x=0\end{cases}\qquad (LDE_p^n)$$

为一个常系数n解微分方程组。这当中，

$$A_k=\begin{bmatrix} a_{11}^{[k]} & a_{12}^{[k]} & \cdots & a_{1n}^{[k]} \\ a_{21}^{[k]} & a_{22}^{[k]} & \cdots & a_{2n}^{[k]} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1}^{[k]} & a_{p2}^{[k]} & \cdots & a_{pn}^{[k]} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_p(t) \end{bmatrix}$$

且对任意整数$0\le k\le p,\ 1\le i,j\le n$，$a_{ij}^{[k]}$为一个实数。

根据第5章中的(5.49) – (5.50)式，方程(DES_p^1), $(LDES_p^1)$和(LDE_p^n)中的每个常微分方程均可解，为非均匀系统(7.12)的特殊情形，可以一般性地讨论它们的组合特征，即方程组(DES_p^1)、$(LDES_p^1)$和(LDE_p^n)均存在组合解$G^L\left(DES_p^1\right)$、$G^L\left(LDES_p^1\right)$和$G^L\left(LDE_p^n\right)$，记(DES_p^1)、$(LDES_p^1)$和(LDE_p^n)中第i个方程的解空间为S_i，且如果方程组(DES_p^1)、$(LDES_p^1)$ 或(LDE_p^n) 中的第i个与第j个方程解空间的交$S_i\bigcap S_j=\emptyset$，则称第i个方程与第j个方程平行。这时，类似于线性代数方程组按是否平行对微分方程组中的方程进行分类，确定方程组(DES_p^1)、$(LDES_p^1)$和(LDE_p^n)的组合解G^L中$G\simeq K_{n_1,n_2,\cdots,n_s}$。这里，$n_i=|\mathscr{C}_i|$且$n_1+n+2+\cdots+n_s=p$。唯一需要注意的是，这里的标号$L:v\to L(v)$和$L:(u,v)\to L(u,v)$不单是点集合，而且是线性空间，可用线性空间的生成基对图G的顶点和边标号简化，这样的标号图称为基图。

例如，当$p=6$时，方程组

$$\begin{cases} \ddot{x}-3\dot{x}+2x=0 & (1) \\ \ddot{x}-5\dot{x}+6x=0 & (2) \\ \ddot{x}-7\dot{x}+12x=0 & (3) \\ \ddot{x}-9\dot{x}+20x=0 & (4) \\ \ddot{x}-11\dot{x}+30x=0 & (5) \\ \ddot{x}-7\dot{x}+6x=0 & (6) \end{cases}$$

图7.23 线性微分方程组基图

中方程(1) – (6)的解空间生成基分别为

$$\{e^t,e^{2t}\},\{e^{2t},e^{3t}\},\{e^{3t},e^{4t}\},\{e^{4t},e^{5t}\},\{e^{5t},e^{6t}\},\{e^{6t},e^t\},$$

对应的组合解G^L见图7.23。

对两个组合解分别为$G_1^{L_1},G_2^{L_2}$的微分方程组$(LDES_m^1)$和$(LDES_m^1)'$（或是微分方程组(LDE_m^n)和$(LDE_m^n)'$），如果存在一个图同构$\varphi:G_1^L\to G_2^L$，即存在一个1−1映射$\varphi:G_1^{L_1}\to G_2^{L_2}$，使对$\forall x\in V(G_1)\bigcup E(G_1)$均有$\varphi L_1(x)=L_2\varphi(x)$，则称这两个微分方程组是组合等价的，记为$(LDES_m^1)\overset{\varphi}{\simeq}(LDES_m^1)'$(或$(LDE_m^n)\overset{\varphi}{\simeq}(LDE_m^n)'$)。注

意，组合等价的微分方程组所刻画的是同一个非均匀系统，并没有本质上的区别，仅是数学符号上的不同。

那么，怎样判定两个微分方程组是组合等价的呢？欧阳博士告诉惠子，首先需注意，两个线性空间同构当且仅当这两个线性空间的维数相同。这样，一个自然的想法是将组合解G^L中顶点和边上标定的线性空间简化为对应的线性空间维数，即引入正整数标号图G^I，$I: V(G)\bigcup E(G)\to\mathbb{Z}^+$，再由整数标号图的同构判定两个微分方程组组合等价。例如，图7.24中在图K_4-e顶点和边上标号的三个整数标号图$G_1^{I_\theta}, G_2^{I_\tau}$和$G_3^{I_\sigma}$，虽然都是在图$K_4-e$上进行标号，$G_1^{I_\theta}\simeq G_2^{I_\tau}$ 但$G_1^{I_\theta}\not\simeq G_3^{I_\sigma}$。

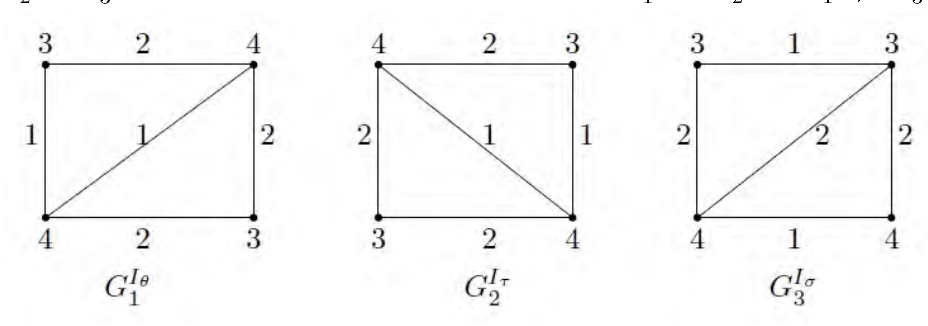


图7.24 整数标号图同构

这样，有判定微分方程组组合等价的一个准则，即：$(LDES_m^1)$和$(LDES_m^1)'$（或(LDE_m^n)和$(LDE_m^n)'$）组合等价当且仅当它们对应的整数标号图同构，即

$$G^{I_1}(LDES_m^1)\simeq G^{I_2}(LDES_m^1)' \text{ 或 } G^{I_1}(LDE_m^n)\simeq G^{I_2}(LDE_m^n)'。$$

4.3.非均匀系统几何. 对任意整数$1\le i\le p$，方程组(7.9)对应于第i个方程的解空间$S_{\mathscr{F}_i}$又称为解流形， 因为从几何上看， $S_{\mathscr{F}_i}$ 是一个n-维流形， 即解空间$S_{\mathscr{F}_i}$中的每个点v均存在一个邻域$U(v)$和一个同胚映射$\varphi: U(v)\leftrightarrow\mathbb{R}^n$。这里，$\varphi$称为同胚映射，指$\varphi$及其逆$\varphi^{-1}$均为连续映射。欧氏空间$\mathbb{R}^3$中一些简单的几何体，如球和环体均是3-维流形。同时，球和环的表面为2-维流形等，如图7.25所示。类似地，对任一整数$1\le i\le p$，方程(7.9)中每个方程的解空间$S_{\mathscr{F}_i}$是欧氏空间$\mathbb{R}^n$的子集，一个n-维流形。

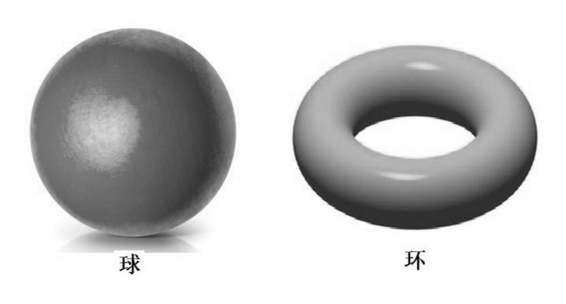


图7.25 球和环

那么，一个非均匀系统(7.9)的组合解G^L对应的是一个什么样的几何体呢？欧阳博士告诉惠子，很有趣，这里的组合解G^L对应的是方程组(7.9)中每个方程的解流形的组合，称为“组合流形”，即如果图G的顶点为$v_1, v_2, \cdots, v_p$，则顶点v_i对应的是非均匀系统(7.9)中第i个方程的解流形，边(v_i, v_j)对应的是解流形$S_{\mathscr{F}_i}$与$S_{\mathscr{F}_j}$的交集。这

里，整数$1 \leq i, j \leq p$。

对于一个给定的函数$\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，函数$\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$的图定义为

$$\Gamma[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n | \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})\}。 \tag{7.15}$$

例如，$m = 1, n = 1$时函数$y = x \sin \frac{1}{x}$，$m = 1, n = 2$时函数$z = x^2 - y^2$和$z = 2x \ln \frac{y}{x} - x(y-x) + 2x(1-y)$对应的图分别见图7.26中的图像$(a)$、$(b)$和$(c)$，其中$(a)$为曲线，$(b)$和$(c)$为曲面。

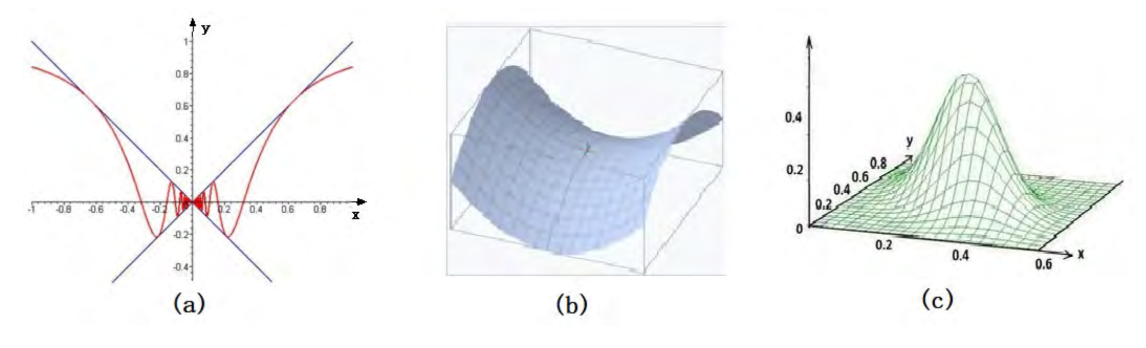


图7.26 函数图示例

一般地，对任意整数列$0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_p, p \geq 1$，一个组合流形$\widetilde{M}$定义为一个Hausdorff空间，其中任意两个不同点存在不相交的邻域且任一点$v \in \widetilde{M}$存在一个邻域U_v和同胚映射$\varphi_v: U_v \to \widetilde{\mathbb{R}}(n_1(p), \cdots, n_{s(v)}(v))$使得

$$\{n_1(v), \cdots, n_{s(v)}(v)\} \subseteq \{n_1, \cdots, n_p\}, \bigcup_{v \in \widetilde{M}} \{n_1(v), \cdots, n_{s(v)}(v)\} = \{n_1, \cdots, n_p\}。$$

特别地，一个组合流形$\widetilde{M}$如果仅由有限个流形组成，即$p < +\infty$且任一个流形均不是其他流行的子流形，则称为有限组合流形。图7.27 中给出了两个有限组合流形的示例。这里，B^1、T^2和M^3分别表示1-维环、2-维环面和3-维流形。

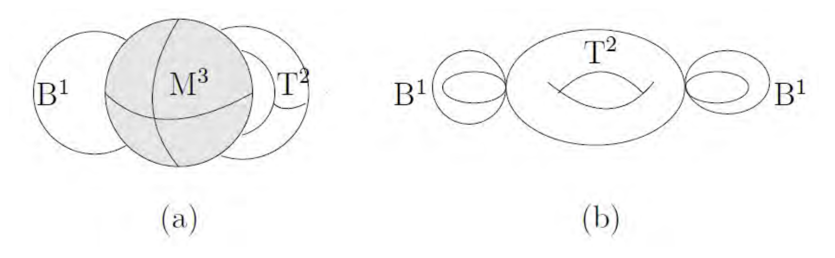


图7.27 有限组合流形示例

注意，在一个有限组合流形$\widetilde{M}$中内蕴一个自然的组合结构或图结构。假设一个

有限组合流形$\widetilde{M}=\bigcup\limits_{i=1}^{m}M_i,\ p<+\infty$，定义其自然内蕴的组合结构$G^L[\widetilde{M}]$为

$$V\left(G^L[\widetilde{M}]\right) = \{M_1,M_2,\cdots,M_m\},$$
$$E\left(G^L[\widetilde{M}]\right) = \left\{(M_i,M_j)\mid M_i\bigcap M_j\neq\emptyset, 1\leq i,j\leq n\right\},$$

以及对任意整数$1\leq i,j\leq m$，用流形对图中的顶点标号，用两个流形的交流形对边标号，即定义标号映射

$$L:\ M_i\to M_i,\quad L:\ (M_i,M_j)\to M_i\bigcap M_j,$$

则标号图$G^L[\widetilde{M}]$真实地反映了组合流形$\widetilde{M}$的组合特征。这样一来，非均匀系统(7.9)的组合解G^L对应的几何图正是组合流形$\widetilde{S}_{\mathscr{F}}$。这里，$\widetilde{S}_{\mathscr{F}}=\bigcup\limits_{i=1}^{p}S_{\mathscr{F}_i}$。类似地，欧阳博士告诉惠子，也可以由整数标号图$G^I$的同构分类对有限组合流形$\widetilde{M}$进行分类而不论系统方程是代数方程组(7.9)还是微分方程组(7.12)，因其对应的均是非均匀系统(7.9)的组合等价分类。

第5节 群系稳定

系统稳定性是解决系统S基元状态$\mathbf{x}_v, v\in S$测量误差问题，即系统在初值临近处的后续变化。对一个稳定系统，测量误差只要在一定的范围内，不影响人类把握系统的后续变化状态。这样，系统认知事物需要构建稳定系统。这当中有一个基本假设，欧阳博士告诉惠子，即无论系统方程是代数方程还是微分方程，基元状态变量在所有方程中的内涵与外延相同，即与时间t同步。这样一来，系统方程的解对应于系统基元状态。当然，这一假设对于非均匀系统不再成立，因为非均匀系统中存在重叠态，几个不同基元的状态可能在数学抽象中重叠，即状态变量$\mathbf{x}_v$的内涵与外延不一定在所有方程中一致或同步。这时，非均匀系统虽仍由基元组成，但系统状态类似于基元各自构成系统的一个群体系统，如图7.28所示由猫头鹰、蛇、食虫鸟、老鼠、兔子、食草昆虫和绿植构成的食物链，其稳定性不能采用经典数学中的方法刻画而应对食物链整体或群体稳定性进行分析。

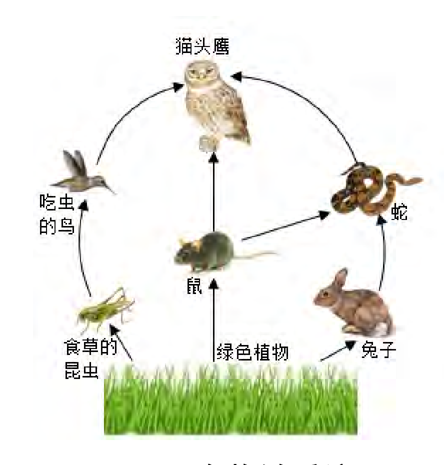


图7.28 食物链系统

那么，怎样确定一个非均匀系统的稳定性呢？欧阳博士这样问惠子，惠子回到说："对于一个非均匀系统，可以要求它的每个基元都稳定来实现系统稳定。"欧阳

博士肯定了她的回答说:"回答正确! 可如果系统中某一个基元不稳定，是否可以断定整个系统不稳定呢?"惠子回答说:"应该是吧，一个不稳定基元会导致整个系统不稳定!"欧阳博士继续问:"为什么一个不稳定的基元会导致整个系统不稳定呢?"惠子回答不上来。欧阳博士告诉惠子，对非均匀系统不能这样简单地由单个基元的稳定与否判定系统的稳定性。例如，在一个由基元v和u 构成的2-元系统中，假设在取初值$t=t_0$和$t=t_0'$时，基元v和u的状态变量$x_v(t),x_v'(t)$和$x_u(t),x_u'(t)$分别为

$$\begin{aligned} x_v(t) &= e^{2t}+3e^t, & x_v'(t) &= e^{2t}+2e^t, \\ x_u(t) &= e^{2t}-3e^t+\frac{t}{e^t}, & x_u'(t) &= e^{2t}-2e^t, \end{aligned}$$

则当$t\to\infty$时，有$|x_v(t)-x_v'(t)|=e^t\to\infty, |x_u(t)-x_u'(t)|=-e^t+\frac{t}{e^t}\to\infty$，均趋于无穷大，即基元$v$和$u$均不稳定，但$|(x_v(t)+x_u(t))-(x_u'(t)+x_u'(t))|=t/e^t\to 0$，即基元$u+v$或这个2- 元系统对外的输出呈现一种稳定态。这个例子说明，基元虽不稳定但对应的非均匀系统输出仍可能稳定，不能简单地套用基元的稳定性。

既然不能简单地套用基元的稳定性，那么，应当如何判定非均匀系统即群系的稳定性呢? 欧阳博士解释说，基元v状态$\mathbf{x}_v$的稳定性是衡量两个临近初值t_0,t_0'对应的状态$\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_v'$是否趋于一致，即它们间的距离$|\mathbf{x}_v-\mathbf{x}_v'|\to 0$。这种经典数学的思想是假设已知基元状态$\mathbf{x}_v$，即对应的状态方程可解。反之，如果对应的状态方程不可解或矛盾，在经典数学中认为无意义而不再讨论，进而缺乏对非均匀系统或矛盾系统(7.9)和(7.12)稳定性判准，一定程度上造成了系统认知万物的局限性。对此，一是需要拓广非均匀性系统的解为组合解，这个问题在上一节已经解决，即引入了非均匀系统的组合解且任意一个非均匀系统(7.9)和(7.12)均存在一个组合解G^L；二是对基元状态$\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_v'$间距离的拓广，定义两个组合解$G^{L_1}$ 与G^{L_2} 间的"距离"，即在G^L上定义一种度量$\omega: G^L\to\mathbb{R}^+$。这样，类似于基元稳定性，可以一般性地定义非均匀系统的ω-稳定性，即对任意给定的一个整数$\varepsilon>0$，一定存在数$\delta(\varepsilon)$，只要初值$\omega\left(G^L(t_0)-G^{L'}(t_0)\right)<\delta(\varepsilon)$，则一定有

$$\omega\left(G^L(t)-G^{L'}(t)\right)<\varepsilon \quad \text{或是 } \lim_{t\to\infty}\omega\left(G^L(t)-G^{L'}(t)\right)=0,$$

分别称为非均匀系统组合解G^L的ω-稳定性与ω-渐进稳定性。这里，

$$G^L(t)-G^{L'}(t)=G^{L-L'}(t)。 \tag{7.16}$$

对ω-度量的进一步具体化，即在基元度量基础上，简单引入非均匀系统组合解上的一个正定函数，即求和或求积判定一个非均匀系统(7.9)的和稳定或积稳定。

5.1.群系和稳定. 首先，讨论非均匀系统由线性微分方程组刻画的情形。这时，假设标号图$G^L[LDES_p^1]$和$G^L[LDE_p^n]$分别为齐次线性微分方程组$(LDES_p^1)$在初

值$\mathbf{x}_v(0)$, $v\in S$或是微分方程组(LDE_p^n)在初值$\mathbf{x}_v(0),\mathbf{x}'_v(0),\cdots,\mathbf{x}_v^{(n-1)}(0)$的组合解。这样，系统$(LDES_p^1)$或$(LDE_p^n)$称为是和稳定的或是渐进和稳定的，如果对任意给定的实数$\varepsilon>0$均存在实数$\delta_v, v\in S$，使得只要$|\mathbf{x}_v(0)-\mathbf{x}'_v(0)|<\delta_v$则一定有

$$\left|\sum_{v\in V(G)}\mathbf{x}_v(t)-\sum_{v\in V(G)}\mathbf{x}'_v(t)\right|<\varepsilon \text{ 或 } \lim_{t\to 0}\left|\sum_{v\in V(G)}\mathbf{x}_v(t)-\sum_{v\in V(G)}\mathbf{x}'_v(t)\right|=0。\quad (7.17)$$

这里，$\mathbf{x}_v(t),\mathbf{x}'_v(t)$分别表示基元$v, v\in S$在初值$\mathbf{x}_v(0)$或是微分方程组$(LDE_m^n)$ 在初值$\mathbf{x}_v(0),\mathbf{x}'_v(0),\cdots,\mathbf{x}_v^{(n-1)}(0)$时的状态函数。

注意，

$$\left|\sum_{v\in V(G)}h_v(t)\mathbf{x}_v(t)-\sum_{v\in V(G)}h_v(t)\mathbf{x}'_v(t)\right| \le \sum_{v\in V(G)}|h_v(t)|\,|\mathbf{x}_v(t)-\mathbf{x}'_v(t)|\,,$$

$$\lim_{t\to 0}\left|\sum_{v\in V(G)}h_v(t)\mathbf{x}_v(t)-\sum_{v\in V(G)}h_v(t)\mathbf{x}'_v(t)\right| \le \sum_{v\in V(G)}|h_v(t)|\lim_{t\to 0}|\mathbf{x}_v(t)-\mathbf{x}'_v(t)|。$$

这里，$h_v(t)$为一个有限多项式。根据这两个不等式易知，如果齐次线性微分方程组$(LDES_p^1)$在初值$\mathbf{x}_v(0)$, $v\in S$或是(LDE_p^n)在初值$\mathbf{x}_v(0),\mathbf{x}'_v(0),\cdots,\mathbf{x}_v^{(n-1)}(0)$中的每个方程在0点是稳定的或渐近稳定的，则组合解$G^L[LDES_p^1]$和$G^L[LDE_p^n]$在0点是和稳定的或渐近和稳定的。

对线性微分方程$(LDES_1^1)$和(LDE_1^n)，记其最大特征根$\gamma=\max\{\ \mathrm{Re}\lambda|\ |A-\lambda I_{n\times n}|=0\}$。由(5.49)和(5.50)式已知$\mathrm{Re}\gamma>0$时，方程组$(LDES_1^1)$和$(LDE_1^n)$在0点是不稳定的；$\mathrm{Re}\gamma<0$时，方程组$(LDES_1^1)$和$(LDE_1^n)$在0点是渐近稳定的；$\mathrm{Re}\gamma=0$时，方程组$(LDES_1^1)$和$(LDE_1^n)$在0点是稳定的当且仅当$m'(\lambda)=m(\lambda)$，这里，$m(\lambda)$为根$\lambda$的重数，$m'(\lambda)$表示$\lambda$对应的特征向量空间维数。这一结论应用于非均匀系统(7.12)，则有线性微分方程组$(LDES_p^1)$和(LDE_p^n)的组合解在0点是渐近和稳定的当且仅当任意一个顶点$v\in V(G)$在方程$(LDES_1^1)$中对应的解空间$\mathscr{B}_v$基$\overline{\beta}_v(t)e^{\alpha_v t}$中的$\mathrm{Re}\alpha_v<0$，或是在方程$(LDE_m^1)$中对应的解空间$\mathscr{C}_v$基$t^{l_v}e^{\lambda_v t}$中的$\mathrm{Re}\lambda_v<0$。

那么，为什么有这样的结论呢？欧阳博士解释说，由定义，条件的充分性是显然的。对于条件的必要性，假设存在一个顶点$v\in V(G)$使得$\mathrm{Re}\alpha_v\ge 0$或$\mathrm{Re}\lambda_v\ge 0$，则在$\overline{\beta}_v(t)\neq$常数时易知$\lim\limits_{t\to\infty}\overline{\beta}_v(t)e^{\alpha_v t}\to\infty$。同时，有$\lim\limits_{t\to\infty}t^{l_v}e^{\lambda_v t}\to\infty$，即方程组$(LDES_p^1)$和$(LDE_p^n)$ 在0点不稳定。

非线性矛盾微分方程组(7.12)的稳定性可由推广的李雅普诺夫判准判别，欧阳博士解释说。首先，对$\forall v\in V(G)$，一个点$\mathbf{x}_v^*\in\mathbb{R}^n$ 称为是(7.12)中基元v状态方程的平衡点，如果有$\mathscr{F}_v(\mathbf{x}_v^*,\mathbf{y}(\mathbf{x}_v^*),\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_v^*))=0$。一般地，记$\mathbf{x}^*=\sum\limits_{v\in V(G)}\mathbf{x}_v^*$，称为

平衡点和；其次，可以将线性系统系统$(LDES_p^1)$或(LDE_p^n) 的和稳定推广到非线性系统。一般地，称一个非线性系统(7.12)为和稳定或渐进和稳定的，如果对任意整数$\varepsilon > 0, v \in V(G)$存在一个实数$\delta_v > 0$，使得对应于初值$\mathbf{x}_v(0)$和$\mathbf{x}'_v(0)$的两个解$\mathbf{x}_v(t)$和$\mathbf{x}'_v(t)$，只要$|\mathbf{x}_v(0) - \mathbf{x}'_v(0)| < \delta_v$则有

$$\left|\sum_{v\in V(G)} \mathbf{x}_v(t) - \sum_{v\in V(G)} \mathbf{x}'_v(t)\right| < \varepsilon, \text{或} \lim_{t\to 0}\left|\sum_{v\in V(G)} \mathbf{x}_v(t) - \sum_{v\in V(G)} \mathbf{x}'_v(t)\right| = 0, \tag{7.18}$$

则称方程组(7.12)的组合解$G^L[DES_p]$是和稳定或渐近和稳定的。

那么，怎样定义方程组(7.12)组合解上的李雅普诺夫函数呢？欧阳博士解释说，假设$G^L[DES_p]$是微分方程组(7.12)的一个组合解，如果平衡点和$\mathbf{x}^*$一个开邻域$\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$上存在一个可微函数$L : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$满足：

(1) $L(\mathbf{x}^*) = 0$且如$\sum\limits_{v\in V(G)} \mathbf{x}_v(t) \neq \mathbf{x}^*$则$L\left(\sum\limits_{v\in V(G)} \mathbf{x}_v(t)\right) > 0$;

(2) 对任意的$\sum\limits_{v\in V(G)} \mathbf{x}_v(t) \neq \mathbf{x}^*$有$\dot{L}\left(\sum\limits_{v\in V(G)} \mathbf{x}_v(t)\right) \leq 0$，

则L称为非均匀系统(7.12)上的一个李雅普诺夫-和函数。

应用非均匀系统(7.12)上的李雅普诺夫-和函数，类似于一般非线性方程上的李雅普诺夫函数，可以得到非均匀系统(7.12)的组合解$G^L(DES_p)$在平衡点和$\mathbf{x}^*$的稳定性判准，即如果在平衡点和$\mathbf{x}^*$的邻域上存在一个李雅普诺夫-和函数$L : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$，则非均匀系统(7.12)的组合解$G^L(DES_p)$在平衡点和$\mathbf{x}^*$是和稳定的。更进一步，如果

$$\sum_{v\in V(G)} \mathbf{x}_v(t) \neq \mathbf{x}^* \ \Rightarrow \ \dot{L}\left(\sum_{v\in V(G)} \mathbf{x}_v(t)\right) < 0, \tag{7.19}$$

则非均匀系统(7.12)的组合解$G^L(DES_p)$在平衡点和$\mathbf{x}^*$是渐近和稳定的。

5.2.群系积稳定. 群系和稳定的实质是依基元状态$\mathbf{x}_v(t)$求和判定非均匀系统稳定性。类似地，群系积稳定应用基元状态$\mathbf{x}_v(t)$乘积判定非均匀系统稳定性。首先，对非均匀系统(7.12)由线性微分方程组刻画的情形，类似于群系和稳定，定义系统$(LDES_p^1)$或(LDE_p^n)是积稳定的或是渐进积稳定的，如果对任意给定的实数$\varepsilon > 0$均存在实数$\delta_v, v \in S$，使得只要$|\mathbf{x}_v(0) - \mathbf{x}'_v(0)| < \delta_v$ 则一定有

$$\left|\prod_{v\in V(G)} \mathbf{x}_v(t) - \prod_{v\in V(G)} \mathbf{x}'_v(t)\right| < \varepsilon \text{ 或 } \lim_{t\to 0}\left|\prod_{v\in V(G)} \mathbf{x}_v(t) - \prod_{v\in V(G)} \mathbf{x}'_v(t)\right| = 0。 \tag{7.20}$$

类似地，对线性不均匀系统(7.12)，有线性微分方程组$(LDES_p^1)$和(LDE_p^n)的组

合解在0点是渐近积稳定的，当且仅当任意一个顶点$v \in V(G)$ 在方程$(LDES_1^1)$中对应的解空间$\mathscr{B}_v$基$\overline{\beta}_v(t)e^{\alpha_v t}$满足$\sum\limits_{v \in V(G)} \mathrm{Re}\alpha_v < 0$，或是在方程$(LDE_m^1)$中对应的解空间$\mathscr{C}_v$基$t^{l_v}e^{\lambda_v t}$满足$\sum\limits_{v \in V(G)} \mathrm{Re}\lambda_v < 0$。

与非均匀系统(7.12)的和稳定不同，欧阳博士告诉惠子，这里的积稳定条件是

$$\sum_{v \in V(G)} \mathrm{Re}\alpha_v < 0 \text{ 或 } \sum_{v \in V(G)} \mathrm{Re}\lambda_v < 0。$$

这时，虽个别基元不稳定但系统仍可能是积稳定的。例如，图7.29中所示标号图为某一个非均匀系统$(LDES_m^1)$或(LDE_m^n)的组合解，

$$\begin{aligned} v_1 &= \{e^{-2t}, e^{-3t}, e^{3t}\},\ v_2 = \{e^{-3t}, e^{-4t}\}, \\ v_3 &= \{e^{-4t}, e^{-5t}, e^{3t}\},\ v_4 = \{e^{-5t}, e^{-6t}, e^{-8t}\}, \\ v_5 &= \{e^{t}, e^{-6t}\}, \qquad\quad v_6 = \{e^{t}, e^{-2t}, e^{-8t}\}。\end{aligned}$$

图7.29 积稳定系统

这当中，基元v_1, v_3, v_5, v_6不稳定但整个系统是积稳定的，即系统表象仍是一种稳定态势。

一般地，记$\mathbf{y}^* = \prod\limits_{v \in V(G)} \mathbf{x}_v^*$，称为非均匀系统(7.12)的平衡点积。则系统(7.12)称为是积稳定或渐进积稳定的，如果对任意整数$\varepsilon > 0, v \in V(G)$存在一个实数$\delta_v > 0$，使得对应于初值$\mathbf{y}_v(0)$和$\mathbf{y}'_v(0)$的两个解$\mathbf{y}_v(t)$ 和$\mathbf{y}'_v(t)$，只要$|\mathbf{y}_v(0) - \mathbf{y}'_v(0)| < \delta_v$则有

$$\left|\prod_{v \in V(G)} \mathbf{y}_v(t) - \prod_{v \in V(G)} \mathbf{y}'_v(t)\right| < \varepsilon, \text{ 或 } \lim_{t \to 0}\left|\prod_{v \in V(G)} \mathbf{y}_v(t) - \prod_{v \in V(G)} \mathbf{y}'_v(t)\right| = 0。\tag{7.21}$$

现在，假设$G^L[DES_p]$是非均匀系统(7.12)的一个组合解，如果平衡点积$\mathbf{y}^*$一个开邻域$\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$上存在一个可微函数$L : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$满足：

(1) $L(\mathbf{y}^*) = 0$且如$\prod\limits_{v \in V(G)} \mathbf{y}_v(t) \neq \mathbf{y}^*$则$L\left(\prod\limits_{v \in V(G)} \mathbf{y}_v(t)\right) > 0$;

(2) 对任意的$\prod\limits_{v \in V(G)} \mathbf{y}_v(t) \neq \mathbf{y}^*$有$\dot{L}\left(\prod\limits_{v \in V(G)} \mathbf{y}_v(t)\right) \leq 0$，

则L称为非均匀系统(7.12)上的一个李雅普诺夫-积函数。

应用非均匀系统(7.12)上的李雅普诺夫-积函数，可以得到非均匀系统(7.12)的组合解$G^L(DES_p)$在平衡点积$\mathbf{y}^*$的稳定性判准，即如果在平衡点积$\mathbf{y}^*$的邻域上存在一个李雅普诺夫-积函数$L : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$，则非均匀系统(7.12)的组合解$G^L(DES_p)$在平

衡点积$\mathbf{y}^*$是稳定的。更进一步，如果

$$\prod_{v\in V(G)}\mathbf{y}_v(t)\neq\mathbf{y}^*\ \Rightarrow\ \dot{L}\left(\prod_{v\in V(G)}\mathbf{y}_v(t)\right)<0, \tag{7.22}$$

则非均匀系统(7.12)的组合解$G^L(DES_p)$在平衡点积$\mathbf{y}^*$是渐近积稳定的。

听到这里，惠子问欧阳博士："爸爸，微分方程的可解性与稳定性不是已在经典数学中解决了么，为什么这里还要讨论群系统的和或积稳定性呢？"欧阳博士解释说，判定一个微分方程的解稳定还是不稳定前提是这个微分方程可解，适应于均匀系统，即系统基元遵循均匀一致的变化规律。一般地，在经典数学中不讨论矛盾方程组，认为这类方程组没有意义！这在一定程度上造成经典数学仅适应于刻画均匀系统而对非均匀系统束手无策。然而，当人们用方程(7.9)或(7.12)刻画一个非均匀系统状态时，得到的方程组大多是矛盾方程组，因为在这类方程中一个基元v的状态变量$\mathbf{x}_v(t)$在不同方程中的含义不一定一致。同时，人类认知万物需要刻画的，是系统整体而非单个基元的状态。这样，经典数学对矛盾方程组无解的结论不再有价值而需引入非均匀系统的组合解G^L刻画系统行为。

惠子点了点头后继续问："的确，引入矛盾方程组的组合解可以刻画非均匀系统状态。可是，非均匀系统的组合解G^L似乎不能直接用于刻画系统稳定性。"对惠子的疑问，欧阳博士进一步解释说，非均匀系统的组合解G^L是一个标号图，是在基元内蕴结构G上的一个标号图，可以反映所有基元的状态。然而，经典数学中并没有提供判定一个组合解G^L或基元状态集合稳定性的方法。在这种情形下，需要寻找或发现那些简单且可以刻画系统整体状态的度量映射$\omega: G^L\to\mathbb{R}^+$。这里的非均匀系统和稳定与积稳定正是在这种情形下引入的。当然，实现这一目标还有很多种方法。一般地，欧氏空间中的任何一种度量映射，如长度映射

$$\rho:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} \tag{7.23}$$

结合图G的结构或参数特征后都可以作为判定集合$\{\mathbf{x}_v, v\in S\}$，即一个非均匀系统组合解G^L的稳定性。这当中重要的，在于选择哪一种度量映射更符合系统状态的外在表象或状态，以便人类认知万物而不是在形式上增加认知的复杂性。

第6节 注释与评论

6.1. 矛盾是系统发展中的不同步或逻辑上的不一致表现，在人眼中普遍存在。在人类认知中，一方面是数学系统需遵从逻辑一致的原则，不能自相矛盾；另一方

面是事物间无处不在的矛盾，而数学系统的逻辑一致性导致数学刻画万物行为的局限性，包括形式逻辑的不完备性，如哥德尔不完备定理等。表现在人类认知上，是数学真实一定少于自然真实的范畴，如对薛定谔猫生死的刻画，不能简单地由数学断言猫的生死，见文献[Gri1]-[Gri2]和[Mao45]。这样，认知或理解自然需要化矛盾为和平，构建一种泛数学体系，这就是Smarandache否定公理与Smarandache几何、Smarandache重叠空间或系统，以及在重叠系统内蕴组合结构上构建的数学组合，见文献[Del]、[Sma1]-[Sma2]、[Sma4]、[SCF]、[VaS1]-[VaS2]、[Ise]、[KuA]、[Mao3]-[Mao6]、[Mao9]、[Mao13]-[Mao23]、[Mao53]和[Mao55]等。

6.2. Smarandache否定公理与经典数学中的公理不同，它在一个数学系统中可以同时成立、不成立，或是以两种以上的方式不成立。这样的数学公理历来为经典数学不屑于一顾，认为“*成立、不成立*”同时出现违反逻辑一致的原则，但它却是统一不同系统，甚至矛盾系统的有效方法。Smarandache否定公理是Smarandache几何、Smarandache重叠空间或系统的基础，最初仅是发现Smarandache平面几何或2-维流形，以及Smarandache 2-代数重叠系统，见文献[KuA]、[Ise]和[VaS1]-[VaS2]。我在[Mao10]-[Mao12]、[Mao23]中，应用组合思想一般性地构造了Smarandache n-维流形及几何。这当中的一个基本问题，类似于道家的“有”和“无”或是佛家的“色”与“空”，是*一个矛盾系统是否一定意味着自然不存在？*答案是否定的！因为大多矛盾是人为的形式矛盾而非自然真实，包括量子纠缠那一节中例举的幸运数字游戏，亦可见文献[GuG]。

6.3. 那么，*人们在遵从逻辑一致原则上应怎样构建满足Smarandace否定公理的数学系统呢？*完成组合几何与场论专著[Mao23]后，我根据事物运动的规律由方程刻画意识到Smarandache否定公理在数学上一种最直接的表现形式应是矛盾方程组，即由矛盾方程组刻画群体行为或是非均匀系统的组合行为，并完成第一篇关于不可解线性方程组的论文[Mao26]。2012年7月，Smarandache教授在广州工业大学访问，我这个月中有两天正好在广州出差，顺便访问了他，与他交流我对Smarandache否定公理与矛盾方程组关系的看法，并将论文[Mao26]的主要结论告诉他。他听后很惊讶，因为他从未意识到Smarandace否定公理在数学中可以这样表现并与对事物的认知建立联系。两人交流后，他于当晚给我发了一封电子邮件，称我“You're a great researcher”。在他的鼓励下，我陆续开展了不可解代数齐次方程组、不可解常微分方程组和不可解偏微分方程组的组合刻画[Mao27]-[Mao32]、[Mao35]等，由组合思想刻画经典数学中那些认为无意义的方程组，引发了国际上的共鸣。但完成[Mao26]-[Mao30]、[Mao35]后我曾有一个疑惑，“*为什么我刻画不可解方程组的论文在国内未引发关注？难道真的是墙内开花墙外香吗？*”2014 年元旦，我在北海公

园散步时终于想明白问题的答案，原因在于我的论文讨论的是矛盾方程组，这对于研究经典数学的人一般从内心上是不愿意接受的，因为在他们看来，数学系统应遵循逻辑一致的原则，不能包含矛盾。当然，这些人忽略了数学是在认知万物而非是一种符号游戏，一些矛盾方程组同样对应于事物本真的事实。对此，文献[Mao31]阐释了在组合思想下怎样将经典数学中的非数学系统转化为拓扑图上的数学以贡献于对自然的认知。

6.4. 非均匀系统对应的是一组矛盾方程，但每个方程均有解，即在经典数学意义不存在解。这类系统在自然界中大量存在，如生物种群、细胞系统、基因等自组织系统，见文献[BrC]、[LuW]和[Mur]。对于这样的系统，特别是系统稳定性等无法采用经典数学刻画，因为它们在经典数学意义下不可解但可以采用系统的组合解刻画，包括系统的和稳定与积稳定、渐进和稳定与渐进积稳定，以及其他群体稳定等，因为任何一个非均匀系统一定存在着组合解，这是不可解方程组的价值所在。在几何上，非均匀系统在空间$\mathbb{R}^n$中的表示正是[Mao10]、[Mao23]中定义的组合流形，体现了一种殊途同归的哲学理念。

6.5. 量子纠缠是与薛定谔的猫或量子坍缩密切相关的一种未知现象，因爱因斯坦称其为“*如幽灵一般可怕的远距效应*”，特别是爱因斯坦等人发表[EPR]论文后与波尔等人对物理实在的争论而让人关注。近年来，一些科学工作者对量子纠缠，如光子纠缠对的产生、保存及应用于保密通讯等开展了积极探索，获得不少令人称赞的结果，见文献[GuG]。实际上，如果将一个量子效应视为一个量子场，则量子纠缠对应的是两个空间或系统情形的Smarandache重叠空间或系统。这样，对量子纠缠的一般化必然得到Smarandache重叠空间或系统。而一般性地研究Smarandache重叠空间或系统的解纠缠，在理论上给出纠缠机制，阐释波姆等人[BoA]对量子纠缠隐变量解释中的“隐”字并应用于编码与解码就是一件十分有意义的工作，这是文献[Mao55]讨论Smarandache重叠空间或系统应用于编码和解纠缠的动因。



第 8 章

复杂网络

****

莫把幺弦拨，怨极弦能说，

天不老，情难绝；

心似双丝网，中有千千结，

夜过也，东窗未白凝残月。

— 北宋.张先《千秋岁-数声鶗鴂》

第1节 网络特征

网络是一种特殊的标号图G^L，是刻画系统基元作用关系的一种简化情形。这当中，标号映射$L:G\to\mathbb{R}$以对应于交通运输、电力输送、信息传递等实际网络。值得注意的是，人们采用系统认知一件事物得到的标号图G^L即，有的简单、一目了然，有的则复杂与变幻莫测，即G^L存在简单与复杂之别。例如，动物体细胞内蕴的网络结构远较其十大系统、组织构成的网络复杂。一般地，欧阳博士告诉惠子，人在宏观世界所见的各种网络均较之微观粒子构成的网络简单。简单的，人们可以对其变化行为认知和刻画；复杂的，则需要人们对其不断认知和探索，以期在一定条件下服务于人类社会。

那么，什么是复杂网络呢？欧阳博士告诉惠子，复杂网络中的"复杂"是相对于"结构简单"、"行为单纯"和"变化均匀"等而言的，主要表现在以下几个方面：①结构复杂，表现为节点数，如人体细胞大约有约$4\times10^{14}-6\times10^{14}$ 个，数目巨大且结构呈现出多种不同特征；②连接复杂，节点连接权重存在差异，可能存在方向性；③变化复杂，节点或连接的产生与消失带有一定随机性，网络结构频繁变化，演化大都不遵从线性变化规律，造成系统认知或刻画上的复杂等，如图8.1所示。

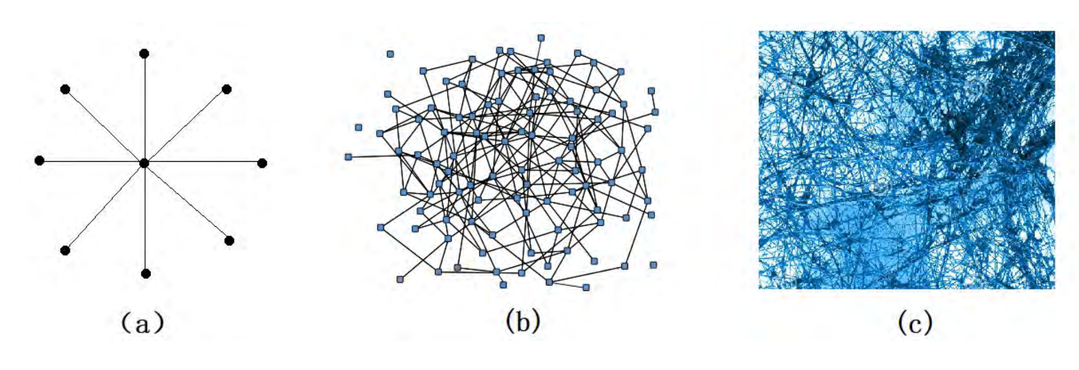


图8.1 网络

欧阳博士对惠子说："观察这三个网络你有什么直观感觉？"惠子看了一会儿后说："三个网络中，(a)的结构简单明了，是一个中心点与另外八个互不相连的点连接，像一朵绽放的花朵；(b)的节点数多，连接虽存在一定的复杂性但规律明显；(c)的节点和连接则太复杂，细部似乎看不大清楚。"欧阳博士肯定了她的观察后继续问："那你觉得这三个网络哪个或哪几个是复杂网络呢？"惠子回答说："(c)的细节都看不清，应是一个复杂网络；(a) 只有九个节点，结构关系明显，是一个简单网络；(b)介于(a)和(c)之间，节点数不少但人可以凭肉眼数出来，且连接结构较清晰，应该也

是一个简单网络!”欧阳博士告诉她，这三个网络在一定条件下都会成为复杂网络。其中，(a)是一个节点数为九的星型网络，节点连接清晰但节点与连接的随机变化会造成其即便是一个仅有九个节点的星型网络，变化也会呈现一种复杂的态势；网络(b)的节点、连接都不算复杂，与(a)类似，只要其节点、连接呈现变化的不确定性，即会使网络(b) 成为一个复杂网络；网络(c)的节点数巨大且连接复杂，是一种典型的复杂网络。同时，对网络(c)的细节看不清楚，需要在技术上对(c)的局部构造进行放大处，看清其局部的连接和构造，对其进行认知。实际上，复杂网络指的正是人类在某一时间尚不能准确把握其行为状态的网络，这就包括(c)的结构复杂与(a)或(b)的行为复杂两种情形。

这样，在理论上，人类虽然可以系统认知万物，但要真正实现刻画、把握万物几乎是一件不可能的事情，这也正是《道德经》中“名可名，非常名”一句蕴含的哲学思想。在这种情形下，类似于对图8.1中网络(c)的认知，人类只能是在局部认知基础上对一件事物进行组合认知，且需伴随人类技术上的进步不断加深或修正这种组合认知，是一个无限趋近事物真实的漫长过程。那么，在人类力所能及的范围内，对系统认知或是其对应的复杂网络可以提出哪些局部特征以刻画系统性质呢？欧阳博士解释说，一种自然的想法是刻画复杂网络表现出来的一些统计特征，即用数的统计性质刻画系统的表象。

1.1.随机分布. 一件确定性事件是因果关系中的“原因”明确，可以由发展过程唯一确定“结果”的事件。反之,“原因”不清楚或是过程不明确，一件事情可能发生也可能不发生则称为随机事件。例如，向空中抛掷一枚硬币，称为试验。如果有一台高速摄像机对硬币从抛出到落地过程连续拍摄，则可以清楚地知晓硬币落地后是正面向上还是反面向上，但如果没有摄像机对硬币落地过程进行观测，丢失了硬币落地前的一段变化过程，则正面向上或是方面向上都可能出现，就是一件近似的随机事件。人类在认知万物过程中，存在大量这种原因或过程不明确的随机事件，需要采用随机模型进行可能性分析。

一项重复进行的试验Ω中，每一种可能出现的结果称为样本点$\omega(\Omega)$，这样的样本点$\omega_1(\Omega), \omega_2(\Omega), \cdots, \omega_n(\Omega)$构成试验$\Omega$的样本空间，即

$$\Omega = \{\omega_1(\Omega), \omega_2(\Omega), \cdots, \omega_n(\Omega)\}。 \tag{8.1}$$

相应地，这样的试验称为随机试验。显然，如果$n = 1$即Ω只有一种结果，则(8.1)是一个确定性试验而非随机试验。这样，对随机试验而言(8.1)中一定有$n \geq 2$，欧阳博士告诉惠子。假设在n次试验Ω中，ω_k出现了μ_k次，这里$1 \leq k \leq n$，则称$F_n(\omega_k) = \mu_k/n$为事件ω_k在n次试验中出现的频率，满足：①非负性，即$0 \leq F_n(\omega_k) \leq 1$；②规范

性，$F_n(\Omega)=1$；③可加性，即对两个独立事件ω_i和ω_j，$\omega_i\bigcap\omega_j=\emptyset$，则$F_n\left(\omega_i\bigcup\omega_j\right)=F_n\left(\omega_i\right)+F_n\left(\omega_j\right)$。这里，$1\leq i,j\leq n$。

一般地，当$n\to\infty$时，$F_n(\omega_k)$称为事件ω_k的概率$P(\omega_k)$，即

$$P(\omega_k) \ = \ \lim_{n\to\infty}F_n(\omega_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_k}{n}。 \tag{8.2}$$

这样，由极限的性质概率$P(\omega_k)$也满足非负性、规范性和可加性。

人类认知的局限性表明，人类的认知结论仅是在一定条件下成立。类似地，欧阳博士解释说，在统计分析中需要讨论在一定条件下事件出现的可能性，这就是条件概率，即“在条件A已经发生”的条件下确定事件ω出现的概率，记为$P(\omega|A)$。这时，由乘法公式，即条件A和ω同时出现的概率

$$P(A\omega) \ = P(A)P(\omega|A) \ \ \Rightarrow \ \ P(\omega|A)=\frac{P(A\omega)}{P(A)}。 \tag{8.3}$$

例如，甲、乙两市为中国西南的两座城市，据气象资料记载，一年下雨天数中甲市占20%，两市同时下雨占16%，则“在甲市下雨条件下”乙市下雨的概率即是一种条件概率。由(8.3)式知其概率大小为$0.16/0.2=0.8=80\%$。

一般地，假设$(\Omega,\mathbb{R},P)$是一个三元组，其中，Ω为样本空间，$\mathbb{R}$为实数集，P表示概率。对一个定义在Ω上的实函数$\xi:\Omega\to\mathbb{R}$，如果对任一个实数x，$\{\omega:\ \xi(\omega)<x\}$是一个事件，则称$\xi(\omega)$为一个随机变量，以区别于通常的变量。一般地，设$\xi$是一个随机变量，则对任意实数$x$，$P(\xi<x)$有意义，定义$F_\xi(x)=P(\xi<x)$为随机变量$\xi$的分布函数，$-\infty<x<\infty$，则有两种分布函数如下：

离散随机模型. 一个随机变量ξ只有有限个或可列个值$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$时称为离散型随机变量，记为$P(\xi_i=x_i)=p_i,i\geq 1$，数列$\{p_i\}$称为$\xi$的分布列，即

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$P(\xi=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

这里，$p_i\geq 0,i\geq 1$且满足$\sum\limits_{i\geq 1}p_i=1$。

连续随机模型. 如果一个随机变量ξ的分布函数$F(x)$可以表示为一个非负可积函数$f(x)$的积分，即

$$F(x) \ = \ \int_{-\infty}^{x}f(t)dt, \quad -\infty<x<+\infty, \tag{8.4}$$

则称ξ为连续型随机变量，$f(x)$为ξ的密度函数。

由连续随机变量的定义和积分性质，易知

（1）密度函数$f(x)$满足：①非负性，即对任一变量x，$-\infty < x < +\infty$有$f(x) \geq 0$；②规范性，即$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$。。

（2）随机变量$\xi \in [a, b]$的概率为

$$P(a \leq \xi \leq b) \ = \ \int\limits_a^b f(t)dt。 \tag{8.5}$$

（3）连续型随机变量ξ取任意值a的概率为0，即$P(\xi = a) = 0$，因为$P(\xi = a) = F(a+0) - F(a)$而$F(x)$在点$a$连续。

一些常见的概率分布函数例举如下：

（1）**二项分布.** 二项分布是针对只有两个可能试验结果的情形，又称为贝努里试验，即事件A发生或者事件A不发生。假设事件A发生的概率为$p, q = 1 - p$，记n次独立重复的贝努里试验中事件A发生的次数为ξ。则随机变量ξ的分布为

$$P(\xi = i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i q^{n-i}, \ 1 \leq i \leq n。 \tag{8.6}$$

一般地，称(8.6)为贝努里二项分布，记为$B(n, p)$。

（2）**泊松分布.** 假设随机变量ξ的可能取值为$0, 1, 2, \cdots$，且

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \ e^{-\lambda}, \tag{8.7}$$

则称随机变量ξ服从参数为λ的泊松分布。由定义，易知$P(\xi = k) \geq 0$，且由指数函数e^x的展开式，有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \ e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

即泊松分布满足非负性和规范性要求，且在形式上与二项分布类似。一般地，假设一个随机变量ξ_n $(n = 1, 2, \cdots)$服从二项分布(8.6)，即$np_n = \lambda$为常数，$q_n = 1 - p_n$。则对任意整数$k \geq 1$有

$$P(\xi_n = i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p_n^i q_n^{n-i}, \ 1 \leq i \leq n,$$

且有

$$\lim_{n \to \infty} P(\xi_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \ e^{-\lambda}, \tag{8.8}$$

即贝努里二项分布$P(\xi=k)$是泊松分布$P(\xi_n=k)$在$n\to\infty$的极限。

（3）**均匀分布.** 均匀分布是在一个区间$[a,b]$内均匀投点，即所投点落在区间$[a,b]$中任一位置的可能性相同的概率分布。这时，概率分布函数

$$F(x)=P(\xi<x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b,\\ 1, & x\ge b,\end{cases} \tag{8.9}$$

密度函数

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b),\\ 0, & x\notin(a,b)。\end{cases} \tag{8.10}$$

（4）**指数分布.** 指数分布对应随机变量ξ的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{8.11}$$

且$\lambda>0$。这时，不难验证$f(x)\ge 0$且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=1,$$

满足规范性要求以及

$$P(a\le\xi\le b)=\lambda\int_{a}^{b}f(x)dx=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}。 \tag{8.12}$$

（5）**正态分布.** 正态分布又称为高斯分布，对应随机变量ξ的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty, \tag{8.13}$$

其中，$a,\sigma>0$为常数，相应的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt,\quad -\infty<x<+\infty, \tag{8.14}$$

称ξ服从参数为a,σ^2的正态分布，记为$\xi\sim N(a,\sigma^2)$，如图8.2所示。

特别的，当参数$a=0$，$\sigma=1$时，正态分布$N(a,\sigma^2)$称为标准正态分布，记为$N(0,1)$，是在对自然界、人类社会、心理和教育等大量表象研究中的一种常用的

统计模型。这时，密度函数$\varphi(x)$和分布函数$\Phi(x)$为

$$\varphi(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}},\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt。$$

这里，$-\infty < x < +\infty$。

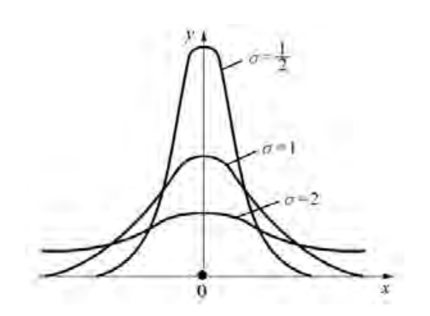


图8.2 正态分布

注意，上面泊松分布的一个重要性质是当$n \to \infty$时，有$P(\xi_n = k) \to P(\xi = k)$，即贝努里二项分布。这种性质的一般化，即对任一个随机变量序列$\{\xi_n\}\ (n = 1, 2, \cdots)$，若存在一个随机变量$\xi$使得对任意给定的一个正数$\varepsilon > 0$有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\right\} \ = \ 1, \tag{8.15}$$

则称随机变量序列$\{\xi_n\}$概率收敛于随机变量ξ，记为

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n \ \stackrel{P}{=} \ \xi \ 。 \tag{8.16}$$

对一个随机变量序列$\{\xi_n\}$和任意整数$n \geq 1$，设随即变量ξ_n的概率分布为$P(\xi_n = x_i) = p_i$，如果级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i$绝对收敛，记$E(\xi_n)$，称为随即变量$\xi_n$的数学期望。类似地，如果$E\left\{(\xi_n - E(\xi_n))^2\right\}$存在，记$D\left(\xi_n\right) = E\left\{(\xi_n - E(\xi_n))^2\right\}$，称为$D(\xi_n)$随机变量$\xi_n$的方差，$\sqrt{D(\xi_n)}$称为$\xi_n$的均方差。这时，定义$\overline{\xi}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$，即前$n$个随机变量的算术平均，如果有

$$\lim_{n\to\infty} \left(\overline{\xi}_n - E(\overline{\xi}_n)\right) \ \stackrel{P}{=} \ 0, \tag{8.17}$$

则称随机变量序列$\{\xi_n\}$服从大数定律。

大数定律是随机变量的一种重要性质，有很多种表现形式。例如，切比雪夫证明了任意n个随机变量，如果他们是相互独立的，数学期望和方差有限且相同，则当n充分大时，这n个随机变量的算术平均值几乎是一个常数，即

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} \ = \ 1。 \tag{8.18}$$

这里，μ为这些随机变量的数学期望值。注意，人类的随机试验只能进行有限次而得到频率。与此相对，概率是试验次数趋于无穷大时的极限情形。那么，“频率与概率是什么关系呢？”欧阳博士解释说，贝努里以严格的数学形式，证明了当n充分

大时，一个事件发生的频率与事件A的概率有较大差别的可能性很小，即对任意正数$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1, \tag{8.19}$$

泊松则证明了对任意正数$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right\} = 1。 \tag{8.20}$$

这当中，n_A, p分别是n次试验中事件A发生的次数和事件A在一次试验中发生的概率，p_i是事件A在第i次试验发生的概率。

正态分布是实践中最常见的一种分布，如同一种生物体的身长、体重，测量同一物体的误差，种子的重量等。一般地，假设$\{\xi_n\}$是一个相互独立的随机变量序列，且有有限的数学期望和方差，即对整数$i = 1, 2, \cdots$有$E(\xi_i) = \mu_i, D(\xi_i) = \sigma_i^2$，定义$B_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$，$Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mu_i)/B_n,\ n = 1, 2, \cdots$。如对任意$x \in (-\infty, +\infty)$均有

$$\lim_{n\to\infty} P\{Y_n \le x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{8.21}$$

则称随机变量序列$\{\xi_n\}$服从中心极限定理，记为$\{\xi_n\} \overset{L}{\sim} N(0,1)$。

那么，哪些随机变量服从中心极限定理呢？欧阳博士解释说，如果随机变量序列$\{\xi_n^{[1]}\}$服从贝努里二项分布$B(n,p)$定义序列$\{Y_n^{[1]}\}$或是对任意整数$i \ge 1$，如果随机变量$\xi_i^{[2]}$相互独立，服从同一分布且具有有限的数学期望和方差，即$E(\xi_i^{[2]}) = \mu, D(\xi_i^{[2]}) = \sigma^2 \ne 0$定义序列$\{Y_n^{[2]}\}$如下：

$$Y_n^{[1]} = \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{或} \quad Y_n^{[2]} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}, \tag{8.22}$$

则随机变量序列$\{Y_n^{[1]}\}$和$\{Y_n^{[2]}\}$均服从中心极限定理。

1.2.次数分布. 对任一个顶点$v \in V(G)$，图G中与v相邻的顶点集记为$N_G(v)$，称$\rho_G(v) = |N_G(v)|$为点v的次数或度数。由定义易知$\rho_G(v)$与G中与v相关联的边数相同。对G 中点的次数按大小排列得到$\rho_1 \ge \rho_2 \ge \cdots \ge \rho_{|G|}$，称为图$G$的次序列。

那么，在什么条件下一个非负的整数列是一个图的次序列呢？欧阳博士解释说，首先，人们知道一种图次序列的递推关系，即一个非负的整数列$\rho_1 \ge \rho_2 \ge \cdots \ge \rho_p$是一个图的次序列当且仅当整数序列$\rho_2 - 1, \rho_3 - 1, \cdots, \rho_{\rho_1+1} - 1, \rho_{\rho_1+2}, \cdots, \rho_p$是图的次序列。这里，$\rho_1 \ge 1$，$p \ge 2$；其次，有一个图次序列的一般判准，即一个非

负的整数列$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_p$是图的次序列当且仅当$\sum\limits_{i=1}^{p}\rho_i$ 是偶数，且对任意整数$n, 1 \leq n \leq p-1$有

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_i \leq n(n-1) + \sum_{i=n+1}^{p}\min\{n, \rho_i\}。 \tag{8.23}$$

一个给定的图G中的平均次$\langle\rho\rangle_G$和最大次$\Delta(G)$分别定义为

$$\langle\rho\rangle_G = \frac{\sum\limits_{v\in V(G)}\rho_G(v)}{|G|}, \quad \Delta(G) = \max\{\rho_G(v)|v \in V(G)\}。 \tag{8.24}$$

一个图G中次数最大的顶点称为G中的次中心点。一般地，一个顶点$v \in V(G)$的中心势$C_\rho(v)$定义为

$$C_\rho(v) = \frac{\rho_G(v)}{|G|-1}。 \tag{8.25}$$

对一个图G中顶点的中心势按大小排列得到的序列$C_\rho(v), v \in V(G)$称为图的中心势序列。例如，道路P_n的中心势序列为$1/n-1, 1/n-1, 2/n-2, \cdots, 2/n-1$，完全图$K_n$的中心势序列为$1, 1, \cdots, 1$等。

一个给定的标号图G的次分布$P(k)$定义为任选一个节点的次数恰好为k时的概率。例如，对k-正则图G有$P(k) = 1$和$i \neq k$时$P(i) = 0$。特别地，对一个完全图K_n有$P(n-1) = 1$而$i \neq n-1$时$P(i) = 0$。显然，对任一个图G有

$$\sum_{i=0}^{\infty}P(i) = \sum_{i=0}^{\Delta(G)}P(i) = 1 \tag{8.26}$$

和

$$\langle\rho\rangle_G = \frac{\sum\limits_{v\in V(G)}\rho_G(v)}{|G|} = \sum_{v\in V(G)}\frac{\rho_G(v)}{|G|} = \sum_{i=0}^{\Delta(G)}iP(i)。 \tag{8.27}$$

同时，在G中任选一个顶点的次数$\geq k$的概率显然为

$$P_k = \sum_{i=k}^{\Delta(G)}P(i), \tag{8.28}$$

且若存在常数$\sigma, \gamma > 0$使$P(k) \propto e^{-k/\sigma}$或$P(k) \propto k^{-\gamma}$，则

$$P_k = \sum_{i=k}^{\Delta(G)}e^{-i/\sigma} \propto e^{-k/\sigma} \quad 或 \quad P_k = \sum_{i=k}^{\Delta(G)}k^{-\gamma} \propto k^{-(\gamma-1)}。 \tag{8.29}$$

这里，$P_k \propto f(k)$表示存在一个常数$C>0$使$P_k = Cf(k)$。

一个图G中任选一条边$(u,v)\in E(G)$且$\rho_G(u)=k_1, \rho_G(v)=k_2$的概率称为联合概率，记为$P(k_1,k_2)$。这样，由概率的定义知

$$P(k_1,k_2) \ = \ \frac{|E_G(k_1,k_2)|}{|E(G)|}。 \tag{8.30}$$

这里，$E_G(k_1,k_2)$表示图G中一端点的次数为k_1，一端点的次数为k_2的边构成的集合。

孔子在《论语.述而》中“三人行，必有吾师焉。则其善者而从之，其不善者而改之”和Ramsey的断言“任意六个人聚会，一定有三个人互相认识或三个人互不相识”均表明,“三”是人群刻画中一个重要的量词。那么，怎样在人群关系网络G^L中刻画这种三人小群体或集群特征呢？欧阳博士解释说，这需要在图G中引入集群系数，即三角形K_3出现的频率。

对任一个顶点$v\in V(G)$，顶点v的集群系数和图G的集群系数分别为

$$N_3(v) \ = \ \frac{2|E\langle N_G(v)\rangle|}{\rho_G(v)(\rho_G(v)-1)}, \quad N_3(G) \ = \ \frac{1}{|G|}\sum_{v\in V(G)} N_3(v)。 \tag{8.31}$$

这里，$E\langle N_G(v)\rangle$表示顶点v的邻域$N_G(v)$在G中生成子图的边集。

例如，对任一整数$n\geq 3$，完全图K_n中任一个顶点v的次数为$n-1$，且任一个顶点邻域的生成子图为K_{n-1}。这样，图K_n中顶点v的集群系数为

$$N_3(v) = \frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)} \ = \ 1, \quad N_3(G) = n$$

而对一棵树$T, v\in V(T)$则有$N_3(G)=N_3(v)=0$，因为由定义，任意一棵树中不存在圈，当然也不存在K_3。这样看来，完全图刻画的是三人小群体最多的情形而一棵树刻画的则是不存在三人小群体的情形。

对任一个整数k，记$R_G(k)=\{v\in V(G)|\rho_G(v)>k\}$，即图$G$中次数大于$k$的顶点集合，称为富人集团。为度量富人集团的占比，定义

$$\Phi_G(k) \ = \ \frac{|E\langle R_G(k)\rangle|}{\left|E\left(K_{|R_G(k)|}\right)\right|} \ = \ \frac{2\,|E\langle R_G(k)\rangle|}{|R_G(k)|\,(|R_G(k)|-1)}, \tag{8.32}$$

称为图G的富人系数。这当中，$E\langle R_G(k)\rangle$表示富人集团$R_G(k)$在G中生成子图的边集，$K_{|R_G(k)|}$表示顶点数为$|R_G(k)|$的完全图。

例如，一条道路P_n中没有次数>2的顶点，次数为2的顶点数为$n-2$，其生成子图为一条子路P_{n-2}。这样，当$n\geq 3, k\geq 2$时有$\Phi_{P_n}(k)=0$；当$n\geq 3, k=1$时有

$$\Phi_{P_n}(1) = \frac{2\,|E\langle R_G(k)\rangle|}{|R_G(k)|\,(|R_G(k)|-1)} = \frac{2(n-3)}{(n-2)(n-3)} = \frac{2}{n-2}\ 。$$

1.3.距离分布. 给定一个图G和$u,v\in V(G)$，顶点u,v在G中的距离指的是G中连接u,v最短道路的长度$d_G(u,v)$，即

$$d_G(u,v)=\min\{\ |P|-1\mid P\in\mathcal{P}_G(u,v)\ \}。\tag{8.33}$$

这里，$\mathcal{P}_G(u,v)$表示图G中顶点u,v之间的道路构成的集合。类似地，顶点u,v在G^L中的距离定义为

$$d_G^L(u,v)\ =\ \min\sum_{P\in\mathcal{P}_G(u,v)}\sum_{(v_1,v_2)\in E(P)}L(v_1,v_2)。\tag{8.34}$$

对任一条边$(v_1,v_2)\in E(P)$，在(8.34)式中如均有$L(v_1,v_2)=1$则(8.34)式退化为(8.33)的情形。一个连通图G 中的平均距离$\langle d\rangle_G$定义为

$$\langle d\rangle_G\ =\ \frac{1}{|G|(|G|-1)}\sum_{u,v\in V(G)}d_G(u,v)。\tag{8.35}$$

一个图中的平均距离大，说明图上一个顶点到另一个顶点需要的步数多。类似地，图G的平均效率以顶点间距离为基础，刻画图上通行的难易程度，定义为

$$\langle e\rangle_G\ =\ \frac{1}{|G|(|G|-1)}\sum_{u,v\in V(G)}\frac{1}{d_G(u,v)},\tag{8.36}$$

即图G中任意两个顶点间距离的倒数和的平均值。

应用(8.34)，将(8.35)和(8.36)式中的$d_G(u,v)$替换为$d_G^L(u,v)$，可以类似地引入标号图或网络G^L上的平均距离、平均效率等概念指标。

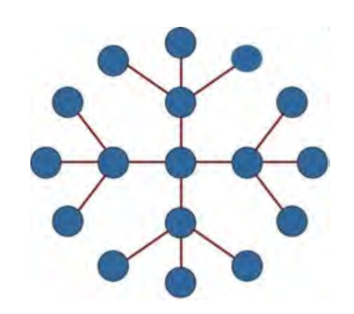


图8.3 网络中心

分析一个连通图或网络的中心可以对一个顶点处在网络中的地位进行刻画，势中心(8.25)是以一个顶点的次刻画其地位。类似地，距离同样可以刻画一个顶点位于网络中的地位，且与实际网络更贴切，方法如下：

第1种. 紧密中心，即中心点是到其他顶点紧密度和最小的顶点。对应的，一个点$v\in V(G)$的紧密度分布为

$$C_B^1(v)=\frac{|G|-1}{\sum\limits_{u\in V(G)}d(v,u)}。\tag{8.37}$$

第2种. 介数中心，即中心点是到其他顶点介数和最大的顶点。对应的，一个点$v\in V(G)$的介数分布为

$$C_B^2(v)=\frac{2\sum\limits_{u,w\in V(G)}|\mathcal{P}(u,w)(v)}{(|G|-1)(|G|-2)|\mathcal{P}(u,w)|}。\tag{8.38}$$

这里，$\mathcal{P}(u,w)$表示顶点$u,w \in V(G)$间的最短道路集，$\mathcal{P}(u,w)(v)$表示顶点$u,w \in V(G)$间经过顶点v的最短道路集。

第3种. 流介中心，即中心点是到其他顶点流介度和最大的顶点。对应的，一个点$v \in V(G)$的流介度为

$$C_B^3(v) = \sum_{u,w \in V(G)} \frac{|\mathcal{P}'(u,w)(v)}{|\mathcal{P}(u,w)|}。 \tag{8.39}$$

这当中，$\mathcal{P}'(u,w)$表示顶点$u,w \in V(G)$间的道路集，$\mathcal{P}'(u,w)(v)$表示顶点$u,w \in V(G)$间经过顶点v的道路集。

注意，(8.25)式定义的势中心和上面三种中心都表明顶点在一个图中的重要程度，或是在实际网络中一个顶点对其他顶点的影响程度。那么，怎样比较图与图间的中心呢？欧阳博士解释说，比较图与图之间的中心化程度需要引入一个图的中心化度$C_A(G)$，定义为

$$C_A(G) = \frac{\sum\limits_{v \in V(G)} (C_A^* - C_A(v))}{(|G|-1)\max(C_A^* - C_A(v))}。 \tag{8.40}$$

这里，$C_A^* = \max C_A(x)$为中心次最大顶点的中心次值。这时，如果图中的每个顶点的中心次均相同，则由(8.38)式有$C_A(G) = 0$，称为无中心的。例如，采用(8.25)次中心衡量一个图的中心化度，则一个r-正则图$G, v \in V(G)$的次中心为$C_\rho(v) = r/(|G|-1)$，即r-正则图$C_A(G) = 0$。

第2节 随机网络

一个抽象图G是顶点集$V(G)$上的二元关系$E(G) \subset V(G) \times V(G)$的表现，类似于整数集$\mathbb{Z}^+$中的“1就是1，2就是2”，处在一种始终不变状态。那么，怎样在抽象图基础上引入并刻画变化中的图状态呢？欧阳博士告诉惠子，图状态变化中一种简单情形，是两个顶点u和v间的连接状态发生随机变化，如$(u,v) \in E(G)$按照一定的概率变化为$(u,v) \in E(G)$或是$(u,v) \notin E(G)$这样两种可能结果。对应地，有两种常用的随机模型刻画图的这种变化。一种是把所有n阶m条边的图构成的集合$\Phi(n,m)$看作一个概率空间，每个图有相同的概率p，由Gilbert于1959年提出。这里，

$$p = 1 \Bigg/ \binom{N}{m}, \quad N = \binom{n}{2} = n(n-1)/2;$$

另一种是以相同的概率p确定两个顶点对之间的连边，刻画n阶m条边图的生成过程，类似于贝努里试验中事件A发生的概率为p，不发生的概率为$q = 1-p$，直至生成一

个n阶m条边的图，形成集合$\mathscr{G}(n,m)=\mathscr{G}(n,P(\text{edge})=p)$，后人称为ER随机网络，由Eröds和Rényi俩人于1960年提出，即下面的随机图模型。这两种随机图模型仅是引入概率的视角不同，实质上是一致的。

随机图模型. 对任意给定的整数$n\geq 1$，$m\leq |E(K_n)|=n(n-1)/2$，生成图$\mathscr{G}(n,m)$的过程如下：

第1步. 任意选择m个独立顶点；

第2步. 在这m个顶点中，一步一步地选择顶点对且每个顶点对仅选择一次，以概率$p\in(0,1)$在选定的顶点间连边。这里，$p=2m/n(n-1)$；

第3步. 重复进行上面第2步，直到产生一个m条边的图$\mathscr{G}(n,m)$，程序终止。

欧阳博士让惠子思考随机图模型生成的图$\mathscr{G}(n,m)$与一个n阶m条边抽象图的区别在哪里。惠子想了一会儿，有点不确定地说："一个n阶m 条边抽象图是确定的，但随机图模型$\mathscr{G}(n,m)$中的m条边好像是不确定的，可能有也可能没有。"欧阳博士提示她说："这个问题可以换一个问法，就是随机图模型只能生成的一个图吗？"惠子这时明白了欧阳博士的问题，回答说："当然，按随机图模型生成的n阶m条边图只能有一个！"欧阳博士继续问："那么，怎样在随机图模型构造中体现连边时的概率p呢？"欧阳博士这样一问，惠子对$\mathscr{G}(n,m)$又有些含混了，回答说："是呀，爸爸！随机图模型中两个顶点u和v之间可能存在、也可能不存在边，而不是我理解的一定存在或是一定不存在一条边。那又应怎样理解程序中的概率p呢？"欧阳博士告诉惠子，之所以她不理解随机图模型中的概率p在选定的一对顶点u和v的作用，原因在于她把概率p理解成1或0，即u和v间一定存在或是不存在一条边了，把$\mathscr{G}(n,m)$理解成一个具体的n阶m条边抽象图了。

听到这里，惠子仍有些不解地问欧阳博士说："不对呀，爸爸！难不成随机图模型生成的不是一个n阶m条边的图而是别的什么，程序终止条件不正是在n个顶点上产生了一个m条边的图吗？"欧阳博士解释说："正确！随机图模型终止条件的确是在n个顶点上产生了一个m条边的图，但在一对顶点u和v间按概率p连接的条件下，连接或不连接都需要按第3步终止条件生成一个n阶m条边图。这样一来，最后产生的不是一个而是多个n阶m条边图，$\mathscr{G}(n,m)$ 是一个n阶m条边图的集合。"这时，惠子似乎有点领悟了概率p在生成$\mathscr{G}(n,m)$中的作用，自语说："哦，$\mathscr{G}(n,m)$原来不是一个具体的图而是一个n阶m条边的图集！可这样一来，又怎样体现每条边出现的概率是p而非其他值呢？"欧阳博士解释说，这时，顶点对u和v一共有$n(n-1)/2$ 种选择方法，$\mathscr{G}(n,m)$中的有$pn(n-1)/2$条边，即m条边。反之，任一个n阶m条边的图都可以在$n(n-1)/2$个顶点对中一条边一条边的按概率$p=2m/n(n-1)$生成，因

为p满足$0 < p \le 1$，应用乘法原则有

$$\sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{i} p^i(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-i} = (p+1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}} = 1, \quad (8.41)$$

即满足规范性要求。这样，$\mathscr{G}(n,m)$中共有

$$|\mathscr{G}(n,m)| = \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{m} = \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{pn(n-1)}{2}} \quad (8.42)$$

个n阶$pn(n-1)/2$条边的图。例如，$n=3, m=2$时$p=1/3$，$\mathscr{G}(3,2)$中包含的3个3个顶点2条边的图见图8.4，这3个图相互间同构。

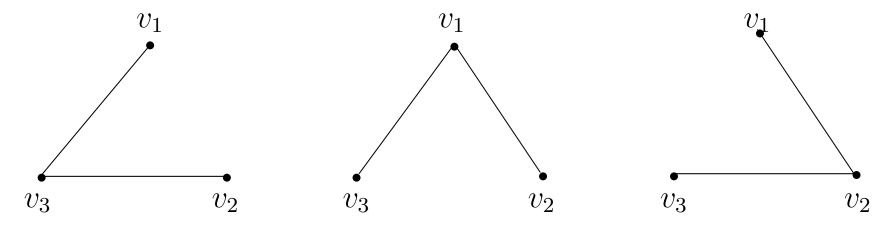


图8.4 图$\mathscr{G}(3,2)$

一般地，$3 \le n \le 10$且$m=2$时，$\mathscr{G}(n,2)$中包含的图的数目见表8.1。

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$\|\mathscr{G}(n,2)\|$	3	15	45	105	210	378	630	990

表8.1 $\mathscr{G}(n,2)$中图的数目

2.1.$\mathscr{G}(n,m)$特征分布. 随机图的平均次$\langle\rho\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}$、平均距离$\langle d\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}$和集群系数$N_3(v)$可以由随机图的定义计算而得。首先，由定义随机图$\mathscr{G}(n,m)$中的任一个顶点$v$都以概率$p$与其他$n-1$个顶点相邻。这样一来，当$n$充分大或$n\to\infty$时，平均次

$$\langle\rho\rangle_{\mathscr{G}(n,m)} = p(n-1) \approx pn。 \quad (8.43)$$

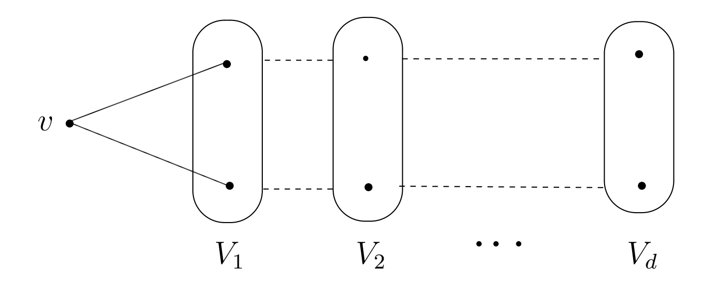


图8.5 顶点距离划分

其次，对任一个图$G, v\in V(G)$，可以按一个顶点与v的距离对点集$V(G)\backslash\{v\}$中的顶点分类为$V_1, V_2, \cdots, V_d$，即V_1中的顶点与v相邻，V_2中的顶点与v的距离为2且一般地，V_d中的顶点与v距离为d，如图8.5所示。这样，由随机图定义，$\mathscr{G}(n,m)$中一个顶点v平均与$\langle\rho\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}$个顶点相邻，与$\langle\rho\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}\langle\rho\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}=\langle\rho\rangle^2_{\mathscr{G}(n,m)}$个顶点距离为2，与$\langle\rho\rangle^2_{\mathscr{G}(n,m)}\times\langle\rho\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}=\langle\rho\rangle^3_{\mathscr{G}(n,m)}$个顶点距离为3等，且一般地，顶点$v$平均与$\langle\rho\rangle^{d-1}_{\mathscr{G}(n,m)}\langle\rho\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}=\langle\rho\rangle^d_{\mathscr{G}(n,m)}$个顶点距离为$d$。此外，由定义$\mathscr{G}(n,m)$中任意两个顶点间距离的平均值为$\langle d\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}$，即$v$平均经过$\langle d\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}$步可以到达$\mathscr{G}(n,m)$中任一个顶点。这样，有

$$n\propto\langle\rho\rangle^{\langle d\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}}_{\mathscr{G}(n,m)}\quad\Rightarrow\quad\langle d\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}\propto\frac{\ln n}{\ln\langle\rho\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}}。\tag{8.44}$$

第三，关于随机图的集群系数，在随机图$\mathscr{G}(n,m)$中任选一个顶点v，在剩下的顶点中有$\begin{pmatrix} n-1\\ 2\end{pmatrix}$种方法选择顶点以概率$p$与$v$相邻，且两个选择顶点相邻的概率为$p$，有$p^2\times p\times\begin{pmatrix} n-1\\ 2\end{pmatrix}$个三角形。这样，由定义随机图$\mathscr{G}(n,m)$中顶点$v$的集群系数

$$N_3(v)=p^2\times p\times\begin{pmatrix} n-1\\ 2\end{pmatrix}\Big/ p^2\times\begin{pmatrix} n-1\\ 2\end{pmatrix}\ =\ p\ \propto\ \frac{\langle\rho\rangle_{\mathscr{G}(n,m)}}{n}。\tag{8.45}$$

第四，随机图$\mathscr{G}(n,m)$的顶点次遵从泊松分布。欧阳博士解释说，由顶点次分布的定义，$P(k)$是在$\mathscr{G}(n,m)$中任选一个顶点v的次为k 的概率，有$\begin{pmatrix} n-1\\ k\end{pmatrix}$种方法在$v$之外的$n-1$点中以概率$p$选择与$v$相邻的$k$个顶点，剩下的$n-1-k$个顶点以概率$1-p$ 不与v相邻。这样一来，$\mathscr{G}(n,m)$中任选一个顶点v恰与k个顶点相邻的概率为

$$\begin{aligned} P(k|n) &= \begin{pmatrix} n-1\\ k\end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-1-k}\\ &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\left(\frac{\mu}{n-1}\right)^k\left(1-\frac{\mu}{n-1}\right)^{n-1-k}。\end{aligned}\tag{8.46}$$

这里，由(8.43)式知$\mu=p(n-1)$。让$n\to\infty$，则有

$$\begin{aligned} P(k) &= \lim_{n\to\infty}P(k|n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-k)}{(n-1)^k}\frac{\mu^k}{k!}\\ &\quad\times\left(1-\frac{\mu}{n-1}\right)^{n-1}\left(1-\frac{\mu}{n-1}\right)^{-k}=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu},\end{aligned}\tag{8.47}$$

即随机图$\mathscr{G}(n,m)$的顶点次$P(k)$遵从泊松分布。

2.2.几乎所有性质. 给定一个图性质$\mathscr{P}$，$G\in\mathscr{P}$表示图G具有性质$\mathscr{P}$，对随机图$\mathscr{G}(n,m)$，如果有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(G\in\mathscr{G}(n,m):G\in\mathscr{P}\right) \ = \ 1, \tag{8.48}$$

即$\mathscr{G}(n,m)$中图具有性质$\mathscr{P}$的概率趋于1，则称$\mathscr{G}(n,m)$几乎每个图都有性质$\mathscr{P}$。

例如，假设k,h且$h<k$是两个给定的自然数，$0<p<1,q=1-p$，则$\mathscr{G}(n,m)$中几乎每个图都满足：对k个顶点的序列$v_1,v_2,\cdots,v_k$，一定存在一个顶点v使得$1\leq i\leq h$时$vv_i\in E(G)$而$h+1\leq i\leq k$时$vv_i\notin E(G)$，因为$v\in V(G)\setminus\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$满足所要求性质的概率为$p^hq^{k-h}$。这样，在$V(G)\setminus\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$中不存在满足要求性质的顶点的概率为$\left(1-p^hq^{k-h}\right)^{n-k}$。注意，序列$v_1,v_2,\cdots,v_k$在$n$个顶点中共有$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$种选择方法，而$n\to\infty$时$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\left(1-p^hq^{k-h}\right)^{n-k}\to 0$。这样，由定义即$\mathscr{G}(n,m)$中几乎每个图中都有这样的顶点$v$。类似地，还有对一个给定的整数$k$，几乎每个图都是$k$-连通的，以及几乎每个图的直径都为2等结论。

Eröds和Rényi在1960年发现，随机图的一个重要性质在于随着$n\to\infty$，大多数图性质$\mathscr{P}$随着概率$p\to 1$是突然涌现的，即几乎每个图均有图性质$\mathscr{P}$或是都不具有图性质$\mathscr{P}$。例如，对图的连通性存在一个阈值p_c使得概率$p\leq p_c$时，随机图$\mathscr{G}(n,m)$中图连通的可能性等于0，但一旦$p>p_c$则图连通的可能性会突然变为1。在此基础上，Pösa于1976年进一步证明，设$p=c\ln n/n$，则对$\mathscr{G}(n,m)$ 中的任意两个顶点u,v，当$c>3$ 时随机图$\mathscr{G}(n,m)$中几乎每个图都包含一条$u-v$的道路P_n。更进一步，如果$c>9$则随机图$\mathscr{G}(n,m)$中几乎每个图中任意两个顶点间均存在一条道路P_n。

2.3.WS小世界网络. 小世界网络是在规则网络基础上固定边的一个端点，对其另一端以一定的概率与其他顶点相邻得到的一种随机网络。那么，什么是规则网络呢？欧阳博士告诉惠子，规则网络具有较强的对称性，是有n个顶点且每个顶点均与最邻近的k个顶点相邻的正则图$N(n,k)$，见图8.6。这里，$n=10,k=4$。

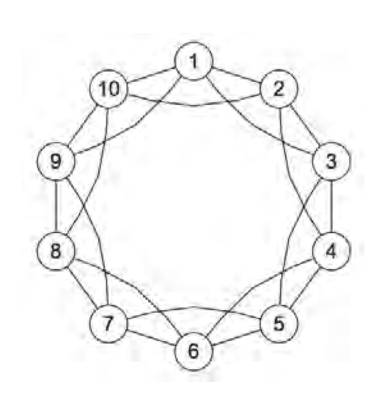


图8.6 规则网络$N(10,4)$

由定义可知，规则网络的度分布$P(k)=\delta_{ik}$，即$i=k$时$P(i)=1$；$i\neq k$时$P(i)=0$。平均次$\langle\rho\rangle_G=k$。

规则网络的最大距离$d_{\max}=\frac{n/2}{k/2}=n/k$，平均距离$\langle d\rangle_G=d_{\max}/2=n/2k\propto n, n\to\infty$。WS小世界网络由D.J.Watts和S.H.Strogatz于1998年在规则网络基础上引入断边与边的重连运算而得到的网络，构造程序如下：

第1步. 给定一个规则网络$N(n,k)$，$k>0$且每个顶点与它两边的k个顶点相邻；

第2步. 对$N(n,k)$中的任一邻接的顶点对$\{u,v\}$，保持u或v中的一个顶点不动，如顶点u不动，以概率p去掉边(u,v)且在$N(n,k)$中随机选择一个顶点相邻。

第3步. 对$N(n,k)$中的每一条边进行第2步运算，直到每条边都施以了去边、连边运算，得到WS小世界网络$\mathscr{N}(n,k)$时终止。

规则网络是一个抽象图，WS小世界网络是一个图集，具有的统计性质如下：

（1）**集群系数.** 如果$p=0$则$\mathscr{N}(n,k)$退化为规则网络$N(n,k)$，任一顶点v的次为$2k$。这时，由定义知顶点v的邻接点是排在v两边顺次相邻的k个顶点，设v的邻域为$\left\{v_k^-,\cdots,v_1^-,v_1^+,\cdots,v_k^+\right\}$，如图8.6中所示的顶点分布。这时，该邻域去掉与$v$相邻边后的所剩边数为$(2k-2)+(2k-3)+\cdots+(k-1)=3k(k-1)/2$。这样，顶点$v$的集群系数为$N_3(v)=3(k-1)/2(2k-1)$。当$p>0$时，如果概率$p=1$则与顶点$v$构成的三角形仍是一个三角形。否则，将以概率$p$与$v$断边，仍构成一个三角形的概率为$(1-p)^3$。故此，对任一顶点$v\in V(\mathscr{W}(n,k))$的集群系数

$$N_3(v)=\frac{3(k-1)}{2(2k-1)}(1-p)^3。\tag{8.49}$$

（2）**平均距离.** WS小世界网络的平均距离为

$$\langle d\rangle_G=\frac{2n}{k}f\left(\frac{2np}{k}\right)。\tag{8.50}$$

这当中，函数$f(x)$为

$$f(x)=\begin{cases} c & x\ll 1,\\ \dfrac{\ln x}{x} & x\gg 1,\end{cases}$$

如取$c=1/4$等。

（3）**次分布.** WS小世界网络的次分布为

$$P(i)=\sum_{s=0}^{\min\{i-k,k\}}\binom{k}{s}(1-p)^s p^{k-s}\frac{(kp)^{i-k-s}}{(i-k-s)!}e^{-kp}\quad(i\geq k)\tag{8.51}$$

而如果$i<k$则有$P(i)=0$。

欧阳博士告诉惠子，系统认知基于人类对系统基元状态的把握，进而知晓基元相互间作用关系和系统状态。同时，人类对一件事物的系统认知是循序渐进的。规

则网络刻画的，是基元间作用关系始终不变的情形，对应于对事物的初始认知；随机网络刻画的，是基元间作用关系完全随机的情形。这是在发现事物基元存在随机变化后，假设基元间是随机作用的情形；而WS小世界网络介于规则网络和随机网络之间，刻画的是基元间的作用按照一定的概率发生变化的情形，见图8.7。

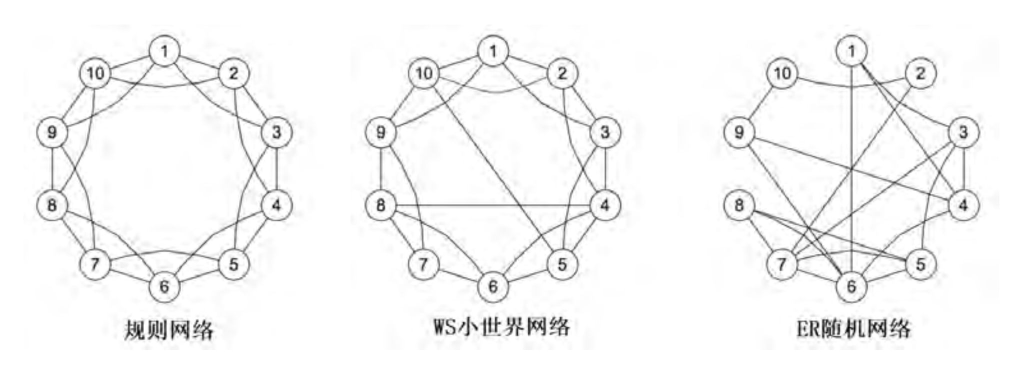


图8.7 规则、WS小世界与随机网络

这当中，规则网络中的节点呈现对称性邻接，完全不体现随机性，类似于刚体运动；随机网络是在节点对中以概率p随机连接，体现连边的随机性；WS小世界网络则是在规则网络基础上以概率p逐条重连边，而事物变化对应于的情形大多类似于WS小世界网络的那种随机变化，即部分基元作用发生随机变化。

第3节 标度自由

随机网络和WS小世界网络刻画的系统有一种共同特点，即系统基元仅是作用到其他基元随机变化但基元规模始终不发生变化，称为"标度限制"。欧阳博士问惠子："在微观层面上，什么时候会出现这种情形呢？"惠子回答说："物质构成应该都是这种情形吧，比如分子中的原子，原子中的质子、中子和电子！"欧阳博士点了点头说："这正是物质不灭定律的一种表现形式。例如。在化学反应中上，分子中的原子仅是重新组合，形成一种新物质但参与反应的原子既不会产生也不会消灭而是处在一种始终不发生变化的状态。"欧阳博士继续问惠子："那么，由物质不灭定律是否可以始终假设系统基元不发生变化呢？"惠子回答说："当然不能！物质由分子构成。物质间发生化学反应时，在分子层面上看基元就是在发生变化！"欧阳博士肯定了惠子的回答："正确，这在生物系统中表现得尤为突出。例如，人体每秒会有380万个细胞新城代谢。这样，假设系统基元始终不



图8.8 化学反应

变化就不一定正确了，而需引入一种刻画基元变化的网络，这就是标度自由网络。”那么，什么是标度自由网络呢？欧阳博士解释说，标度自由网络指节点数、边数不受限制而自由增长的网络，这在人类社会的实际网络中大量存在，如互联网、演员合作网和科研人员合作网等。

3.1.马太效应. 马太效应是一种“强者愈强、弱者愈弱”的现象，欧阳博士解释说，《圣经-新约.马太福音》中有这样一则寓言，说从前有一个国王出门远行，临行前交给三个仆人每人一锭银子，要求他们拿这一锭银子去赚钱， 待他返回后按每人赚取的银子奖励他们。半年后，国王回到了皇宫。第一个仆人向国王汇报说:“主人，我用您交给我的一锭银子做生意，赚了十锭银子。”国王听后认为这个仆人有头脑，奖励这个仆人十座城池；第二个仆人汇报说“主人，我用您交给我的一锭银子组织人做工，赚了五锭银子。”国王听后认为这个仆人也不错，奖励他五座城池；第三个仆人汇报说:“主人，您交给我的一锭银子我怕丢失，藏在我的内衣里面，现在可以还给您了。”国王听后很不高兴，决定把这一锭金子赏给第一个仆人并颁布一条命令，说:“凡是少的，就连他所有的也要夺过来；凡是多的，不仅要奖励还要多给他，让他多多益善。”这条命令后发展成为经济社会中的“马太效应”，反映的是社会上一种“富人愈富、穷人愈穷”的分配不公和“资本逐利”的本性，表现为20%的人掌握了80% 的社会财富而80%的人只占有20%的社会财富，如图8.9所示。类似地，还有银行为什么更愿意把钱贷给富人而不愿意贷给穷人？欧阳博士解释说，因为银行认为富人不仅能如期还上贷款，还会给银行带来一定的收益即“利”而穷人可能连贷款都还不上，是资本逐利的本性又一表现形式。

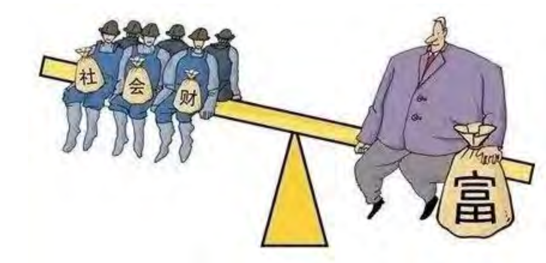


图8.9 马太效应

美国科学史学者R.K.Merton在1968年提出马太效应这个术语，旨在概括一种社会现象，即相对于那些不知名的研究人员，声名显赫的科学家则通常会得到更多的声望，即便他们取得的成就相似。类似地，在一个项目上，声誉常常是给予那些已经出名的研究人员。对此，他归纳为:“任何个体、群体或地区，在某一个方面，如财富、名誉、地位等获得成功和进步会产生一种积累优势，随之而来的是其拥有更多机会取得更大的成功与进步。”

3.2.BA无标度网络. 那么，马太效应在网络发展与变化中是怎样体现的呢？欧阳博士解释说，马太效应在实际生活中较常见。例如，每天都有一些新设立的网站加入到互联网，这些新网站一般愿与那些久负盛名的网站相连接，即在网络连接上呈现一种“富人愈富、穷人愈穷”的现象，可以用网络节点的次数刻画，即

用一个节点的次数大小衡量该节点在网络发展中的重要程度。一个节点的次数越大，表明该节点在网络发展中越重要，新加入的节点与其相邻机会越大，这就是A-L.Barabasi和R.Albert在1999年引入的BA无标度网络，演化程序如下：

第1步. 取一个有$m_0 \geq 1$个节点的连通网络G_0；

第2步. 增加一个新节点$v \notin V(G_0)$并按概率

$$P(u) = \frac{\rho(u)}{\sum\limits_{w \in V(G_0)} \rho(w)} \tag{8.52}$$

与m个节点$u \in V(G_0)$相邻。这里，$1 \leq m \leq m_0$；

第3步. 定义第2步得到的网络为G_1，以G_1取代第1步中的G_0，重复进行第2步演化，直到一个稳定的演化状态。例如，经过$s \geq 1$次节点增加后，网络节点数为$N = m_0 + s$，边数为$ms + |E(G_0)|$。例如，G_0为m_0个节点的圈C_{m_0}时，$E(G_0) = m_0$，则经过s次节点增加得到的网络边数为$ms + m_0$。

一个BA无标度网络演化的例子见图8.10。注意，BA无标度网络是开放的，网络节点总数在不断地加入与演化。同时，网络节点与新节点相邻的概率依赖于它在网络中的既有次数。这与马太效应指出的社会现象中的富人愈富、穷人愈穷特征，即与角色的积累优势一致。

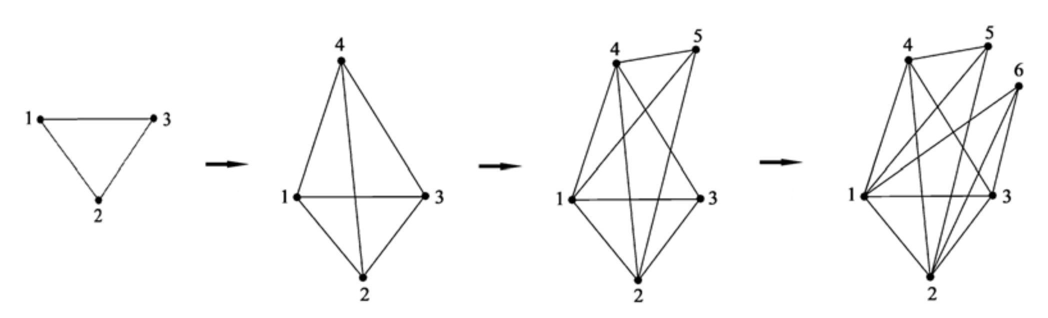


图8.10 无标度网络演化

BA无标度网络的统计特征如下：

（1）**集群系数.** 经过t步演化后，BA无标度网络的平均集群系数为

$$N_3(G) = \frac{m^2(m+1)^2}{4(m-1)} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m+1} \right) \frac{\ln^2 t}{t} \text{。} \tag{8.53}$$

（2）**平均距离.** BA无标度网络的平均距离随网络节点数N的变化而变化，即

$$\langle d \rangle_G \propto \frac{\ln N}{\ln \ln N} \text{。} \tag{8.54}$$

（3）**次分布.** BA无标度网络节点的平均次近似为$2m$，次分布$P(k)$近似为

$$P(k) \ \propto \ 2m^2k^{-3}_{\circ} \tag{8.55}$$

欧阳博士告诉惠子，上面的(8.55)式可以这样推导。首先，对任意一个新增节点$v, \rho_G(v) = k_v$，假设节点v是在第t_v步演化中增加的节点，且k_v是一个连续变量。对应地，构造程序第2步中的概率$P(k)$也是一个连续变量。由BA无标度网络的构造，节点v新增时应仅与既有网络中的m个节点相邻。在此之后，每增加一个新节点按节点v的在网络中的重要程度，即概率$P(v)$与之相邻。这样一来，节点v的次变化遵循

$$\frac{\partial k_v}{\partial t} = mP(v) = m \times \frac{k_v}{\sum\limits_{u \in V(G_0)} \rho(u)} \tag{8.56}$$

的演化规律，且在t时刻有$\sum\limits_{u \in V(G_0)} \rho(u) = 2mt - |E(G_0)|$。更进一步，当$t \to \infty$或者$t$充分大时，有$\sum\limits_{u \in V(G_0)} \rho(u) \approx 2mt$，方程(8.56)变为$\partial k_v/\partial t = k_v/2t$。同时，在新增节点$v$与即有的$m$个节点相邻的初始假设条件，即$k_v(t_v) = m$ 下求解，有

$$k_v = m\sqrt{\frac{t}{t_v}} \quad \Rightarrow \quad t_v = \frac{m^2 t}{k_v^2}\ 。$$

另一方面，假设新增节点是在相等的时间段内新增，即时间变量t_v遵循均匀分布$P(t_v) = 1/(t + m_0)$。这样一来，由概率性质有

$$P\left(k_v < k\right) = P\left(t_v > \frac{m^2 t}{k^2}\right) = 1 - P\left(t_v \leq \frac{m^2 t}{k^2}\right) = 1 - \frac{m^2 t}{k^2} \cdot \frac{1}{t + m_0}\ 。$$

当$t \to \infty$时，BA无标度网络的次分布

$$\lim_{t \to \infty} P(k_v(t) = k) = \lim_{t \to \infty} \frac{\partial P(k_v(t) < k)}{\partial k} = \lim_{t \to \infty} \frac{2m^2 t}{t + m_0} \cdot k^{-3} = 2m^2 k^{-3},$$

即为(8.55)式。

一般地，如果一个随机事件ξ的概率分布$P(k) \propto k^{-\gamma}$，则称ξ满足幂律分布。这样，由(8.55)式知BA无标度网络的次分布$P(k)$满足幂律分布，且有$\gamma = 3$。

更进一步，R.Albert和A-L.Barabasi俩人于2000年在BA无标度网络基础上引入重连边运算，经由以下演化程序将BA无标度网络拓广为EBA无标度网络：

第1步. 取一个有$m_0 \geq 1$个节点的连通网络G_0；

第2步. 以概率p增加一个新节点$v \notin V(G_0)$并根据

$$P(u) \ = \ \frac{\rho(u)}{\sum\limits_{w \in V(G_0)} \rho(w)} \tag{8.57}$$

与m个节点$u \in V(G_0)$相邻，得到网络G_0'。这里，$1 \leq m \leq m_0$。接下来，以概率$q = 1 - p$在G_0'中随机选择m条边断开，得到的网络记为G_1;

第3步. 以G_0'取代第1步中的G_0重复进行第2步演化，直到一个稳定的演化状态。

经过s次随机增加节点，EBA无标度网络的平均节点数为$m_0 + sp$，平均边数为$ms(p - q) + |E(G_0)|$且如果取$p = 1$，不施行断边运算时，上述构造程序得到的EBA无标度网络正是BA无标度网络。

一把地，EBA无标度网络的次分布$P(k)$满足

$$P(k) \ \propto \ (k + 1 + A(p, q, m))^{-(1+B(p,q,m))}_{\circ} \tag{8.58}$$

这里，

$$A(p, q, m) = (p - q)\left(\frac{2m(1 - q)}{1 - p - q} + 1\right), \quad B(p, q, m) = \frac{2m(1 - q) + 1 - p - q}{m}$$

且$0 \leq p < 1, 1 \leq q < 1 - p$。同时，由上述$B(p, q, m)$的表示式易知EBA无标度网络遵从幂律分布且有$2 < \gamma < 3$。

BA、EBA无标度网络模型包括两个增长要素，即节点增长和连边优选，是一个开放的复杂网络。欧阳博士解释说，一方面，节点总数在不断地增加；另一方面，新节点与既有节点连边的概率依赖于既有节点在网络中的次数，即按既有节点的次数进行优选连接。这样，不同的既有节点优选方法可以得到不同的无标度网络。例如，取$\kappa, 0 \leq \kappa \leq 1$为一个常数，在BA无标度网络构造的第2步中，要求新增节点$v \notin V(G_0)$按概率

$$P(u) \ = \ \frac{(1 - \kappa)\rho(u) + \kappa}{\sum\limits_{w \in V(G_0)} ((1 - \kappa)\rho(w) + \kappa)} \tag{8.59}$$

与m个即有节点u相连接，进行演化。这时，只要$\kappa \neq 0$，演化结果是一个不同于BA无标度网络的复杂网络而$\kappa = 0$时，演化结果则是BA无标度网络。

3.3.局域世界网络. 网络邻接优选是在既有网络节点中进行选择，新增节点按照一定的概率与既有节点优选连边。那么，是否可以在既有节点中某一类或某一些局部节点中进行优选和演化呢？答案是肯定的！欧阳博士告诉惠子，这就是李翔和陈关荣研究世界贸易网，于2003年提出的局域世界网络，表现在经济发展的多边贸易结构中，一些国家致力于与各自区域的经济合作组织加强合作，如亚太经合组织、北美自由贸易区、欧盟等。一般地，一个国家在经济贸易发展中，首先是优选经合组织，再在选定的经合组织内优选国家进行经贸合作，一般不与这些经合组织外的国家或地区开展经贸合作。对这种合作现象，如果用节点表示国家，节点间的连边

表示国与国间的经贸合作，则随着地区经合组织、国家间双边关系的发展，对应的网络无时不处在演化之中，且演化结果不同于BA无标度网络，而是一种节点邻接受限的局域世界网络。

局域世界演化模型. 局域世界网络经由以下两步演化程序：

第1步. 取一个有$m_0 \geq 1$个节点e_0条边的连通网络G_0；

第2步. 对第t次网络演化重复进行下面（a）和（b）演化。这里，$t = 0, 1, \cdots$。

（a）随机地从既有节点中选取节点子集$W \subset V(G_0), |W| = M$作为后续新增节点邻接优选范围；

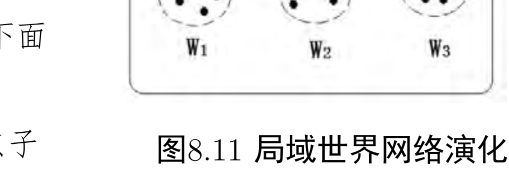


图8.11 局域世界网络演化

（b）增加一个新节点$v \notin V(G_0)$且按概率

$$P_W(u) \;=\; \frac{M}{m_0 + t}\frac{\rho(u)}{\sum\limits_{w \in W} \rho(w)} \tag{8.60}$$

与m个节点$u \in W$相邻，直到一个稳定的演化状态。这里，$1 \leq m \leq M$。

局域世界网络中的次分布分为以下三种情形，其中$k = \langle\rho\rangle_G$为网络平均次：

情形1. $M = m$，即新增节点与邻接优选范围W中的所有节点相邻。这时，类似于BA无标度网络中的随机邻接，节点平均次可用方程$\partial k/\partial t = m/(m_0 + t)$刻画，并类似地得到节点概率次分布$P(k) \propto e^{-k/m}$；

情形2. $M = t + m_0$，即新增节点的邻接优选范围W是整个既有网络节点。这时，演化结果是BA无标度网络，节点平均次遵循方程$\partial k/\partial t = k/2t$且次分布$P(k) \propto 2m^2k^{-3}$；

情形3. $m < M < m_0 + t$。这时，如果M固定为一个远大于m的常数，则上述局域世界网络的次分布与BA无标度网络相近，仍有$P(k) \propto 2m^2k^{-3}$的分布特性。

注意，BA无标度网络在于新增节点按既有网络节点的次数大小确定与既有节点的邻接概率；EBA无标度网络是在BA无标度网络基础上，以概率p随机确定新增节点，以概率$q, 0 \leq q < 1 - p$随机选择去边；局域世界网络是在BA无标度网络基础上，用一个邻接优选节点集W取代网络所有节点与新增节点邻接。那么，是否存在这样一种网络模型同时满足BA、EBA无标度网络和局域世界网络的特点进行演化呢？欧阳博士告诉惠子，答案是肯定的！这就是陈关荣、李翔等人在2005年提出的多重局域世界网络，其演化模型如下：

多重局域世界演化模型. 多重局域世界网络经由以下两步演化程序：

第1步. 取m个互不相交的连通子网络Ω构成的集合，其中每个子网络Ω有$m_0 \geq 1$个节点，e_0条边。这里，$1 \leq m_0 \leq m, 0 \leq e_0 \leq m_0(m_0-1)/2$；

第2步. 在每个演化时刻t施行以下四步演化：

（a）新增节点和边。以概率p_1随机地从既有子网络中选择一个子网络Ω。类似于EBA无标度网络，以概率q新增一个节点v按照概率

$$P_1(u) = \frac{\rho(u)+\alpha}{\sum\limits_{w\in V(G_0)}(\rho(w)+\alpha)} \tag{8.61}$$

与Ω中的m_1个节点$u \in \Omega$相邻。这里，$\alpha > 0$为一个常数，$1 \leq m_1 \leq m$；

（b）子网络Ω与其他节点连边。以概率p_2随机选择一个子网络Ω，再随机选择连边，这条边的一个端点随机选择，另一个端点按(8.61)式确定的概率在Ω 中选择，并重复进行m_2次；

（c）在既有网络中去边。以概率p_3随机选择一个子网络Ω，再在既有边中随机选择去边(v,u)。其中，一个端点v随机选择，另一个端点u按概率

$$P_2(u) = \frac{1}{|\Omega|-1}\left(1-\sqrt{\frac{t}{t_v}}\right) \tag{8.62}$$

确定并重复进行m_3次。这里，t_v是节点v添加到网络中的时刻；

（d）子网络与子网络间连边。以概率p_4随机选择一个子网络Ω并以概率$P_1(u)$在Ω中选择一个节点v与另一个在随机选择的子网络Ω'中按(8.61) 概率确定的节点v'相邻。这一加边过程重复进行m_4次。

重复进行上面$(a)-(d)$步的演化，直到一个稳定的演化状态。

显然，多重局域世界网络涵盖了BA无标度网络、EBA无标度网络和局域世界网络演化中特点，且已知经过t次演化得到的网络，其次分布$P(k)$近似地遵循

$$P(k) = \frac{t}{a(3m+t(1+2p_1))}\left(m_1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\left(k+\frac{b}{a}\right)^{-\left(1+\frac{1}{a}\right)} \tag{8.63}$$

的规律。这里，

$$\begin{aligned}
a &= \frac{qm_1}{c}+\frac{p_2m_2(q+m_0p_1-p_1)}{(q+m_0p_1)c}+\frac{p_3m_3p_1}{(q+m_0p_1)c}+\frac{2p_4m_4}{c},\\
b &= \frac{q\alpha m_1}{c}+\frac{p_2m_2}{q+m_0p_1}+\frac{p_2m_2(q+m_0p_1-p_1)\alpha}{(q+m_0p_1)c}\\
&\quad +\frac{p_3m_3p_1\alpha}{(q+m_0p_1)c}-\frac{2p_3m_3}{q+m_0p_1}+\frac{2p_4m_4\alpha}{c},\\
c &= 2(p_1e_0+qm_1+p_2m_2-p_3m_3+p_4m_4)+q\alpha\text{。}
\end{aligned}$$

多重局域世界网络的一些特殊情形如下；

情形1. $m = q = 1$，$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$。这时，只有一个连通子网络$\Omega$，多重局域世界网络演化退化为BA无标度网络，且节点次分布$P(k)$满足幂律分布，$\gamma = 3 + \alpha/m_1$；

情形2. $m = 1, p_1 = p_3 = p_4 = 0$。这时，只有一个连通子网络$\Omega$，多重局域世界网络演化退化为局域世界网络。同样，节点次分布$P(k)$满足幂律分布且$\gamma = 3 + \alpha q/((m_1 - m_2)q + m_2)$；

情形3. $p_1 = p_2 = p_3 = 0$。这时，存在有限个连通子网络Ω但在同一子网络中不增加或减去边，演化得到一个多重局域世界网络，节点次分布$P(k)$ 满足幂律分布且$\gamma = 2 + (m_1 + \alpha)q/((m_1 - 2m_4) + 2m_4)$；

情形4. $p_2 m_2 = 2P - 3m_3$。这时，$b = \alpha a$且节点次分布$P(k) \propto (k + \alpha)^{-\gamma}$，不同于BA无标度网络中的$P(k) \propto k^{-\gamma}$，因在多重局域世界演化模型中，新增节点按(8.61)式与子网络ω中的节点优选邻接，其中的参数α可认为是对一个节点在网络中重要程度的修正系数。

欧阳博士告诉惠子，系统认知一件事物的根本在于把握系统基元及其相互作用。这对于人类已知的白色系统是一件简单的事情，但对于灰色系统或黑色系统则相当困难，因为人们不完全清楚灰色系统或是根本不清楚黑色系统中的基元和基元作用，只能依据系统的外在表象推测或假设可能存在的基元以及基元间可能存在的作用，进而刻画系统可能的状态。正是在这种意义上，随机网络为刻画灰色或黑色系统的可能状态提供了一种结构模拟方法。

第4节 疾病传播

传染病是由病原体引起的能在人群、动物群或人与动物之间相互传播的一类疾病，如鼠疫、霍乱、肝炎、艾滋病、SARS和Covid-19等，按病原体不同可以分为病毒、细菌、真菌或寄生虫传染等。例如，感染诺如病毒会引起发烧、呕吐、腹泻、呕吐、恶心和腹痛等症状。中国将传染病分为甲、乙、丙三类。其中，甲类传染病包括鼠疫、霍乱等2种；乙类传染病包括SARS、艾滋病、病毒性肝炎等26种；丙类传染病包括流行性感冒、麻风病等11种。这当中，具有一定的传染性是传染病区别于其他疾病的主要特征，即病原体从宿主排出体外，通过一定传播途径，如通过咳嗽、打喷嚏、说话等产生的飞沫传播、接触传播、气溶胶在空气中传播等传染给另一个易感染者，呈现出一定传染性，其传染易感染者数量、症状与病原体种类、数量、毒性大小和易感染者自身的免疫状态等有关。欧阳博士告诉惠子，一种传染病在人群中

传播和流行需具备三个环节：一是传染源，即能排出病原体的人或动物；二是传播途径，即病原体传染给他人的途径，如呼吸道、消化道、血液和性接触传播等；三是易感者对该种传染病免疫力低下。这三个环节中，只要切断其中的任一个环节都可以防止该种传染病的发生和在人群中的流行，这也是为什么一旦出现病原体传染需要对感染者隔离，对其居住区域进行封闭，其宗旨在于阻止病原体流动。反之，一种传染病一旦在人群中大流形，影响的就绝不仅是感染者个体的生死，而是整个人类，威胁到整个人类的生存，是一种公共卫生事件。

[**霍乱大流行**] 霍乱是一种由霍乱弧菌诱发的传染病，包括数百种菌株，这些菌株产生霍乱毒素，导致人的肠壁细胞释放更多的水以致腹泻、人体内液和盐分的快速流失。一般地，感染细菌的人中约80%不会出现霍乱症状，有20%左右的人出现严重症状，包括腹泻、呕吐和腿抽筋等，在几个小时内会引起患者脱水、败血性休克甚至死亡。霍乱自1817年在印度杰索尔首次爆发至今，人类已经与霍乱抗争了200多年，但霍乱从未为人类彻底消灭，并始终对人类健康构成威胁。据世界卫生组织专家估计，在世界范围内每年大约有130万-400万例霍乱感染者，有21000-143000人死亡霍乱。



图8.12 印度恒河

据一些研究人员进行溯源，印度1817年爆发的霍乱最初是由受污染的大米引起的。那么，霍乱爆发后又是经由什么途径传播到其他地区的呢？主要是饮用水和食品。欧阳博士解释说，恒河是佛祖释迦穆尼在传授《金刚经》时作为参照物而提及的一条印度大河，印度人死后有水葬习俗，霍乱爆发这一年又正赶恒河洪水泛滥，患病尸体携带的病原体在恒河下游迅速传播，污染水源和鱼、虾等水产品，经由人的消化道快速在人群中传播。同时，人与人间的无防护接触、蚊蝇等也助长了疫情在人群中的传播。这次疫情波及了整个印度大陆，后又传播到曼谷、泰国和菲律宾等地，于1821年传入中国东南沿海地区，造成霍乱在亚洲地区的大流行，引发人们反思并从传染机理、医治和流行病防治等方面对霍乱等传染病开展研究。

惠子问欧阳博士：“爸爸，救死扶伤是任何一个医生的责任，与这里的系统认知有什么关系呢？”欧阳博士告诉惠子，传染病一般没有现成医案可供选择或参考，需结合患者病症进行辩证施治。同时，对传染病不仅是对患者个体的救治，还需要在救治的同时搞清病源、传染方式和可能途径，包括是人传人还是物传人，是经由日常生活中的水、食品、空气、接触还是有其他特殊的传播途径等，进而才能施行公共政策阻断传染源，切断传染链条，对更多人群的健康进行保护。

4.1.仓室传染模型. 对传染病系统认知中的一个基本问题，是确定感染者在人群中感染的人数随时间推移是如何变化的。为此，针对某一特定的传染病，一种最简单的思想是将人分为三类群体，即易感人群、感染人群和移出者，这就是传染病研究中的仓室模型，见图8.13。这里，易感人群表示在时刻t尚未被疾病感染但随时面临被疾病感染的人数，记为$S(t)$；感染人群指在时刻t已经感染疾病的人数，记为$I(t)$；移出者表示从染病人群中移出的人数，包括已在体内产生抗体或是因疾病导致死亡的人数，记为$R(t)$。这样，人口总数为$N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$。

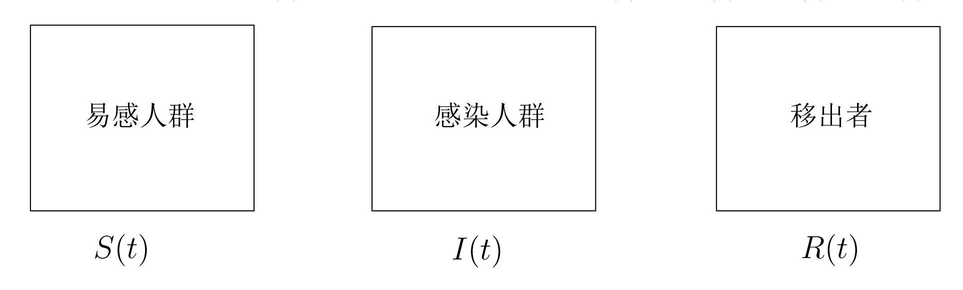


图8.13 仓室传染模型

一般地，对$S(t),I(t),R(t)$分别除以$N(t)$得到易感人群、感染人群和移出者在总人数中所占的比率或“密度”，分别称为易感密度$S(t)$、感染密度$I(t)$和移出密度$R(t)$，有$S(t)+I(t)+R(t)=1$。仓室模型中对疾病传染有三条基本假设：

$C1$. 人与人接触和染病概率相同。假设易感人群与感染人群处在同一个区域内，个体在单位时间内接触其他个体的数量与人口总数成正比，比例系数为β。同时，群体中的个体是均匀混合的，易感人体接触感染人体染病的概率相同；

$C2$. 疾病治愈能力相同。假设单位时间内从感染人群中移出的人数与感染人总数成正比，比例系数为α；

$C3$. 人口总数不变。假设没有人口迁入和移出，新生和死亡人数可忽略不计。

这样，由假设条件$C3$如果仓室模型中每个仓室有足够多的个体，可以近似假设$S(t),I(t)$和$R(t)$是时间t的连续可微函数；由假设条件$C1$，易感染者与感染者随机接触的概率为S/N，单位时间每个感染者传染给其他人的人数为$\beta NS/N=\beta S$。这样，单位时间感染人群传染给易感人群中的人数，即易感人群减少人数为$I\beta NS/N=\beta SI$。同时，可以认为易感染人群与感染者的接触概率为I/N，每个易感染着的染病概率为$(\beta N)I/N=\beta I$。这样，单位时间感染人群增加人数为βIS，再结合假设条件$C3$疾病传染遵循微分方程

$$\begin{cases}\dot{S}(t)=-\beta S(t)I(t)\\ \dot{I}(t)=\beta S(t)I(t)-\alpha I(t)\\ \dot{R}(t)=\alpha I(t)\end{cases}\tag{8.64}$$

称为SIR模型。欧阳博士解释说，针对不同的传染特性，可以分以下情形讨论：

SI模型. $R(t)=0$且没有治愈和死亡，患者自行康复情形。这时，假设传染开始时感染密度为I_0，由$S(t)+I(t)=1$有$S(t)=1-I(t)$，SIR方程(8.64)简化为Logistic方程(3.5)的初值问题

$$\begin{cases} \dot{I}(t)=\beta(1-I(t))I(t), \\ I(0)=I_0\text{。} \end{cases} \tag{8.65}$$

这里，$K=1, F(t)=I(t), r=\beta$。由(3.7)式知方程(8.65)的解为

$$I(t)=\frac{I_0e^{\beta t}}{(1-I_0)+I_0e^{\beta t}}\text{。} \tag{8.66}$$

显然，$t\to\infty$时有感染密度$I(t)\to 1$，即所有人最终将感染疾病。

SIS模型. $R(t)=0$且治愈率为δ，即单位时间有δI的治愈率且治愈的患者不具有该传染病免疫力，重新归到易感人群.这时，假设传染开始时感染密度为I_0，SIR方程(8.64)仍可简化为Logistic方程(3.5)的初值问题

$$\begin{cases} \dot{I}(t)=\beta(1-I(t))I(t)-\delta I(t) \\ I(0)=I_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}(t)=\beta\left(1-\dfrac{\delta}{\beta}-I(t)\right)I(t) \\ I(0)=I_0\text{。} \end{cases} \tag{8.66}$$

这时，$K=1-\delta/\beta, F(t)=I(t), r=\beta(1-\delta/\beta)=\beta-\delta$。这样一来，由Logistic方程的解(3.7)式知

$$I(t)=\frac{\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)I_0e^{(\beta-\delta)t}}{(1-\frac{\delta}{\beta}-I_0)+I_0e^{(\beta-\delta)t}}\text{。} \tag{8.67}$$

这样，由(8.67)知：①如果$\delta\geq\beta$，即治愈率大于等于感染率，则由(8.67)式知$t\to\infty$时有$I(t)\to 0$，该传染病最终被人类消灭；②如果$\delta<\beta$，即治愈率小于感染率，则由(8.67)式知$t\to\infty$时有$I(t)\to 1-\delta/\beta$，意味着人群中大约有$(1-\delta/\beta)N$的感染人数。特别地，如果治愈率非常非常的低，即δ远远小于感染率β，则当$t\to\infty$时有$I(t)\approx 1$，即几乎所有人都会被传染。

SIR模型. $R(t)\neq 0$且治愈者移出易感和感染人群。这时，假设传染开始时易感密度为S_0，感染密度为I_0。由于$R(t)=1-S(t)-I(t)$，(8.64)对应的初值问题为

$$\begin{cases} \dot{S}(t)=-\beta S(t)I(t), \\ \dot{I}(t)=\beta S(t)I(t)-\alpha I(t), \\ S(0)=S_0,\ I(0)=I_0\text{。} \end{cases} \tag{8.68}$$

初值问题(8.68)一般不能采用初等方法求解，但仍可分析易感密度和感染密度的变化趋势，以及$t \to \infty$时是否会趋于一个稳定状态等。注意，方程(8.68)中的平衡点，即使方程(8.68)右端为0的点为$(S, I) = (S, 0)$和$(\alpha/\beta, I)$。注意，只有让$S(t)$和$I(t)$非负的那些点才有实际意义。由方程(8.68)易知，对任一时刻t有$\dot{S}(t) < 0$且仅当$S(t) > \alpha/\beta$时有$\dot{I}(t) > 0$。这时，①当$S_0 < \alpha/\beta$时有$\dot{I}(t) < 0$，$I(t)$为一个递减函数，随着$t \to \infty$感染密度$I(t)$减少到$I_\infty = 0$；②当$S_0 > \alpha/\beta$时$I(t)$为一个递增函数，但由于$\dot{S}(t) < 0$，$S(t)$为一个递减函数并在$t \to \infty$时趋于S_∞。这样，$I(t)$随着对感染者治愈最终会减少，即$I(t)$是先增加，在$S(t) = \alpha/\beta$时达到最大值，然后减少到$I_\infty = 0$，不再有感染者。这说明参数$\beta S_0/\alpha$在SIR模型中是一个重要阈值。

一般地，定义$\mathscr{R}_0 = \beta S_0/\alpha$为传染病的基本再生数，并可据此判断是否存在传染可能性，即$\mathscr{R}_0 < 1$时疾病会自我消亡；$\mathscr{R}_0 > 1$时疾病会在人群中大规模传染，需进行人为干预。由于易感密度$S(t)$是个递减函数，初始时值S_0为最大，$I(t)$则与此相反，在初始时最小。这样，由$S_0 + I_0 = 1$可以取$S_0 \approx 1$或认为感染者是易感人群外来的访问者，有$S_0 = 1$，并将α的倒数$1/\alpha$理解为平均患病周期。

将方程(8.68)中的两个方程相加并从0到∞积分，有

$$\int_0^\infty \left(\dot{S}(t) + \dot{I}(t)\right) dt = -\alpha \int_0^\infty I(t) dt = S_\infty - (S_0 + I_0) = S_\infty - N。 \tag{8.69}$$

方程(8.68)中的第一个方程两端除以$S(t)$并从0到∞积分，有

$$\ln \frac{S_0}{S_\infty} = \int_0^\infty \frac{d(S(t))}{S(t)} = \beta \int_0^\infty I(t) dt = \frac{\beta}{\alpha}(N - S_\infty) = \mathscr{R}_0 \left(1 - \frac{S_\infty}{N}\right) \tag{8.70}$$

给出基本再生数与传染病规模$N(1 - S_\infty)$间的关系。

类似地，将方程(8.68)中的两个方程相加，对第一个方程两端除以$S(t)$并从0到t积分，有

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\dot{S}(t) + \dot{I}(t)\right) dt &= -\alpha \int_0^t I(t) dt = S(t) + I(t) - N, \\ \ln \frac{S_0}{S(t)} = \int_0^t \frac{d(S(t))}{S(t)} &= \beta \int_0^t I(t) dt = \frac{\beta}{\alpha}\left(N - S(t) - I(t)\right), \end{aligned}$$

即函数$S(t)$和$I(t)$之间存在关系

$$S(t) + I(t) - \frac{\alpha}{\beta} \ln S(t) = N - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0 。 \tag{8.71}$$

这样，由于感染密度$I(t)$在$S(t)=\alpha/\beta$时达到最大值，应用(8.71)式可知感染密度最大值为

$$I_{\max}=N-\frac{\alpha}{\beta}\ln S_0-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}\ln\frac{\alpha}{\beta}\text{。} \tag{8.72}$$

应用(8.71)式还可以估计接触率β的大小，即假设$S_0=1,I_0=0$。这样，在传染病初始时刻，有

$$S_0-\frac{\alpha}{\beta}\ln S_0=\lim_{t\to\infty}(S(t)+I(t))-\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha}{\beta}\ln S=S_\infty-\frac{\alpha}{\beta}\ln S_\infty,$$

从而有

$$\beta=\alpha\cdot\frac{\ln S_0-\ln S_\infty}{1-S_\infty}=-\frac{\alpha\ln S_\infty}{1-S_\infty}\text{。} \tag{8.73}$$

这当中，S_∞可以通过对易感人群染病前后的血清研究进行估计，进而由(8.73)式得到对β的估计值，再由(8.70)式得到基本再生数的估值$\mathscr{R}_0<1$或$\mathscr{R}_0>1$判断传染病的流形趋势，并采取相应防范措施：①采取隔离或接种疫苗等措施减少初始易感密度S_0；②减少个体与其他个体的接触率β；③加强治疗减少患者的平均传染周期$1/\alpha$等。例如，假设群体接种疫苗获得免疫力的比率为$p,0\le p\le 1$，则$\mathscr{R}_0$由最初的$\beta S_0/\alpha$减小为$(1-p)\beta S_0/\alpha$。

4.2.分枝传染模型. 仓室传染模型假设易感人群、感染人群和移出者这三个仓室足够大，成员混合遵从均匀分布，是一种大范围统计模型，与人群实际状况并不一致，因为每个人仅是与其熟识的亲人、同事或朋友频繁接触，与陌生人接触的概率极小。在这种情形下，一个人与他人的接触遵循固有的关系网络。对应地，疾病是在人的关系网络上经由人与人间的接触进行传播。为此，需要在上面仓室传染模型基础上在人的关系网络上构建分枝传染模型，即关系网络G^L上的传染模型，刻画疾病传播规律。



图8.14 家族关系

那么，什么是人的关系网络呢？欧阳博士解释说，在人的关系网络G^L中，一个节点表示一个自然人，节点间的边表示两个自然人间存在着接触关系，如图8.14所示的家族关系等。这样，疾病在关系网络上的传播是沿节点间的边进行传播，由一个节点单方向到另一个节点。同时，人与人间的关系是处在不时的变化之中。这样，人的关系网也在不时地变化，可以近似地看作是一种随机网络，并分为均匀网络、非均匀网络进行刻画。

（1）**均匀网络.** 均匀网络是指网络节点的次在某一平均值附近呈现指数衰减，即次分布$P(k)$取值范围不大，可近似看作节点次遵循均匀分布的复杂网络，如规则网络、小世界网络等。欧阳博士告诉惠子，在均匀网络G^L中，每个节点的次近似地等于该网络的平均节点次，即$\rho(v) \approx \langle\rho\rangle_G = \rho$，一个感染节点平均与$\rho$个易感节点相邻，感染概率为$\beta$。这样，在每一个时间步$t$内，有$\beta\rho I(t)$个易感节点成为感染节点。同时，假设一个感染节点以概率α治愈，即$\dot{R}(t) = \alpha I(t)$。注意，$S(t)$、$I(t)$和$R(t)$不是独立的，由$S(t)$、$I(t)$和$S(t) + I(t) + R(t) = 1$知$R(t) = 1 - S(t) - I(t)$。这样，仅需研究关于$S(t)$、$I(t)$的SIR模型

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta\rho S(t)I(t), \\ \dot{I}(t) = \beta\rho S(t)I(t) - \alpha I(t), \\ S(0) = S_0,\ I(0) = I_0\ 。\end{cases} \tag{8.74}$$

均匀网络上的疾病传播类似于仓室传染模型，不过易感者不是整个易感人群而是与感染节点邻接的那些节点。这时，方程(8.76)的平衡点为$(S, I) = (S, 0)$和$(\alpha/(\rho\beta), I)$。实际疾病传播过程中，一定有$S(t) > 0$和$I(t) > 0$。这样，由方程(8.74)知在任一时刻t有$\dot{S}(t) < 0$，即$S(t)$ 是个递减函数，且当$S(t) < \alpha/(\rho\beta)$时$\dot{I}(t) < 0$；$S(t) > \alpha/(\rho\beta)$时$\dot{I}(t) > 0$，即$I(t)$ 在$S(t) > \alpha/(\rho\beta)$时递增，在$S(t) < \alpha/(\rho\beta)$时递减至$I_\infty = 0$，在$S(t) = \alpha/(\rho\beta)$时达到最大值，然后减少至$I_\infty = 0$。这时，方程(8.74)的基本再生指数$\mathscr{R}_0 = \beta\rho S_0/\alpha$，即$\mathscr{R}_0 < 1$时疾病衰减至0，$\mathscr{R}_0 > 1$时疾病会传染给其他易感人群，需进行人为干预，阻断传染源和传播途径。

特别地，假设$\alpha = 1$，即感染者100%治愈并即刻返回到易感人群中。这时，可以近似认为$R(t) = 0, S(t) + I(t) = 1$，感染密度$I(t)$由初值问题

$$\begin{cases} \dot{I}(t) &= \beta\rho I(t)(1 - I(t)) - I(t) \\ I(0) &= I_0 \end{cases} \tag{8.75}$$

刻画，对应于(8.66)中$\delta = 1$且用$\beta\rho$替代那里β的情形。这时，由Logistic方程的解(3.7)知

$$I(t) = \frac{\left(1 - \frac{1}{\rho\beta}\right) I_0 e^{(\rho\beta-1)t}}{(1 - \frac{1}{\rho\beta} - I_0) + I_0 e^{(\rho\beta-1)t}}\ 。\tag{8.76}$$

这样，定义方程(8.76)的阈值为$\beta_c = 1/\rho$。则由方程(8.75)的解(8.76)，知如果$\beta < \beta_c$，则感染密度呈现指数级衰减，直至$I_\infty = 0$，疾病不会向其它节点大规模传染；反之，如果$\beta > \beta_c$，疾病将传播至整个网络且感染密度最终稳定在$I_\infty = 1 - \beta_c/\beta$。

然而，大量的SIR模型或SIS模型不能用初等方法直接求解出感染密度$I(t)$。那么，在均匀网络上疾病传播的趋势是否可以不解方程而直接判断呢？欧阳博士告诉

惠子，这时，可以考虑方程(8.75)的平衡点，研究方程解在平衡点的稳定性得到疾病传播趋势。例如，方程(8.75)的平衡点为$\beta\rho I(t)(1-I(t))-I(t)=0$的解，即$I(t)=0$或$I(t)=1-1/\beta\rho$。这样，当$t\to\infty$时有

$$I_\infty=\lim_{t\to\infty}I(t)=\begin{cases}0, & \beta<\beta_c,\\ 1-\beta_c/\beta, & \beta\geq\beta_c,\end{cases}$$

同样可以得到$\beta<\beta_c$时感染密度$I(t)$将衰减，直至$I_\infty=0$；$\beta>\beta_c$时疾病将传播至整个网络并稳定在$I_\infty=1-\beta_c/\beta$的结论。

（2）**非均匀网络.** 非均匀网络，指网络节点的次分布遵循幂律或次分布$P(k)$的取值范围较大的复杂网络，如BA无标度网络或局域世界网络等复杂网络。这时，疾病传播依赖于节点与节点间的边，传播效率则与节点的分布$P(k)$有关，不同的次分布导致不同的疾病传播，见图8.15。



图8.15 人与人关系网

SIS模型. 首先，假设疾病在网络传播中，次数不同的两个节点在疾病传播上相互无影响，各自独立地按感染率进行传播，$\alpha=1$且患者治愈后即刻返回到易感人群，则类似于SIS方程(8.75)，将节点次相同的节点归并为同一组，对次数为k的节点仍分为易感密度$S_k(t)$，感染密度$I_k(t)$和移出密度$R_k(t)$，则感染密度$I_k(t)$的变化由

$$\dot{I}_k(t)=-I_k(t)+\beta k(1-I_k(t))\sum_{k'}P_{k'}(k'|k)I_{k'}(t) \tag{8.77}$$

刻画。这当中，$\sum\limits_{k'}P_{k'}(k'|k)$是一个次为$k$的节点与一个次为$k'$的感染节点邻接的平均概率。记$P_k(t)=\sum\limits_{k'}P_{k'}(k'|k)I_{k'}(t)$，则方程(8.77)化为

$$\dot{I}_k(t)=-I_k(t)+\beta k(1-I_k(t))P_k(t) \tag{8.78}$$

由(8.78)式中的$\dot{I}_k(t)=0$，知

$$I_k(t)=\frac{k\beta P_k(t)}{1+k\beta P_k(t)}。 \tag{8.79}$$

欧阳博士告诉惠子，对于非关联网络，一个次为k的节点与一个次为k'的节点邻接的概率$P(k'|k)$为$kP(k)/\langle\rho\rangle_G$。这样，由(8.79)式$P_k(t)$可以改写为

$$P_k(t)=\sum_{k'}P_{k'}(k'|k)I_{k'}(t)=\frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_{k=1}^{N}kP(k)\frac{k\beta P_k(t)}{1+k\beta P_k(t)}。 \tag{8.80}$$

这样，由(8.80)中的非平凡解$P_k(t)$代入(8.79)可知次数为k的易感密度$I_k(t)$。显然，$P_k(t)=0$是(8.80)的一个平凡解。为求(8.80) 的非平凡解，(8.80)的两端对$P_k(t)$求导并在$P_k(t)=0$上取值，一定有

$$\frac{d}{dP_k(t)}\left(\frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_{k=1}^{N}kP(k)\frac{k\beta P_k(t)}{1+k\beta P_\infty}\right)\Bigg|_{P_k(t)=0} \;=\; 1|_{P_k(t)=0} \;=\; 1, \tag{8.81}$$

即如要求(8.81)式左端

$$\frac{d}{dP_k(t)}\left(\frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_{k=1}^{N}kP(k)\frac{k\beta P_k(t)}{1+k\beta P_k(t)}\right)\Bigg|_{P_k(t)=0} \;>\; 1$$

可得到$P_k(t)$的非平凡解。这时(8.81)式左端

$$\frac{d}{dP_k(t)}\left(\frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_{k=1}^{N}kP(k)\frac{k\beta P_k(t)}{1+k\beta P_\infty}\right)\Bigg|_{P_k(t)=0} = \sum_{k=1}^{N}\frac{\beta k^2P(k)}{\langle k\rangle} = \beta\frac{\langle\rho^2\rangle_G}{\langle\rho\rangle_G} \;>\; 1。$$

注意，分枝传染模型中感染密度$I(t)=\sum\limits_{k}P(k)I_k(t)$，如定义疾病传播的阈值

$$\beta_c \;=\; \frac{\langle\rho\rangle_G}{\langle\rho^2\rangle_G}, \tag{8.82}$$

则对于节点数无限增长的网络模型，如果次分布$P(k)\propto k^{-\gamma}$且$\gamma\le 3$，则在$N\to\infty$时$\langle\rho^2\rangle_G \ge \sum\limits_{k}1/k \to \infty$有$\beta_c\to 0$，疾病易于大规模在人群中传播。例如，对于BA无标度网络G^L，

$$\langle\rho\rangle_G=\int_m^\infty kP(k)dk=2m,\quad P(k)\propto 2m^2k^{-3},$$

应用(8.80)式有

$$P_k(t)\propto m\beta P_k(t)\int_m^\infty\frac{1}{k}\frac{dk}{1+k\beta P_k(t)}=m\beta P_k(t)\ln\left(1+\frac{1}{m\beta P_k(t)}\right),$$

即

$$P_k(t)=\frac{e^{-1/m\beta}}{m\beta}\left(1-e^{-1/m\beta}\right)^{-1}_{。} \tag{8.83}$$

这样，由(8.79)式知网络上最终感染密度$I(t)$，即当$N\to\infty, t\to\infty$时$I(t)$的极限值

$$\begin{aligned}I_\infty \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty}P(k)I_k(t)=2m^2\beta P_k(t)\int_m^\infty\frac{1}{k^2}\frac{dk}{1+kP_k(t)}\\ &=\; 2m^2\beta P_k(t)\left(\frac{1}{m}+\beta P_k(t)\ln\left(1+\frac{1}{m\beta P_k(t)}\right)\right) \;\propto\; 2e^{-1/(m\beta)}\end{aligned}$$

且仅当$\beta = 0$时$I_\infty = 0$，对应地的阈值$\beta_c = 0$。欧阳博士解释说，传染率$\beta = 0$仅当一种疾病无传染性时才会出现。这样一来，如果人的社会关系网是BA无标度网络则无论感染率多小，只要发作都会在人群中永久地存在。这是一个让人恐惧的结论，即人类无法根治任何一种传染病，好在人的社会关系网不是BA无标度网络，且可以限制人员流动而改变网络结构状态以根治传染病。

SIR模型. 对网络上次数为k的节点分为易感节点、感染节点和移出者，对应地密度分别为$S_k(t)$、$I_k(t)$和$R_k(t)$且有$S_k(t)+I_k(t)+R_k(t)=1$，感染率、治愈率分别为β和$\alpha = 100\%$。这时，类似于仓室模型中的SIR模型有

$$\begin{cases} \dot{S}_k(t) = -k\beta S_k(t) I_k(t) P_k(t), \\ \dot{I}_k(t) = k\beta S_k(t) I_k(t) P_k(t) - I_k(t), \\ \dot{R}_k(t) = I_k(t) \text{。} \end{cases} \tag{8.84}$$

假设初始条件为$R_k(0)=0, I_k(0)=I_k^0$和$S_k(0)=1-I_k^0$。在$I_k^0\to 0$时，可以假设$I_k^0\approx 0, S_k(0)\approx 1$。这样，对(8.84)中的第一个、第三个方程直接积分知

$$S_k(t) = e^{-k\beta\phi(t)}, \quad R_k(t) = \int_0^t I_k(s)ds\text{。} \tag{8.85}$$

这里，函数$\phi(t)$为

$$\phi(t) = \int_0^t P_k(s)ds = \frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_k kP(k)\int_0^t I_k(s)ds = \frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_k kP(k)R_k(t)\text{。}$$

对上式两端求导有

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_k kP_k(t)\dot{R}_k(t) = \frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_k kP_k(t)I_k(t) \\ &= \frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_k kP(k)\left(1-R_k(t)-S_k(t)\right) \\ &= \frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_k kP(k) - \frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_k kP(k)R_k(t) - \frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_k kP(k)S_k(t) \\ &= 1-\phi(t) - \frac{1}{\langle\rho\rangle_G}\sum_k kP(k)e^{-k\beta\phi(t)}\text{。} \end{aligned} \tag{8.86}$$

注意，方程(8.86)是关于$\phi(t)$的常微分方程，只要次分布$P(k)$已知就可以求解得到$\phi(t)$，并由(8.85)知易感密度$R_k(t)$。

一种传染病在人群中的传播可以让$t \to \infty$，分析易感人群、感染人群和移出者的最终结果。这样，可设$\phi_\infty = \lim_{t\to\infty} \phi(t)$，$S_\infty = \lim_{t\to\infty} \sum_k S_k(t)$，$I_\infty = \lim_{t\to\infty} \sum_k I_k(t)$和$R_\infty = \lim_{t\to\infty} \sum_k R_k(t)$。则由$I_\infty = 0$和(8.85)知

$$R_\infty = \lim_{t\to\infty} \sum_k R_k(t) = \sum_k P(k)\left(1 - e^{-k\beta\phi_\infty}\right)。 \tag{8.87}$$

同时，令方程(8.86)右端为0，得到关于ϕ_∞的方程

$$\phi_\infty = 1 - \frac{1}{\langle\rho\rangle_G} \sum_k kP(k)e^{-k\beta\phi_\infty} \tag{8.88}$$

并类似于对SIS方程(8.75)的讨论，寻求方程(8.88)的非0解，即要求

$$\frac{d}{d\phi_\infty}\left(1 - \frac{1}{\langle\rho\rangle_G} \sum_k kP(k)e^{-k\beta\phi_\infty}\right)\Bigg|_{\phi_\infty=0} \ > \ 1$$

而得到

$$\frac{1}{\langle\rho\rangle_G} \sum_k P(k)k\beta = \beta\frac{\langle\rho^2\rangle_G}{\langle\rho\rangle_G} \ > \ 1,$$

即SIR模型的阈值$\beta_c = \langle\rho\rangle_G / \langle\rho^2\rangle_G$进而判断传染病的传播趋势，以及是否需要人为干预，对感染人群采取隔离措施等。这个阈值与SIS模型的阈值(8.82)相同。

第5节 社群网络

一个社会是以众多生物个体为基元组成的复杂系统，这当中的基元一方面是生物个体，另一方面是该个体所拥有的社会、经济和文化的纽带，即基本单元借助纽带组成社会群体，社会群体经由纽带组成一个社会。一个社会中，疾病、产品、观点或态度等的扩散传播强烈地赖于个体所在的社群网络，即按一定的社会关系在某区域或国家形成的网络G^L。这里，生物个体作为网络G^L中的节点，两个体之间如存在既定的社会关系则在两个节点之间连接一条边。欧阳博士告诉惠子，图与网络最初是源于对社会群体的行为刻画，随机网络、WS小世界网络、BA无标度网络和多重局域世界网络中引入的演化规则，是社会群体发展与变化行为的一种随机模拟。

社会群体行为带有一定的主观能动性，一定程度上受到个体意识的制约，不能单纯用任何一种已知的随机网络进行刻画。例如，社群网络会随着事件进程增加新的个体，有固定不变的子结构，如父子、兄弟等亲情关系，类似于小世界网络，但在个体关系上也存在着变化情形，如朋友关系、上下级关系、合作关系。相应地，社群

网络演化有新节点增加、新节点与既有节点的连边扩大网络规模，既有边可能发生去边或是重新连边运算等，但这些变化并非是一种随机事件，也没有一种统一的演化模式，是一种真正意义上的复杂网络。这时，采用一种固定不变的网络或是随机网络刻画社群网络都仅是一种近似模拟。这从一个侧面表明，虽然已对人类基因组作出了系统刻画，但人类对生物群体动力行为的认知还很初等。也正因为此，除已知的氏族或血亲关系等社会构型中的不变组成外，社群网络与个体的心理、文化、习俗、社会、经济和地理特征有关，既有或一些学者研究过的社群网络仅是某一社会关系在某一时刻的一些小规模网络，即社会网络中的局部或片段。

社群网络的节点既然由一定范围内的生物个体组成，个体间的社会关系就必然是构造社群网络的基础。那么，*什么是社会关系呢*？欧阳博士告诉惠子，一个社会个体间关系的总和称为*社会关系*，包括个体间、个体与群体和群体与群体间的关系，是分析社会状态及相互作用，包括暗示、模仿、顺应、同化、交换、合作、竞争、冲突和强制等作用，是分析社群网络演化的基础。这当中，群体指不同个体构成的群族，包括家族、企业、社会团体、宗教和政党组织等。

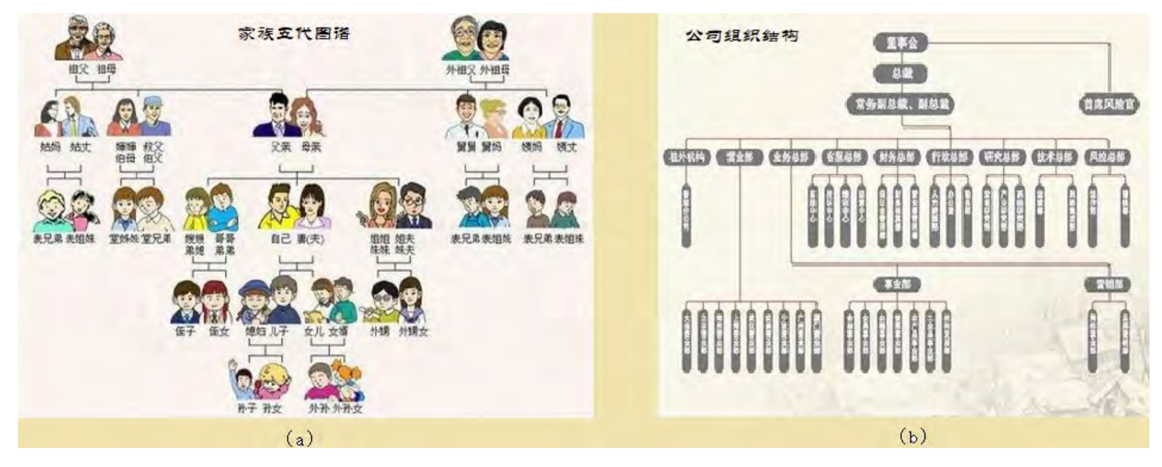


图8.16 家族与公司结构图

一般地，人的社会关系中的群体由血缘关系、地缘关系或业缘关系等构成。这里，血缘关系指婚姻关系、家庭关系和亲属关系，即非直系血缘关系，如姑侄关系、叔侄关系、舅甥关系、姨甥关系、堂兄弟姐妹关系、姑表关系、岳婿关系、丈夫与妻弟、妻妹关系等，如图8.16(a)所示的世代谱系；地缘关系建立在人的生活空间与地理位置，是人类最早形成的社会关系之一，如邻里、同乡、同村关系等；业缘关系以社会分工为基础，指人专属于某一个职业或组织，如同一家企业、同属于一个政党或教堂，如图8.16(b)所示的某公司组织机构等。这样，对一种既定的社会关系，理论上一定存在并可以构建一个社会群体对应的社群网络G^L，并据此分析个体和群体行为。

社会关系具有“物以类聚、人以群分”的凝聚特性，这种现象称为同好性，即性情相似的个体间会有更多的交流与互动，对应于社群网络中某中一类具有特定节点关系的子网络。例如，“树状结构”与“子团结构”。前者指网络结构形状像一棵树，如图8.16所示的家族与公司结构等，后者指网络节点间均存在既定关系，对应于完全图$K_n, n \geq 3$上的网络K_n^L。例如，图8.17刻画四个家庭C_1, C_2, C_3, C_4中的友情关系，每一个家庭内部为K_4^L或K_3^L结构，家庭之间通过成员存在友情或互动等。

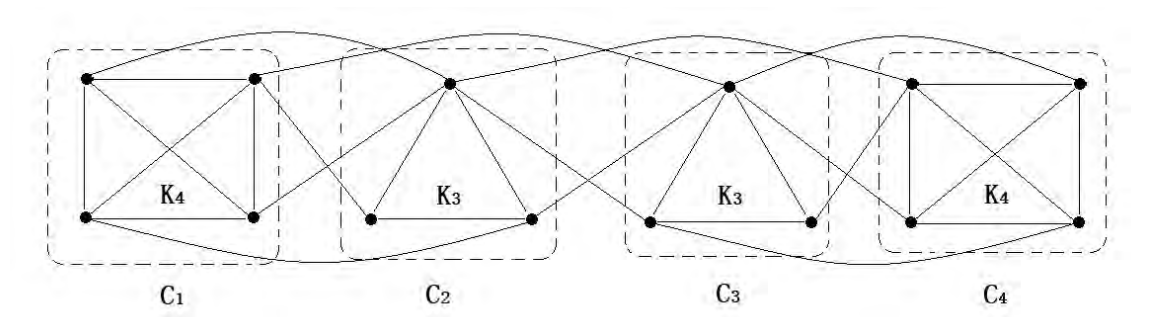


图8.17 友情关系

5.1.社群角色度量. 莎士比亚在他的《皆大欢喜》中有这样一段台词:“世界是一个大舞台，所有的男男女女不过是一些演员；他们都有下场的时候，也都有上场的时候，一个人一生中扮演着好几个角色。”那么，什么是社会角色呢？欧阳博士解释说，社会角色是与一定社会位置相关联的符合社会要求的个人行为模式，即个体在社会群体中被赋予的社会地位和身份，以及该身份应当发挥的功能。注意，与在戏曲舞台上扮演不同，任一个人的社会角色是社会的认同，证明他的实际地位、身份等与其承担的社会角色一致，是在长期社会互动中的确认而不是个人的自吹自擂。

社会生活中，为什么演员有著名、非著名之分呢？答案与演员既往演出在公众心中的评价有关；美国民权运动中，为什么马丁路德金振臂一挥有数十万民众会跟随他为黑人民权斗争？因为马丁路德金在美国民众中有较高的声望，即认同度。那么，怎样对不同的社会角色度量与评价呢？欧阳博士告诉惠子，应用社群网络可以对个体、群体进行度量与分类，进而分析他们在社会上的影响力。

（1）个体影响力. 在一个按照既定社会关系构造的社群网络上，有两种指标可以反映出个体在群体中的影响力。这两种指标中，一是与个体相邻的个体数，反映其直接影响的个体数；二是个体到其他个体的距离，反映的是其对群体其他成员影响的难易程度或远近。对应地，有刻画个体在群体中影响力的中心和中心势。

1）节点次中心。 度量一个体v在群体中影响力最直接的方法，是应用v在相应的社群网络G^L中节点次$\rho_G(v)$，包括：①中心次。中心次以节点次$\rho_G(v)$度量个体v在群体G^L中的影响力，是一种反映个体v在该社群G^L中的权利、地位及其影响分布的

指标，对应于社群网络G^L中节点的次序列$\rho_1 \geq \rho_2 \cdots \geq \rho_p, p = |G|$。中心次越高的个体处在群体中的影响力越高，越能有效控制或影响群体中其个体的活动。相应地，中心次越低的个体越处于群体的边缘位置，对其他个体缺乏影响力；②中心势。使用中心次$\rho_G(v)$衡量个体v在群体中的影响力忽略了网络规模或群体大小$|G|$，适用于同一群体中影响力大小比较。这样，对规模不同的群体仅从中心次的角度分析就有一定的局限性，因为处在不同规模群体中的个体，如果它们的中心次相同，则在常识上处在规模大的群体中的个体影响力相对较低。这样，需要在中心次基础上引入中心势(8.25)，即$C_\rho(v) = \rho_G(v)/(p-1)$对不同规模群体中的个体$v$的影响力进行比较。例如，对$\rho_G(v) = 5$ 的两个体分别处在11、101个体的群体中，它们的中心次相同，但中心势分别为0.5和0.05，即在11个体中的影响力高于在101个体中的影响力。

2）节点距中心。社会关系中，一个体v直接影响另一个体u在社群网络G^L上的表现是v和u之间存在一条边(v,u)。对于那些没有直接相互影响的个体，一种通行的办法是经由中间人，由中间人传播而间接影响。当然，这样的中间个体可能是一个，也可能需要多个。

那么，社会群体中的个体是否一定可经由中间人建立既定的间接关系呢？对于社群网络G^L中的连通子网络，答案是肯定的！欧阳博士解释说，理论上，这是在对应的社群连通子网络上寻找一条由一个个体到另一个个体的道路。由于假设这个子网络是连通的，这样的道路一定存在！在此基础上，需要进一步讨论的问题是效率问题，即这样的一条连接两个体的道路是否需要走遍子网络中其他所有节点呢？欧阳博士告诉惠子，在人的社群网络上有一个令人惊讶的结果，是平均最多经过6个中间人可以建立群体间不同两个人的关系，这就是社会学中的“六度空间理论”或“小世界理论”。



图8.18 人际分隔实验

[人际分隔实验] 有一个著名的故事，说是一家德国报社接受了一项挑战，帮助一位土耳其烤肉店老板找到他心中的偶像，即与影星马龙.白兰度的关系。经过报社员工几个月的努力寻找，发现这两个人中间经过不超过六个人即可建立俩人的人脉关系，这即是六度分隔理论的早期版本。

1967年，哈佛大学心理学系的一位教授S.Milgram因研究人际关系需要，设计了一个发信实验，即要求第一个人发信给第二个人，第二个人再把信发给第三个人等，这样一直进行下去，直到信件送达最终目标的实验。他从内布拉斯加州和堪萨斯州招募了一批志愿者，并从中随机选择出160人完成这次发信实验，要求他们邮寄一

个信件给一名住在波士顿的股票经纪人。这些志愿者都不认识与这位在波士顿的股票经纪人，信件不会直接寄达最终目标，S.Milgram让志愿者把信件发寄给他们认为最有可能与这位股票经纪人建立联系的朋友，并要求每一个转寄信件的人都回寄给他本人一个信件。最终的结果有些出人意料，大多信件最终到达了这位股票经济人手中，每封信平均经手6.2 次。归纳这次实验结果，S.Milgram提出人际间隔的六度理论，认为世界上任两个人之间最多需要6个人即可以建立联系。

社会学中研究疾病、产品、观点或态度等扩散传播需要关注个体v,u在社群网络上的传播路径和距离$d_G(v,u)$，进而评估传播效率。六度空间理论为度量群体中个体间的平均距离提供了一个统计上的近似值，即有$\langle d\rangle_G\approx 6$。这样一来，评价个体在群体中的影响力可以从传播效率角度进行评价。这样，由节点间的距离可以分别引入(8.37)定义的紧密中心$C_B^1(v)$、(8.38)定义的介中心和(8.39)定义的流介中心，即

$$C_B^1(v) = \frac{|G|-1}{\sum\limits_{u\in V(G)} d(v,u)},\quad C_B^3(v)=\sum_{u,w\in V(G)}\frac{|\mathcal{P}'(u,w)(v)}{|\mathcal{P}(u,w)|}$$

$$C_B^2(v) = \frac{2\sum\limits_{u,w\in V(G)}|\mathcal{P}(u,w)(v)}{(|G|-1)(|G|-2)|\mathcal{P}(u,w)|},$$

并据此对社群网络中的节点进行排序$C_{B1}^1\geq C_{B2}^1\geq\cdots C_{Bp}^1$，$C_{B1}^2\geq C_{B2}^2\geq\cdots C_{Bp}^2$和$C_{B1}^3\geq C_{B2}^3\geq\cdots C_{Bp}^3$，衡量个体在群体中的影响力。

(2) 子群影响力. 社群中的子群，是指两个或两个以上的个体为实现共同目标，以一定方式联系在一起进行活动的个体群$H^L\prec G^L$，子群的特点在于成员有共同的目标，有对子群的认同感、归属感和内蕴结构，有共同的价值观等。对应地，子群影响力是社群中的某一子群对群体中其他个体的影响力。

1）子群密度。子群$H^L\prec G^L$的密度$\rho_{\rm dens}\left(H^L\right)$是描述子群中的个体关联的紧密程度，定义为子群$H^L$在社群网络$G^L$中的边数与其最多可能拥有边数的比率，即

$$\rho_{\rm dens}\left(H^L\right) = \frac{2\left|E(H^L)\right|}{|H^L|\,(|H^L|-1)}。\tag{8.89}$$

对社群网络G^L的任一个子群H^L，由(8.89)式定义有$0\leq\rho_{\rm dens}\left(H^L\right)\leq 1$。特别地，当子群$H^L$密度为0时，$H^L$是一个由孤立节点构成的无边网络，即个体间均没有既定关系，信息无法传递且效率最低；当$\rho_{\rm dens}\left(H^L\right)=1$时$H^L$是一个完全网络$K_s^L$，其中$s=\left|H^L\right|$，说明子群的个体间均存在既定关系，信息在子群个体间传播效率越高。同时，对于那些已知结构的子群，由(8.89)式可以计算出其对应的密度。例如，假设H^L为n个节点的树状网络T^L，则因$\left|E\left(T^L\right)\right|=|T|-1$，有$\rho_{\rm dens}\left(T^L\right)=2(|T|-1)/(|T|(|T|-1))=2/|T|$。

2）子群影响力。子群影响力体现在群体中的其他个体乐于接受该子群的影响，进而改变其思想和行动的能力。为此，在社群网络上需要引入子群次与子群距离的概念：①子群次$\rho_G\left(H^L\right)$。对任一个子群$H^L \prec G^L$，子群次$\rho_G\left(H^L\right)$指H^L在社群网络G^L中的相邻边数

$$\begin{aligned}\rho_G\left(H^L\right) &= \left|E\left(G^L\right)\right| - \left|E\left(H^L\right)\right| - \left|E\left(G^L \setminus H^L\right)\right| \\ &= \left|E_G\left(H^L, G^L \setminus H^L\right)\right|,\end{aligned} \tag{8.90}$$

即子群G^L与$G^L \setminus H^L$之间的边数。这样，如果在社群网络G^L中将子群H^L收缩为一个节点v_H，记收缩后的网络为$(G/H)^L$，则子群次$\rho_G\left(H^L\right)$就是节点v_H在收缩后的网络$(G/H)^L$中的次，即$\rho_G\left(H^L\right) = \rho_{G/H}\left(v_H\right)$；②子群距离$d_G\left(H_1^L, H_2^L\right)$。对任意两个子群$H_1^L, H_2^L \prec G^L$，子群$H_1^L$与$H_2^L$之间的距离$d_G\left(H_1^L, H_2^L\right)$定义为$H_1^L$中的节点与$H_2^L$中的节点间距离的最小值

$$d_G\left(H_1^L, H_2^L\right) = \min\left\{ d_G(v_1, v_2) \middle|\ v_1 \in V\left(H_1^L\right), v_2 \in V\left(H_2^L\right)\right\}。 \tag{8.91}$$

类似地，如果在社群网络G^L中将子群H_1^L, H_2^L收缩为一个节点v_H^1, v_H^2，记收缩后的网络为$(G/H_1H_2)^L$，则子群距离$d_G\left(H_1^L, H_2^L\right)$为节点$v_H^1$与$v_H^2$在网络$(G/H_1H_2)^L$中的距离，即$d_G\left(H_1^L, H_2^L\right) = d_{G/H_1H_2}\left(v_1, v_2\right)$。

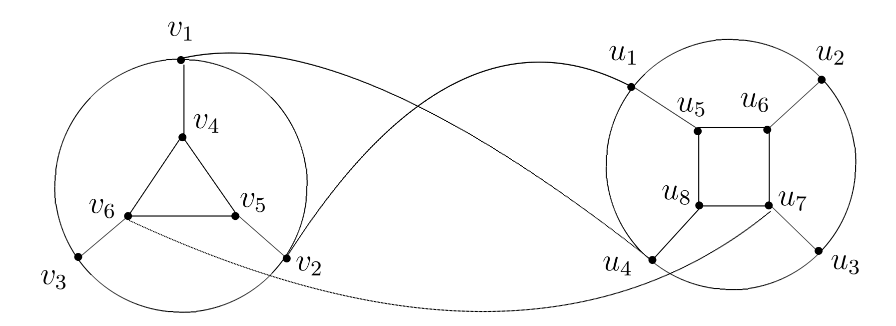


图8.19

例如，在图8.19中，节点v_4, v_5, v_6在网络中的生成子群为$\langle v_4, v_5, v_6\rangle_G = C_3^L$，节点$u_5, u_6, u_7, u_8$生成的子群为$\langle u_5, u_6, u_7, u_8\rangle_G = C_4^L$，相应地子群次分别为$\rho_G\left(C_3^L\right) = 4$，$\rho_G\left(C_4^L\right) = 5$且这两个子群间的距离为$d_G\left(C_3^L, c_4^L\right) = 1$，因为这两个子群之间存在一条连边$(v_6, u_7)$。

这样，类似于对个体影响力的刻画，子群影响力的度量可有应用子群次和子群间距离，将节点v_H在收缩网络$(G/H)^L$中的影响力定义为子群$H^L \prec G^L$的影响力，即子群H^L的影响力等同于节点v_H在收缩网络$(G/H)^L$中的影响力。这样一来，需要在计

算中，将网络节点v替换为v_H，将G^L替换为$(G/H)^L$，将$d_G(v,u)$替换为$d_{G/H}(v_H,u)$。同时，在收缩网络$(G/H)^L$中计算路径$\mathcal{P}(u,w)$的长度，即

$$
\begin{aligned}
C_\rho(v_H) &= \frac{\rho_{G/H}(v_H)}{|G/H|-1}, \quad C_B^2(v_H) = \frac{2\sum\limits_{u,w\in V(G/H)}|\mathcal{P}(u,w)(v_H)}{(|G/H|-1)(|G/H|-2)|\mathcal{P}(u,w)|},\\
C_B^1(v_H) &= \frac{|G/H|-1}{\sum\limits_{u\in V(G/H)} d_{G/H}(v_H,u)}, \quad C_B^3(v_H) = \sum_{u,w\in V(G/H)} \frac{|\mathcal{P}'(u,w)(v_H)}{|\mathcal{P}(u,w)|}
\end{aligned}
$$

而得到子群H^L的值$C_\rho(v_H), C_B^1(v_H), C_B^2(v_H)$和$C_B^3(v_H)$，并按同一种指标对社群网络中的所有子群$H^L$计算对应的影响力值排序，确定子群$H^L \prec G^L$影响力大小。

对任意给定的一个实数$k > 0$，社群网络G^L中次不小于k的节点生成的子网络G_{ke}^L称为k-核。注意，当k的取值不大于G^L中的最小次$\delta\left(G^L\right)$时k-核G_{ke}^L就是社群网络G^L自身；当k大于G^L中的最大次$\Delta\left(G^L\right)$时k-核G_{ke}^L是个空集$\emptyset$，即仅当$\delta\left(G^L\right) \leq k \leq \Delta\left(G^L\right)$时，$k$-核$G_{ke}^L$才是$G^L$的一个非空子网络。这时，$k$-核的平均次为

$$
\begin{aligned}
\langle\rho\rangle_{G_{ke}} &= \frac{1}{|G_{ke}|}\sum_{v\in V\left(G_{ke}^L\right)} \rho_G(v) = \frac{\left|G^L\right|}{\left|G_{ke}^L\right|}\sum_{v\in V\left(G_{ke}^L\right)} \frac{\rho_G(v)}{|G^L|}\\
&= \frac{\left|G^L\right|}{\left|G_{ke}^L\right|}\sum_{i\geq k} iP(i) = \frac{\sum\limits_{i\geq k} iP(i)}{\left|G_{ke}^L\right|/\left|G^L\right|} = \frac{\sum\limits_{i\geq k} iP(i)}{\sum\limits_{i\geq k} P(i)}。 \qquad (8.92)
\end{aligned}
$$

5.2.社群网络随机模拟. 社会学研究中有一个朋友关系的传递性假设，即朋友的朋友更可能成为新朋友，意即社群网络在一定程度上遵从小世界性质。注意，这里仅是"可能"而并非"一定"成为朋友，即不是完全确定假设。欧阳博士告诉惠子，社群网络的特点在于，一方面，它带有一定的主观能动性，不能采用规则网络刻画；另一方面，它的新增节点与连边不是完全随机的，不能采用ER随机网络刻画，即社群网络可在确定性与随机性有机结合的基础上进行刻画模拟。

1）小世界网络。规则网路的节点数、边数是给定的，WS小世界网络$\mathscr{N}(n,k)$是在规则网络上以一个常数概率p引入既有边重连得到的一种局部随机网络，是在社群规模、邻接关系数不变的情形下对以常数概率p随机改变个体邻接关系的刻画。这在社群网络中并不常见，但它却是第一个介于规则网络与完全随机网络之间的一种局部随机网络，表明社群网络居于"规则与随机"之间。

规则网络$N(n,k)$的每个节点次是常数k，WS小世界网络$\mathscr{N}(n,k)$节点的概率分

布为(8.51)，即$i \geq k$时有

$$P(i) = \sum_{s=0}^{\min\{i-k,k\}} \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} (1-p)^s p^{k-s} \frac{(kp)^{i-k-s}}{(i-k-s)!} e^{-kp}$$

而$i \leq k$ 时$P(i) = 0$。这样，应用(8.27)和(8.92)知WS小世界网络的平均次和h-核平均次分别为

$$\langle\rho\rangle_G = \sum_{i\geq 0} iP(i), \quad \langle\rho\rangle_{G_{ke}} = \sum_{i\geq h} iP(i) \text{ 。}$$

2）无标度网络。为解除群体规模的增长限制，BA无标度网路在规模可以任意增长，适于刻画群体中不断新增个体且新个体倾向与那些既有影响力大的个体建立关系的情形，一定程度上模拟了社会群体真实存在的异质性，即非均匀、非平衡和复杂而有序等社群特性，节点遵从幂律$P(k) \propto 2m^2k^{-3}$分布。这时，平均节点次为

$$\langle\rho\rangle_G \propto \sum_k k2m^2k^{-3} = 2m^2 \sum_k k^{-2} \propto 3\pi^2 m^2,$$

相应的h-核平均次为

$$\langle\rho\rangle_{G_{ke}} \propto \sum_{k\geq h} k2m^2k^{-3} = 2m^2 \sum_{k\geq h} k^{-2} \propto 3\pi^2 m^2 - 2m^2 \sum_{k=1}^{h-1} k^{-2} < 3\pi^2 m^2\text{。}$$

3）多重局域世界网络。多重局域世界网络既有新增节点、新增节点在对既有节点选择范围内优选连边，又有既有边的重连演化，对应于一个开放的群体，这在一定程度上刻画了群体规模的扩张、新增个体与既有个体的优选连接情形。同时，刻画了个体间既有关系的变化与调整，较接近社群关系真实的演化过程。它的次分布$P(k)$满足幂律$P(k) \propto k^{-\gamma}$且$\gamma > 2$是一个常数。对应地，社群网络的平均次

$$\langle\rho\rangle_G \propto \sum_k kk^{-\gamma} = \sum_k k^{1-\gamma}$$

是一个收敛级数，记为$\langle\rho\rangle_G^\infty$。相应地，社群网络中的$h$-核的平均次

$$\langle\rho\rangle_{G_{ke}} \propto \sum_k k^{1-\gamma} - \sum_{k<h} k^{1-\gamma} = \langle\rho\rangle_G^\infty - \sum_{k<h} k^{1-\gamma} < \langle\rho\rangle_G^\infty \text{ ,}$$

即$\langle\rho\rangle_{G_{ke}}$也是一个有限数，有一定的实际意义。

欧阳博士告诉惠子，真实的社群网络演化并不遵从既定的随机规律，包括新增节点与既有节点的连边概率、既有边的去边概率等都不是常数，上述随机模拟中之所以假设它们为常数是为模拟及模型的简化。这样一来，采用随机网络模拟社群网

络演化中的不确定性仅是一种近似，是一种社群网络平均演化规律的近似，这也再次印证了生物群体行为的复杂和人类认知的局限。

第6节 注释与评论

6.1. 自然系统的基元行为并非都是确定性的，有大量的基元行为不确定，甚至对一些自然系统的基元也无法确定，表现在人眼中即为复杂，包括基元个数巨大、基元间关系复杂，特别是基元及基元间作用关系存在随机性等情形，难于发现确定性的分析方法。复杂网络的兴起正是在这样一种状态下产生的，源于1998年美国两位物理学者Watts和Strogatz在《自然》杂志上发表的论文[WaS]中引入随机性，分析小世界网络的动力学行为，以及1999年Barabaśi和Albert在《科学》杂志发表的论文[BaA]中模拟马太效应，即"富者愈富、穷者愈穷"的原则定义随机连接，构造无标度网络并分析其动力增长模式，人们认为复杂系统可以由复杂网络进行分析与模拟，见陈关荣等人的[CWL]、何大韧等人的[HLW]。

6.2. 随机图是1960年由匈牙利的Eröds和Rényi在图的顶点间引入连边概率的一种图的随机模型，即顶点对间以一个固定的概率p连边，得到的不是一个图而是一个图族。在此基础上，他们发现图的一些性质对应于概率p增长是突然出现的，即存在一个阈值p_c使得$p \leq p_c$时不出现，但只要$p > p_c$这种图性质立刻出现，见Bollobás的随机图论[Bol1]和[Bol2]。Watts和Strogatz的小世界网络是在规则网络或m-正则图上按给定概率p引入断边和边的重连机制，可以刻画社群网络中的人际关系变化情形，得到的网络随机性介于m-正则图与Eröds和Rényi的随机图之间。这两类网络的节点数均是固定的；Barabaśi和Albert模拟互联网客户的增长，新加入节点以既有节点的度数大小定义连边概率，不限制网络规模增长。类似的思想为李翔和陈关荣等人借鉴，提出局域世界网络模拟世界多边贸易结构等，见文献[CWL]。

6.3. 疾病传播中，将所有人群分为易感人群、感染人群和移出者等三类的仓室传染模型是研究疾病传播规律的基础。针对患者自行康复、患者治愈后不具有免疫力和具有免疫力等三种情形，在一定的假设条件下可分别建立传染病预防中的三种基本模型，即SI模型、SIS模型和SIR模型并研究疾病传播规律。更进一步，人在社会交往中有一定的生活圈子，疾病是在人的社交网络中进行的传播，需研究疾病在社交网络中的传播规律，得到分枝传染模型中的SI模型、SIS模型和SIR模型，见文献[BrC]、[ChL]、[HLW]、[LuW]和[Mur]等。类似地，疾病传染模型也适用于对互联网上电脑病毒传播规律的刻画。

6.4. 社群网络是社会个体及其间关系构成的复杂网络，也是最难模拟的一种复

杂网络，因为人与其他动物最大的区别在于人有思想，并不完全遵从“道”。这样，上面的随机网络、小世界网络、无标度网络、局域世界网络等都可用于模拟社群网络，但都是在刻画某一社区或区域的局域社群，尚不能完整地刻画一个国家或全球社群。对于局域社区或区域上的社群网络，已有一些成熟的计算软件可对其进行定量分析，见文献[Sco]等。类似地，虽然动物的智商低于人，但人类对动物社群网络的发展规律知之甚少，且大多为空白。



海浪如云去却回，北风吹起数声雷。

— 北宋.曾巩《西楼》



第 9 章

网 络 算 术

****

一片两片三四片，

五六七八九十片；

千片万片无数片，

飞入梅花总不见。

— 清.郑板桥《咏雪》

第1节 网络真实

任一件事物均内蕴有组合结构的事实一再表明，人类对宇宙万物的认知应是基于其组合结构上的系统认知。这在一定程度上预示着对事物零散或孤立的认知不是人类追求的目标。这样，刻画一件事物的网络演化，进而认知事物就成了一种对万物认知的主流。那么，什么是网络，什么是网络流呢？欧阳博士告诉惠子，网络是自然界或人类社会中凭借人的肉眼可见"织网"的一种抽象，网络流是一种特殊的标号图G^L，如图9.1所示。这当中，网络流的特殊性在于映射L把G中的顶点和边映入实数集$\mathbb{R}$或$\mathbb{R}^+$而不是其他集合，是事物基元间作用在$\mathbb{R}$或$\mathbb{R}^+$中的一种数表象$L(v)$或$L(v,u), v,u \in V(G)$。在大多数情形下，实数$L(v,u)$视为一种在边(v,u)上的一个连续流，类似于城市供水管道中的水流量，对任一节点或任一截面$v \in V(G)$满足

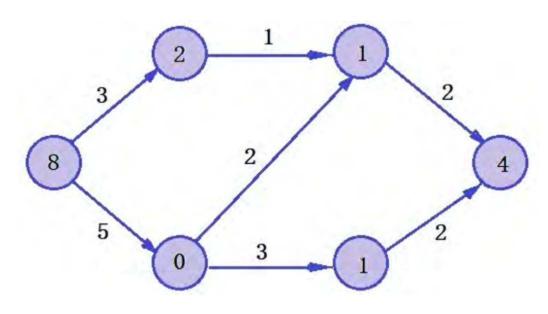


图9.1 网络流

$$\sum_{u \in N_G^-(v)} L(u,v) - \sum_{u \in N_G^+(v)} L(v,u) = L(v), \tag{9.1}$$

即节点或截面v上的流入与流出流量差与节点v上的库存流量相等，又称为连续流守恒定律。例如，图9.1中标号为0的那个节点，其输入流量为5，输出流量为$3+2=5$，即该节点的库存量为$5-3-2=0$。

注意，由于事物运动是绝对的，网络是事物内蕴结构与连续流运动相结合的产物，是站在事物微观层面上观测事物变化，一种可以同时刻画事物内因和表象的模型。听到这里，惠子有些不明白，问欧阳博士："爸爸，网络上体现的是连续流在基元间的流动，与事物变化有什么关系呢？"欧阳博士告诉惠子，在微观层面上，事物是以基元为节点构成的一个网络，基元间的动态作用即为这里的连续流；但在宏观层面上，网络体现的是事物本身，是系统认知一件事物的状态反映。惠子似乎有点领会了欧阳博士的思想，问道："那这样一来，是不是意味着人类只要理解了网络就可以理解宇宙万物呢？"欧阳博士回答说："你这个问题问得很好，是一般性解决人对万物系统认知需要思考的问题，网络在理论上的确有这种功用但网络流，包括复杂网络则不然，并不对应于所有事物而仅是其中很少的一部分！虽然在理论上，网络流体现了事物的系统基元及基元间的作用关系，但它是否系统地刻画了事物本身

并不确定。一方面，网络节点体现的可能仍是事物局部而非全部基元；另一方面，人们凭什么认为事物系统基元间的作用可以用一个实数刻画，为什么不能是多因素组成的数组或是别的非数量特征呢？答案是人在引入网络流时主观上这样定义！那么，人为什么要这样定义网络流呢？这不外乎两个原因：一是解决一些宏观实在网络，如公路、铁路等交通路网中的实际问题，如运输问题、中国邮递员问题等；二是简化研究对象，以便于数学处理。但这样一来，必然造成能够由网络流模型刻画的事物少或网络流真实的局限，不能对应于所有事物。”顿了一下，欧阳博士继续说，虽然人们比较热衷于网络流上的一些经济优化问题，但首先需要弄清楚的，是网络流能为哪些或哪类事物提供分析模型，是定性还是定量，是局部还是整体刻画等。这样，才能有效发挥网络在认知万物中的贡献。

1.1.网络流模拟. 万物均内蕴组合结构这一事实表明，网络可以模拟任何一个事物，特别是群体状态。按网络上流动介质分，网络在理论上能够模拟的事物种类包括：①群体状态，包括社会关系在个体间的传递过程，天体运行、物质构成以及原子、微观粒子等在物质合成与分解中的流动、细胞的新陈代谢、能量传递与转换等，如各种社群网络、星系、物质与生物构成和化学反应中的物质合成与分解、能量转化和传递等；②信息传播，包括信号包、病毒和谣言等信息流传播，一般不遵从能量守恒定律，如各类互联网、广播、电视、电话网等人类建设的数据传送网络，以及自然形成的频率频道等无线传播信道、量子纠缠中的隐变量或未知粒子传输等；③物质流动，即原子、分子组合而成的稳定物质在自然形成或人类既定通道上流动，一般遵从能量守恒定律。例如，大气中的二氧化碳、动物体内的血液、城市供水、供电、供热、供气中的血液、水流、电流、气体和热量的流动，以及陆、海、空和管道运输中的商品物流等，图9.2中所示的即为一个商品电商采购的物流过程。



图9.2 电商物流

需要注意的是，网络能模拟的事物类别①-③几乎涵盖了人类认知中的所有事物。那么，点边标号为实数的网络流模型能为①-③类的事物提供真实模拟吗？欧阳博士解释说，网络流如真能为这些事物提供模型，无异于断言网络流真实与自然真实的一致性而否定老子在《道德经》中“名可名，非常名”的断言，因为网络流是模拟事物的一种“名”。这个问题的核心，在于分析网络流是否可以模拟或是在什么条件下可以模拟①-③类事物的状态。

首先，网络流G^L中的边标号$L:V(G)\bigcup E(G)\to\mathbb{R}$或$\mathbb{R}^+$表明，网络流能够模拟事物的基元$v,u$间的作用可以表示为一个实数$L(v,u)\in\mathbb{R}$，这实际上是假设基元间的作用为均匀作用。这样一来，对那些基元间作用不均匀或不能表示为一个实数的事物，网络流模拟结果与真相不一致或仅是一种近似结果；其次，①-③类别中，哪些事物基元间的作用是均匀的，可以用一个实数刻画呢？欧阳博士告诉惠子，第①类事物中，天体运行中的引力、物质构成以及原子、微观粒子在物质合成与分解中的强核力、弱核力和电磁力、细胞的新陈代谢作用，以及能量的传递与转换都不是均匀作用。这当中，引力和电磁力是一种远程力，遵从平方反比定律；原子核中的强核力与弱核力的理论解释为介子交换力，细胞间的作用力为生物力，但机理并不清晰，都不能采用一个实数进行刻画。社会关系在个体间的作用决定于个体的主观意识，仅是一种定性而缺乏定量的刻画，尚没有一种理论能够刻画个体的主观意识。唯一可以断言的，是个体的主观决策受多种因素，类似于图9.3中表现的男女之间的“一见钟情”等主观行为是一种复杂的多因素而非单一因素决策，肯定不能用一个实数进行刻画；在第②类事物中，什么是信息并没有为科学全面揭示，仅是在体验上，信息能给人们带来知识的各类消息。一般地，信息借助于信息传播，由信息传播量定义。欧阳博士告诉惠子，有一个猜世界杯冠军的游戏，说是让一个没观看世界杯比赛的人向观看世界杯赛的人提问，条件是每次提问需要支付对方一美元。那么，这个人最少需支付多少美元才能知道哪只球队是冠军队呢？当然，欧阳博士解释说，可以一个一个球队地问，这个人需要支付对方三十二美元，但这是最经济的方法吗，当然不是！最经济的方法是对球队按1-32编号，然后提问：“冠军队在$1-16$号中吗？”假如对方回答“是”（肯定，记为1）则继续问：“冠军队在$1-8$号中吗？”，假如对方回答“不是”（否定，记为0）则冠军队的编号在$9-16$之中，追问：“冠军队在$12-16$号中吗？”这样，如果每支球队夺冠的概率相同，最多问五次就可以知道本届世界杯上的冠军，即最多需要支付对方五美元而不是三十二美元，因为$32=2^5$。美国信息论创始人C.E.香农按这种思想，以2为底计算对数，于1948年提出了信息熵的概念，即任一个随机变量ξ的信息熵$H(\xi)$为



图9.3 一见钟情

$$H(\xi)=-\sum_x P(x)\log_2 P(x), \tag{9.2}$$

单位是比特（bit），即一个二进制数字。这里，$P(x)$是随机变量$\xi=x$时的概率。例

如，猜世界杯冠军那个游戏ξ中，如果各球队夺冠概率相同，都是1/32，则(9.2)式对应的信息熵为$H(\xi)=-32\times(1/32)\log_2(1/32)=5$比特。现在的问题是："信息传递是一种均匀传递，能用一个实数刻画吗？"答案是否定的！以广播电视为例，播音需要播音员"抑扬顿挫"地播音，舞台表演需要演员"绘声绘色、惟妙惟肖"和"扣人心弦"的表演，经由信道传播都不能是均匀传递信息。否则，接收端获取的信息一定是呆板和枯燥，失去信息应有的价值。故此，用网络流刻画信息传播状态仅是一种理想假设的近似状态，获取的是一种大范围平均态，并非信息传播的真实面孔；在第③类事物中，人们对原子、分子等微观粒子组合而成的粒子或大分子在自然形成通道上流动在理论假设基础上构建了模型，一定程度上可以刻画这些粒子或生物大分子，如血液、二氧化碳的流动规律，但它们都不是均匀流动，不能采用实数进行刻画。然而，在一些人工设计并建造的物质流动系统中，如城市供水、供电、供热、供气和雨污水收集、排放系统，以及交通路网系统中的人流、物流等系统中，经人工控制可以实现均匀流动，采用网络流进行刻画与模拟。这当中，路网里程、运载量等指标常作为路网上的标号，并由此产生网络流上的"图上作业法"，以实现路网运输中的总吨-千米数最小以降低运输成本，缩短运输时间。

这样，网络虽然在理论上可以对应①-③类的事物，但真能用网络流模拟的主要是人工建造并控制的输运系统，包括供水、供电、供热、供气和雨污水收集、排放，以及交通路网中的物流系统等。这时，网络流作为一种分析方法，模拟结果与这类系统中的物质流动在人工控制下可实现一致，是事物局部性状的真实再现，而采用网络流模拟①-③类中的其他事物时，则是一种纯粹的人为假设或近似模拟，并非事物的本来面目，这是网络流作为认知万物方法的局限性，需在理论上对其进一步扩展，以适应认知万物的需求。

1.2.图上作业法. 网络流模拟生活中的物流系统，为解决一些实际优化问题，如物流中心的选置、寻求两点间的最短运输里程和寻求两点间最大运输量等提供了便利，可在网络流模型上寻找最小支撑树、两点间最短距离和最大流等图上作业法解决。注意，实际生活中对应的网络流G^L，其任一条边$(v,u),v,u\in V(G)$上的流量有一定限制条件，需满足$0\leq L(v,u)\leq c_{vu}$，称为边(v,u)上的容量许可。同时，一个标号映射$L:V(G)\bigcup E(G)\rightarrow\mathbb{R}^+$或流量称为是可行的，如果对任一条边$(v,u)\in E(G)$均有$0\leq L(v,u)\leq c_{vu}$。这样，网络流优化的实质，即是在可行流$L$中追求目标优化。



图9.4 容量限制

（1）最小支撑树. 在一个给定的路网结构G^L中，怎样选择一个城市作为物流中心使其到每个城市的运输距离和最小呢？欧阳博士告诉惠子，这个问题的实质是在容量许可条件$0\le L(v,u)\le c_{vu},(v,u)\in E(G)$下在网络$G^L$上寻找一棵支撑树$T$使边上的流量求和结果$\omega(T)$最小而忽略顶点标号大小，即组合优化问题

$$\omega(T)=\min\left\{\sum_{(v,u)\in E(T)}L(v,u)\,\middle|\,T^L\prec G^L\right\}。\tag{9.3}$$

这样，在既有网络G^L上，由物流中心发货到每座城市的运距都是最小。相应地，时间花费最短，运输成本最小，有一定的经济意义。

那么，怎样解决物流中心的选置问题呢？欧阳博士解释说，(9.3)式与容量许可条件$0\le L(v,u)\le c_{vu},(v,u)\in E(G)$合在一起是一个线性规划问题。这当中，约束条件为$0\le L(v,u)\le c_{vu},(v,u)\in E(G)$，目标函数为$\min\omega(T),T^L\prec G^L$为$G^L$的一颗支撑树。首先，可以找出既有网络$G^L$的所有支撑树$T$，再按(9.3)计算流量和$\omega(T)$最小的那棵树而得到问题的解，这对于那些规模不大的网络G^L可行。那么，有没有一种简单的方法在G^L上直接求出最小支撑树呢？答案是肯定的！欧阳博士解释说，一个图中的支撑树是包含该图中每个顶点的树，不含圈。这样一来，可以直接在图上作业，逐一去掉网络G^L中圈上流量大的边，得到的支撑树就是最小支撑树。这种方法称为图上作业中的破圈法，即“见圈破圈”直至图中不再含有圈，为一棵树为止，其破圈过程如下：

第1步. 给定一个连通网络G_0^L。当G_0^L不是一棵树时进行第2步。否则，直接进行第3步；

第2步. 在网络G_0^L中选择一个圈C^L及其上流量最大的一条边(v,u)，即$L(v,u)=\max\{L(x,y|(x,y)\in E(C^L))\}$，定义$G_1^L=G_0^L\setminus\{(v,u)\}$，以$G_1^L$替代$G_0^L$进行第1步；

第3步. 出现G_s^L中无圈时程序终止。这里，$G_0^L=G^L$，G_s^L为第s步中破圈后得到的网络，$s\ge1$。

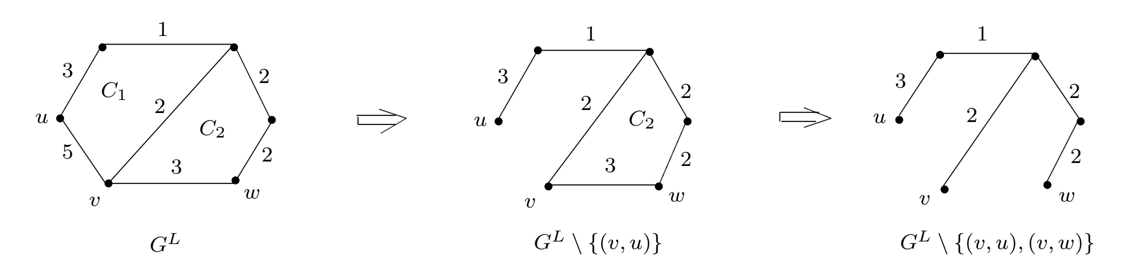


图9.5 最小支撑树算法

例如，图9.1中的网络G^L含有两个圈C_1,C_2，如图9.5所示。为得到网络G^L上的

最小支撑树，先对C_1采用破圈法去掉流量最大的边(v,u)得到网络$G^L\setminus\{(v,u)\}$，再对C_2采用破圈法去掉流量最大的边(v,w)得到网络$G^L\setminus\{(v,u),(v,w)\}$，而网络$G^L$去掉边$(v,u)$和$(v,w)$后已是一棵树。这样，由破圈法网络$G^L$的最小支撑树为$G^L\setminus\{(v,u),(v,w)\}$，破圈过程如图9.5所示。

（2）最短路问题. 最短路问题是出行、管道敷设、线路安装等实际工作中经常遇到的一个问题，即在给定的路网结构G^L中，怎样由一个地点选择出行路线到另一个地点距离最短？类似地，还有时间最短、收益最大或是投入最少等，均可以归并为在连通网络G^L和路网容量许可条件$0\leq L(x,y)\leq c_{xy},(x,y)\in E(G)$下，对任意给定两点$v,u\in V\left(G^L\right)$的优化问题

$$\begin{aligned}\min_{P\in\mathcal{P}(v,u)}\omega(P) &= \min_{P\in\mathcal{P}(v,u)}\sum_{(x,y)\in E(P)}L(x,y),\\ \max_{P\in\mathcal{P}(v,u)}\omega(P) &= \max_{P\in\mathcal{P}(v,u)}\sum_{(x,y)\in E(P)}L(x,y)。\end{aligned}\tag{9.4}$$

这里，$\mathcal{P}(v,u)$表示点v,u间的道路集合。与容量许可条件结合，(9.4)中最小或最大问题都是线性规划问题。

那么，欧阳博士问惠子："(9.4)式是在什么范围内求最小或最大呢？"惠子回答说："(9.4) 求最小或最大的范围应是v到u的所有道路$\mathcal{P}(v,u)$。"欧阳博士肯定了她的回答："正确！只要知道集合$\mathcal{P}(v,u)$就可以求知最小或最大的$\omega(P)$，对于规模较小的网络可以这样计算。但一般地，确定集合$\mathcal{P}(v,u)$并不是一件容易的事情。以求最小距离为例，怎样由一个节点出发一步一步地求知v到u最短道路呢？"惠子想了想回答说："是不是可以先在v的邻域中选择边上流量最小的一个节点v_1，再在v_1的邻域中选择边流量最小的一个节点v_2，$\cdots$，这样一步一步地选择，直到选出节点u 为止。这个选择过程中的每一步都是选择的边流量最小节点，加在一起应该是一条v到u的最短道路。"

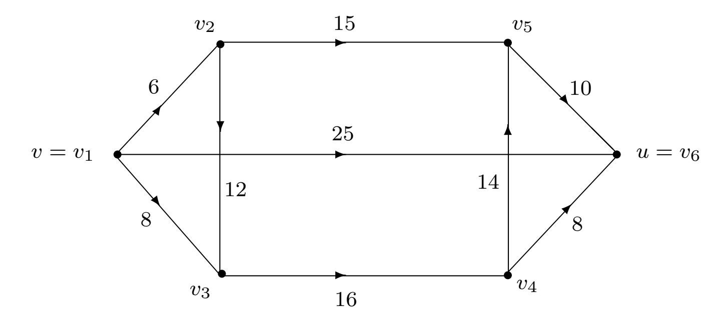


图9.6计算最短道路实例

欧阳博士反问惠子："你怎么确定这样选择的道路一定是一条v到u的最短道路呢？"惠子解释说："我每一次都是在上一个节点的邻域中选择的边流量最小的一

个节点，加在一起不正是边流量和最小的一条v到u道路吗!”欧阳博士要求她确定图9.6中所示网络上节点v到u的一条最短道路。惠子按照她自己的想法，一步一步地确定出节点v_1, v_2, v_3, u得到一条v到u的道路$vv_1v_2v_3u$，算出这条道路上的流量和44。欧阳博士问她:“你这样确定的v到u的道路是最短道路吗？”惠子看了看图9.6中的网络，回答说:“好像不是v到u的最短道路，因为图中节点v与u间存在一条长为25的边，小于道路$vv_1v_2v_3u$上的流量和44，但我想不出错在什么地方，爸爸!”欧阳博士告诉惠子，她在节点邻域中选择边流量最小节点作为确定v到u道路上节点的做法，仅是在节点临边上比较流量大小，不是在v到u的所有道路上比较流量和的大小。例如，在图9.6所示网路中，在选择节点v_1后，是在节点v_1的邻域中选择的节点v_2，在节点v_2的邻域中选择的节点v_3，最后是节点u，没有再与v到u的其他道路，如道路vu上的流量和进行比较，这样得到的v到u的道路当然不一定是最短道路了。听完欧阳博士的解释，惠子有点嘟囔着:“我想简单了，看来还得一步一步地计算。”欧阳博士鼓励她说:“你的想法也不全错，在邻接节点中选边流量最小确定最短距离是正确的!唯一需要增补的，是对流量和的大小进行比较。”

那么，怎样确定v到u的最小距离与最短道路呢？欧阳博士告诉惠子，在邻接节点中选边流量最小的节点基础上，为实现对v到u的所有道路上流量和的比较，有一种图上作业法，称为Dijkstra算法或贪婪算法，一步一步贪婪地计算v到其他任一节点u的最小距离，构造节点集合O和$P = V(G) \setminus O$，直到$P = \emptyset$时为止。这种算法终止后，可以得到节点v到G^L上每一节点u的最小距离d_{vu}和最短道路，步骤如下：

假设G^L是一个连通的有向网络，采用整数$1, 2, \cdots, p = |G|$标记G^L的顶点，设其始点v和终点u上的标号分别为1和p，边(i, j)上的流为$L(i, j)$。

第1步. 取初值$O = \{1\}$，$P = \{1, 2, \cdots, p\} \setminus O = \{2, 3, \cdots, p\}$，初值$u_{11} = 0$且对任一节点$j \in N_G(1), d_{1j} = L(1, j)$。否则，$d_{1j} = \infty$；

第2步. 在点集P中寻找一个节点k使得$d_{1k} = \min\{d_{1j}, j \in P\}$，用$O \bigcup \{k\}$取代集合$O$，集合$P \setminus \{k\}$取代集合$P$。这时，若$P \neq \emptyset$执行第3步，若$P = \emptyset$执行第4步；

第3步. 对任一节点$j \in P$采用如下方法修正d_{1j}：如果$d_{1j} > d_{1k} + L(k, j)$，则用$d_{1k} + L(k, j)$取代$d_{1j}$；如果$d_{1j} \leq d_{1k} + L(k, j)$，则$d_{1j}$和$R$不变。返回第2步在点集$P$中选择节点；

第4步. 重复第2步-第3步，直至$P = \emptyset$时计算终止。

这样，在贪婪算法中每一步确定的节点k，包括节点p都是到节点1距离最小的节点，并在算法终止时得到所有节点到节点1的最短距离和一条节点1到p的最短道路。例如，图9.6中节点v到u的最短距离一步一步计算如下：

①$P = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, d_{12} = 6, d_{13} = 8, d_{14} = d_{15} = \infty, d_{16} = 25 \to$ ②$P =$

$\{v_3,v_4,v_5,v_6\},d_{13}=8,d_{14}=\infty,d_{15}=21,d_{16}=25\to$ ③$P=\{v_4,v_5,v_6\},d_{14}=24,d_{15}=21,d_{16}=25\to$ ④$P=\{v_4,v_6\},d_{14}=24,d_{16}=25\to$ ⑤$P=\{v_6\},d_{16}=25$，即节点v到u的最短距离为25。同时，采用逆推法得到v到u的最短道路为vu。

现在，在图9.6中去掉边(v,u)得到网络$G^L\setminus\{(v,u)\}$。这时，按贪婪算法，节点v到u在网络$G^L\setminus\{(v,u)\}$中的最短距离可一步一步地计算如下：

①$P=\{v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\},d_{12}=6,d_{13}=8,d_{14}=d_{15}=d_{16}=\infty\to$ ②$P=\{v_3,v_4,v_5,v_6\},d_{13}=8,d_{15}=21,d_{14}=d_{16}=\infty\to$ ③$P=\{v_4,v_5,v_6\},d_{14}=24,d_{15}=21,d_{16}=\infty\to$ ④$P=\{v_4,v_6\},d_{14}=24,d_{16}=31\to$ ⑤$P=\{v_6\},d_{16}=31$，即节点v到u的最短距离为31。注意，$d_{16}=31$是在④中由$d_{16}=d_{15}+L(v_5,v_6)$得到的，而$d_{15}=21$是由$d_{15}=d_{12}+L(v_2,v_5)$得到的。这样，采用逆推法知v到u的最短道路为vv_2v_5u。

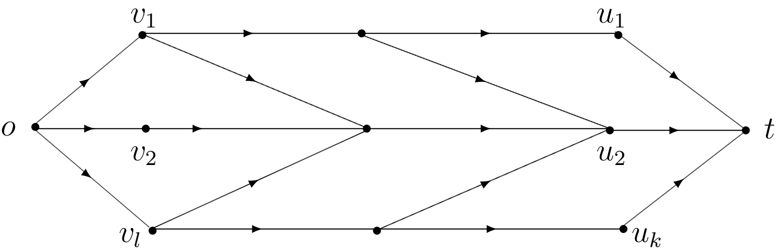


图9.7 最大流问题

（3）最大流问题. 路网、管道和载体容量等限制以及节点流量守恒条件表明，讨论怎样利用装置能力在网络G^L上实现由一个节点o到另一个节点t运载量最大是一个有价值的问题。这时，假设f是网络G^L上的一个可行流且中间节点的库存为0，即流入量等于流出量，则节点o的流出量$v_o^+(f)$与节点t的流入量$v_t^-(f)$相同，即

$$v_o^+(f)=\sum_{v\in N_G^+(o)}L(o,v)=\sum_{u\in N_G^-(t)}L(u,t)=v_t^-(f)。\tag{9.5}$$

节点o称为网络的源，节点t称为网络的汇，如图9.7所示。这样，网络G^L上的最大流问题等同于线性规划问题

$$\begin{cases}\max v_o^+(f)=\max v_t^-(f),\\ v\neq s,t\ \Rightarrow\ \sum\limits_{u\in N_G^-(v)}f(u,v)=\sum\limits_{w\in N_G^+(v)}f(v,w),\\ (x,y)\in E\left(G^L\right)\ \Rightarrow\ 0\leq f(x,y)\leq c_{xy}\ 。\end{cases}\tag{9.6}$$

这里，$f(x,y)$和c_{xy}分别表示可行流f在边(x,y)上的流量和容量许可值。

那么，怎样求解动态规划问题(9.6)呢？欧阳博士告诉惠子，在理论上可以直接求解线性规划问题(9.6)，但当网络G^L规模较大时，直接求解(9.6)涉及的计算量大，

是一件很繁琐的事情，需要结合最大流问题的特点进行简化。

首先，将G^L中的节点分为V_1, V_2两部分，使得$V\left(G^L\right) = V_1 \bigcup V_2, V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$且网络源$o \in V_1$，汇$t \in V_2$。记$V_1$与$V_2$间的边集为$E_G\left(V_1, V_2\right)$，则易知$G^L \setminus E_G\left(V_1, V_2\right)$是一个不连通网络，称$E_G\left(V_1, V_2\right)$为$G^L$上的一个割集，见图9.8；其次，对网络$G^L$上的任一个可行流$f$，边集$E_G\left(V_1, V_2\right)$中由$V_1$中的一个节点$v_1$到$V_2$中一个节点$u_2$的边集记为$E_G^+\left(V_1, V_2\right)$，边上的流量记为$f^+(v_1, u_2)$，由$V_2$中的一个节点$v_2$到$V_1$中一个节点$u_1$ 的边构成的集合记为$E_G^-\left(V_1, V_2\right)$，边上的流量记为$f^-(v_2, u_1)$，则有

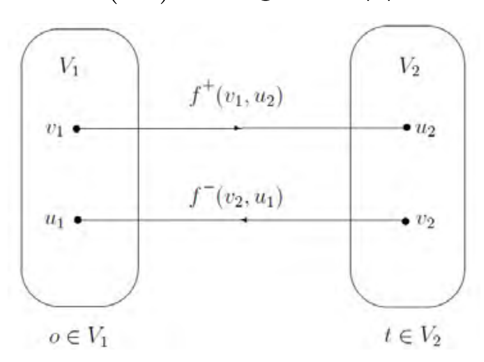


图9.8 割集

$$E_G\left(V_1, V_2\right) = E_G^+\left(V_1, V_2\right) \bigcup E_G^-\left(V_1, V_2\right), \quad E_G^+\left(V_1, V_2\right) \bigcap E_G^-\left(V_1, V_2\right) = \emptyset$$

注意，对G^L上的任一个可行流f在割集$E_G\left(V_1, V_2\right)$中，可能是由V_1中的一个节点到V_2中一个节点，与源o到汇t的方向相同，也可能是由V_2中的一个节点到V_1中一个节点，与源o到汇t的方向相反。二者的流量差代表着实际由源o流入汇t的流量，称为割集$E_G\left(V_1, V_2\right)$的容量$\mathrm{Cap}\left(V_1, V_2\right)$，定义为

$$\mathrm{Cap}\left(V_1, V_2\right) = \sum_{(v_1, u_2) \in E_G^-(V_1, V_2)} f^-(v_1, u_2) - \sum_{(v_2, u_1) \in E_G^+(V_1, V_2)} f^+(v_2, u_1)。 \tag{9.7}$$

例如，图9.6中$\{(v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_4)\}$为点集$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$与$V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$间的一个割集，相应的容量$\mathrm{Cap}\left(V_1, V_2\right) = 15 + 25 + 16 = 56$。

那么，网络最大流$\max v_o^+(f)$与割集容量是什么关系呢？欧阳博士解释说，对网络流G^L上的任一个可行流f，由割集的定义不难看出，去掉源o与汇t中的任一个割集，源o与汇t间不再连通。所以，任一个可行流f都是经由割集从o到t，不会超过o与t之间任一割集$E_G(V_1, V_2)$的容量，即有$v_o^+(f) \le \mathrm{Cap}\left(V_1, V_2\right)$。1956年，网络流理论的创始人L.R.Ford 和D.R.Fulkerson进一步证明，网络G^L的最大流$\max v_o^+(f)$等于最小割集上的容量$\min \mathrm{Cap}\left(V_1, V_2\right)$，按照这一结论，求解线性规划问题(9.6) 转化为计算网络G^L割集最小容量的图上作业法或标号算法，即由一个可行流f开始，寻求这个可行流的增广链，即在容量许可下增加$f^-(v_1, u_2)$或减少$f^+(v_2, u_1)$，提高割集$E_G(V_1, V_2)$的容量以调整f，得到一个流量比原可行流大的可行流f'，且调整后的可行流在各中间节点仍满足守恒条件。这样，一步一步地迭代下去，直到G^L不再存在由源o到汇t 的增广链为止，得到网络G^L的最大流。

1.3.动态网络流. 网络流G^L刻画的行为是一种节点间以常量流动且这种流动沿着既定途径进行的行为。在网络流G^L上寻找最小支撑树、两点间的最短距离和最大流，仍是站在微观层面对网络局部特征的一种刻画。类似地，复杂网络刻画的是节点间连边的随机变化，不涉及节点间作用的定量刻画。那么，怎样拓广网络流以对节点间非常量流动或作用行为的刻画呢？欧阳博士告诉惠子，一种自然的想法是按照最大流最小割定理中的那种处理办法，即将节点间的常量流拓广为动态流，一种因时间和其他参数而变化的动态网络流且仍遵从节点守恒定律，即一种因时间和其他参数变化的动态网络流$G^L[t;\mathbf{x}]$。这里，

$$V\left(G^L[t;\mathbf{x}]\right)=V\left(G^L\right),\quad E\left(G^L[t;\mathbf{x}]\right)=E\left(G^L\right),$$
$$L:V(G^L)\to\mathscr{F}\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}\right),\quad L:E(G^L)\to\mathscr{F}\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}\right)$$

且对任一节点$v\in V\left(G^L(t;\mathbf{x})\right)$遵从节点守恒律(9.1)，即

$$\sum_{u\in N_G^-(v)}L(u,v)(t;\mathbf{x})-\sum_{u\in N_G^+(v)}L(v,u)(t;\mathbf{x})=L(v)(t;\mathbf{x})。\qquad(9.8)$$

这当中，$n\geq 1$是一个整数，$t\in\mathbb{R}^+,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，$\mathscr{F}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$为从空间$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$映入$\mathbb{R}$的映射$f$组成的集合。一般地，默认节点标号$L$按等式(9.8)对任一节点$v\in V\left(G^L(t;\mathbf{x})\right)$标号，则一个动态网络流$G^L[t;\mathbf{x}]$可由其上的边标号表示，如图9.9所示。

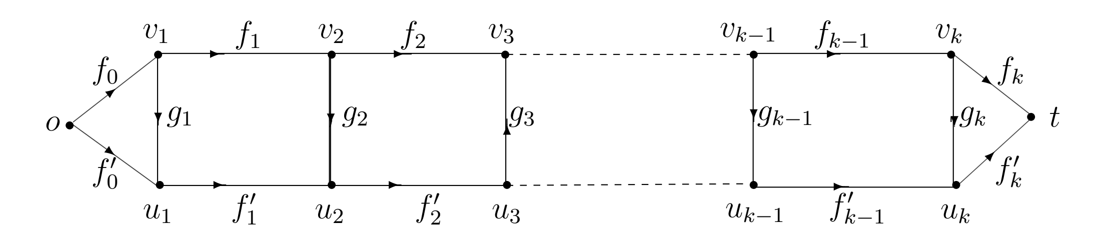


图9.9 网络状态

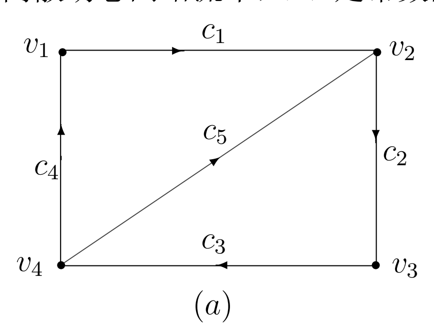
按动态网络流G^L中的标号映射$L:E(G^L)\to\mathscr{F}\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}\right)$是离散还是连续的不同，动态网络流分为离散型和连续型两种:

离散动态网络流. 对任一边$(v,u)\in E\left(G^L\right)$，边流量$L(v,u)$只有有限个或可列个值$L_1(v,u),L_2(v,u),\cdots,L_n(v,u),\cdots$时对应的网络流称为离散动态网络流，记为$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$，即

n	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
$G^L[n]$	G^{L_1}	G^{L_2}	$\cdots$	G^{L_k}	$\cdots$

这当中，对任一整数$n\geq 1$和两条边$(v_1,u_1),(v_2,u_2)\in E\left(G^L\right)$，$\{L_n(v_1,u_1)\}_1^\infty$与$\{L_n(v_2,u_2)\}_1^\infty$是两个数列，不一定相同。特别地，对任一整数$n\geq 1$和任一条

边$(v,u)\in E\left(G^L\right)$，如果$L_n(v,u)=c_{vu}$是一个常数，$G^{L_n}$退化为一个网络流$G^L$，离散动态网络$\left\{G^L[n]\right\}_1^{\infty}=\left\{G^L\right\}_1^{\infty}$，即每一项都是网络流$G^L$。例如，图9.10所示的两个离散动态网络流中，(*a*) 是常数网络流，(*b*) 是动态网络流。



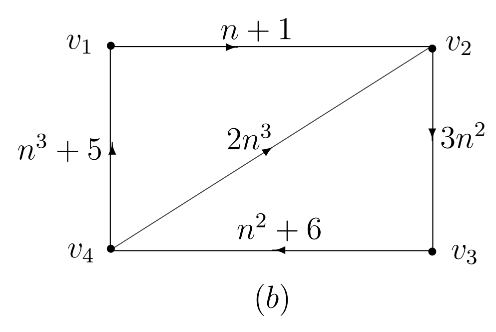
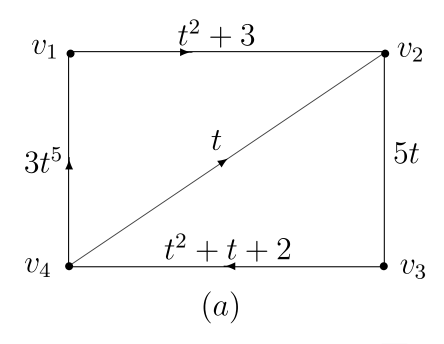


图9.10 离散动态网络流

连续动态网络流. 对任一边$(v,u)\in E\left(G^L\right)$，边$(v,u)$上的流量$L(v,u)$是一个连续函数$f_{vu}(t,\mathbf{x})$时对应的网络流称为连续动态网络流，记为$G^L[t,\mathbf{x}]$。这里，$t\in\mathbb{R}^+$表示时间，$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$为影响网络变化的$n\geq 1$个变量。

类似地，对任意两条边$(v_1,u_1),(v_2,u_2)\in E\left(G^L\right)$，函数$f_{v_1u_1}(t,\mathbf{x})$与$f_{v_2u_2}(t,\mathbf{x})$不一定相同。这样，映射$L$是图$G$上的一个函数族$\left\{f_{vu}(t,\mathbf{x}):(v,u)\in E\left(G^L\right)\right\}$。特别地，如果对任一条边$(v,u)\in E\left(G^L\right)$，$f_{vu}(t,\mathbf{x})=f_{vu}[t]$仅是时间$t$的函数，则连续动态网络$G^L[t,\mathbf{x}]$仅依时间$t$变化，称其为是时间网络流$G^L[t]$；更进一步，如果$f_{vu}(t,\mathbf{x})=c_{vu}$均是常数，则时间网络流$G^L[t]$退化为常数网络流。例如，图9.11所示中动态网络流中，(*a*) 是一个时间网络流，(*b*) 是一个连续动态网络流。



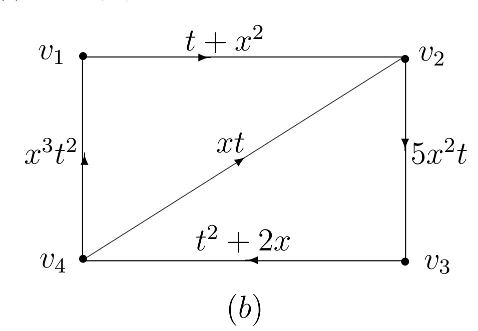


图9.11 连续动态网络流

第2节 网络序列

任何一件事物都处在发展和变化之中，不变或静止仅是相对于人在某一时刻的观测而言。这样一来，网络流是在既定路径上物质的流动，是物质相对于路径的局部运动与变化，动态网络流是路径和物质流动同时发生变化的情形。惠子对动态网

络在认知事物真实中的必要性有些疑惑，问欧阳博士："牛顿等人的质点力学和刚体力学、爱因斯坦与麦克斯韦等人的场论已足以解释客观世界中的大多自然现象，为什么还要构建动态网络流呢？它对认知万物似不是那么必要呢!"欧阳博士告诉她："质点、刚体和场等都是规则的几何形体，可人眼中的事物，尤其是那些带有一定生命体征的事物是不规则的，如生物个体或群体，一般情况下很难用质点、刚体或是场等模型进行刻画，这就需要构建新的认知模型，动态网络流正是在这样一种情形下提出的。"见惠子还是有些不理解，欧阳博士问她："现代生活中，人们怎样记录下一个物体的运动与变化呢？"惠子回答说："可以用照相机或摄像机对物体连续拍照，记录下物体在每一时刻的运动状态，再将它们组合在一起形成一个连续的过程，类似于图9.12中记录小女孩由状态（1）到（4）跑动的照片记录一样。"欧阳博士解释说，不管是照相机还是摄像机，都是对运动物体一幅一幅地拍照。那么，欧阳博士问她："为什么播放照相机拍照展现的是一张一张照片而摄像是物体连续运动的图像呢？"惠子回答说"您告诉过我，一幅物象在人的视网膜上有0.1-0.4秒左右的视觉暂留，摄像速度只要快到每幅物象间隔小于人的视觉暂留时间，人在观看时一般就分辨不出一幅一幅的照片而仅是感觉景物在连续地运动或变化。"

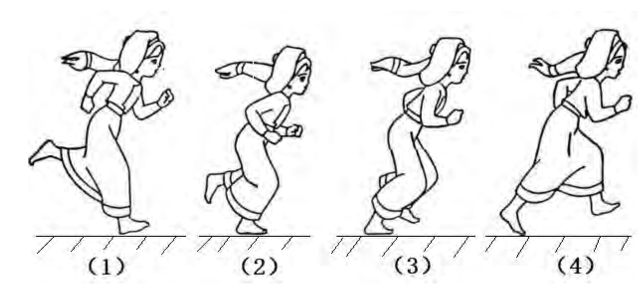


图9.12 小女孩跑步

欧阳博士点了点头问她："小女孩的跑步动作能否简化为一个质点、刚体或场？"惠子有些疑惑地回答："好像不能，因为小女孩跑步时动作是柔性的，不能简化为一个质点或刚体，也不能看作是一个场。"欧阳博士进一步提示她，说图9.12是一个小女孩在跑步的简笔画，是小女孩外形的表现。更进一步，可以在小女孩外形表现线条的转角处或是端部增加一些节点。这样一来，小女孩跑步可以看作是一个网络流在运动，网络中的流量是她体内能量经由腿的奔跑和手部的摆动在节点间的体现。欧阳博士问惠子："奔跑动作（1）-（4）体现在小女孩腿上传递的力是否始终一样？"惠子回答说："按我自己的跑步体会，加速或减速跑时腿上传递的力是渐强或渐弱，匀速跑时腿上传递的力始终是一样，人也感觉轻松些。"欧阳博士肯定地说："很好！这样一来，用网络流体现小女孩奔跑动作（1）-（4）得到的不正是一个动态网络流吗!"听欧阳博士这样解释，惠子对动态网络流有了些体会："可不！小女孩奔跑用网络流表现正是一个动态网络流!"欧阳博士告诉她，类似记录小女孩跑步动作的一幅幅照片，动态网络流是对事物内部作用与外在表现的一个抽象网络流序列，其中的每一个网络流都是事物在某一时刻状态的记录或情景再现。

2.1.网络流序列. 对一个给定的图G，一个网络流序列是按照一定次序排列起来的一列网络流$G^{L_1}, G^{L_2}, \cdots, G^{L_n}, \cdots$，即离散动态网络流$\left\{G^L[n]\right\}_1^{\infty}$并在其上定义加法"+"和乘法"·"运算如下：

$$G^L + G^{L'} \ = \ G^{L+L'}, \quad G^L \cdot G^{L'} \ = \ G^{L\cdot L'} \text{。} \tag{9.9}$$

这里，对任一边$(v,u) \in E(G)$，映射$L+L'$和$L \cdot L'$定义为

$$L + L'(v,u) = L(v,u) + L'(v,u), \quad L' \cdot L(v,u) = L'(v,u)L(v,u), \tag{9.10}$$

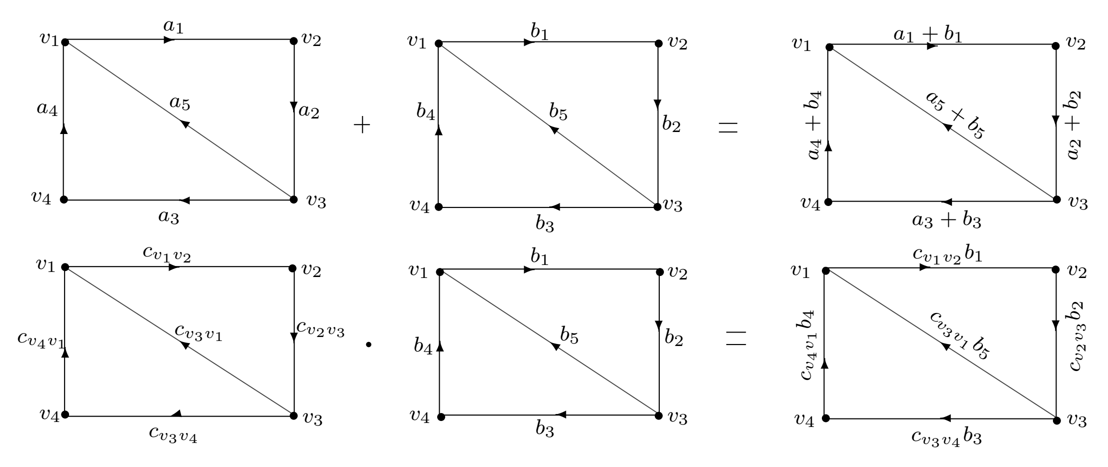


图9.13 网络流运算

如图9.13所示。同时，定义加法"+"的逆运算减法−，以及对任一边$(v,u) \in E(G)$均有$L'(v,u) \neq 0$时乘法"·"的逆运算分别为

$$G^L - G^{L'} = G^L + G^{-L'} = G^{L-L'}, \quad \frac{G^L}{G^{L'}} = G^L \cdot G^{\frac{1}{L'}} = G^{\frac{L}{L'}}, \tag{9.11}$$

则类似于实数集$\mathbb{R}$，可以对$\left\{G^L[n]\right\}_1^{\infty}$中的网络流进行四则运算。特别地，如对任一边$(v,u) \in E(G)$均有$L(v,u) = c \in \mathbb{R}$，则映射$L$简记为$c$，即有(9.9)式的特殊情形$c \cdot G^L = G^{cL}$和$G^L - G^{L'} = G^L + \left(-G^{L'}\right)$。

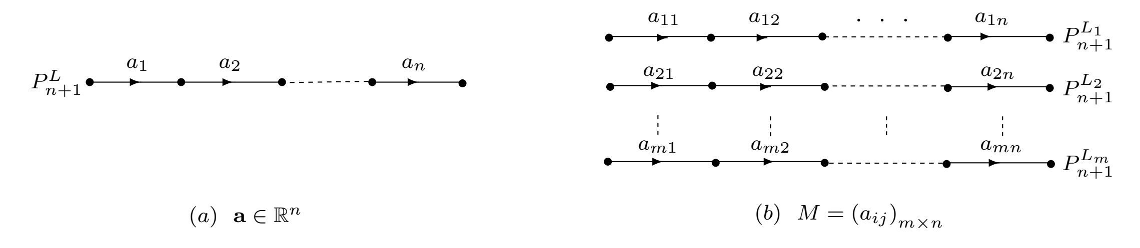


图9.14 向量与矩阵对应的网络流

注意，向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}$和矩阵$(a_{ij})_{m\times n}, (b_{ij})_{m\times n}$上的加法"+"和数乘"·"运算可以视作在表格既定位置上的运算规则，也可以看作是特定网络流上的运算规则。一

般地，把一个向量$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$和矩阵$M=(a_{ij})_{m\times n}$中的元分别视为图$P_{n+1}$和$mP_{n+1}$ 上的网络流，如图9.14中图（a）和（b）所示，则向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$和矩阵$(a_{ij})_{m\times n},(b_{ij})_{m\times n}$上的加法“+”与数乘“·”运算是网络流加法“+”和数乘“·”运算(9.9)和(9.10)在$G^L=P_{n+1}^L$或mP_{n+1}^L时的一种特殊情形。这样一来，网络流加法“+”和数乘“·”运算(9.9)是向量、矩阵上的加法“+”与数乘“·”运算的一种推广。

一个网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$由其一般项$G^{L_n}$确定，称为该网络流序列的通项，即对任一条边$(v,u)\in E\left(G^L\right)$知晓标号$L_n(v,u)$或标号$L_n(v,u)$的确定规则。特别地，如果$L_n(v,u)$可以一般性地表示为$n$的已知函数$f_{vu}(n)$，即$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$的通项$G^{L_n}$ 中$L_n:(v,u)\to f_{vu}(n)$，则可以确定网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$。那么，怎样得到一个网络流序列的通项$G^{L_n}$呢？欧阳博士解释说，一般地，确定通项$G^{L_n}$需要应用(9.9)和(9.10)式建立第$n$项$G^{L_n}$与前$n-1$项$G^{L_1},G^{L_2},\cdots,G^{L_{n-1}}$间的递归关系。理论上，如果网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$刻画的是一个事物的连续变化状态，则$G^{L_n}$作为事物外在表现或观测的“果”就应由“因”产生，包括内因和外因。在网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$的演化过程中，一般将演化归结为随参数$n$变化，即不存在外因变量$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$作用。这样，$G^{L_n}$就由已出现的状态$G^{L_1},G^{L_2},\cdots,G^{L_{n-1}}$决定，蕴含着$G^{L_n}$与$G^{L_1},G^{L_2},\cdots,G^{L_{n-1}}$间存在着一种递归关系。

1）递推关系. 递推关系可以直接确定网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$中的通项$G^{L_n}$，是构造网络流序列一种常见方法。这时，网络流$G^{L_n}$是在$G^{L_{n-1}}$基础上增加一已知网络流$G^{\Delta L_n}=G^{L_{f(n)}}$ 演化，即

$$G^{L_n}=G^{L_{n-1}}+G^{\Delta L_n}=G^{L_{n-1}}+G^{L_{f(n)}}\text{。}\tag{9.12}$$

这里，$G^{L_{f(n)}}$中的$L_{f(n)}$为对任一边$(v,u)\in E(G)$，$L_{f(n)}:(v,u)\to f_{vu}(n)$为$n$的一个已知函数。这样，由(9.9)可知

$$G^{L_n}=G^{L_{n-1}+L_{f(n)}}=\cdots=G^{L_1+\sum\limits_{i=2}^{n}L_{f(i)}},\tag{9.13}$$

即标号映射

$$L_n=L_1+\sum_{i=2}^{n}L_{f(i)}\text{。}\tag{9.14}$$

例如，假设一个图G上边$(v,u)\in E(G)$的权重为w_{vu}，且$L_1(v,u)=w_{vu},f_{vu}(n)=w_{vu}n$，则有

$$\begin{aligned}L_n(v,u)&=L_1(v,u)+\sum_{i=2}^{n}L_{f(i)}(v,u)\\&=w_{vu}+\sum_{i=2}^{n}w_{vu}i=w_{vu}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}w_{vu}\text{。}\end{aligned}$$

特别地，如果对任一边$(v,u)\in E(G)$，$f_{vu}(n)=c_{vu}$是一个常数，即$G^{\Delta L_{f(n)}}=G^{L_c}$，则由(9.13)知，这时网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^{\infty}$的通项为

$$G^{L_n}=G^{L_1+\sum\limits_{i=2}^{n}L_c}=G^{L_1+(n-1)L_c}\ \Rightarrow\ L_n(v,u)=L_1(v,u)+(n-1)c_{vu}\text{。}\tag{9.15}$$

2）递归关系. 递归关系是G^{L_n}与$G^{L_1},G^{L_2},\cdots,G^{L_{n-1}}$间的一种隐函数关系，即

$$\mathscr{F}\left(G^{L_1},G^{L_2},\cdots,G^{L_n}\right)=G^{\mathscr{F}(L_1,L_2,\cdots,L_n)}=\mathbf{O}\text{。}\tag{9.16}$$

这里，符号$\mathbf{O}$表示对任一边$(v,u)\in E(G)$均有$L_0:(v,u)\to 0$的网络流G^{L_0}，即

$$\mathscr{F}\left(L_1(v,u),L_2(v,u),\cdots,L_n(v,u)\right)=0\text{。}\tag{9.17}$$

虽然在理论上，在$G^{L_1},G^{L_2},\cdots,G^{L_{n-1}}$已知的条件下可以由方程(9.16)或(9.17)确定G^{L_n}，但想用初等方法求解方程(9.16)或(9.17)，得到G^{L_n}则可能是一件十分困难的事情。这当中，相对容易的是方程(9.16)或(9.17)为线性方程的情形，即存在网络流$G^{L_{c_1}},G^{L_{c_2}},\cdots,G^{L_{c_n}}$使

$$G^{L_{c_1}}\cdot G^{L_1}+G^{L_{c_2}}\cdot G^{L_2}+\cdots+G^{L_{c_n}}\cdot G^{L_n}=\mathbf{O},\tag{9.18}$$

称为网络流的n-阶线性递归方程。这当中，对任一边$(v,u)\in E(G)$和任一整数$1\le i\le n$有$L_i:(v,u)\to c_{vu}^{[i]}\in\mathbb{R}$为一个常数且$c_{vu}^{[n]}\neq 0$。这样，由

$$G^{L_n}\ =\ \sum_{i=1}^{n-1}\frac{G^{L_{c_i}}}{G^{L_{c_n}}}\cdot G^{L_i}\ =\ G^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{L_{c_i}}{L_{c_n}}L_i}\tag{9.19}$$

可以一步一步地计算出G^{L_n}。这当中，2-阶递归方程，即

$$G^{L_{c_{n-2}}}\cdot G^{L_{n-2}}+G^{L_{c_{n-1}}}\cdot G^{L_{n-1}}+G^{L_{c_n}}\cdot G^{L_n}=\mathbf{O}\tag{9.20}$$

最受人们关注，因为它是2-阶递归数列的一种推广。例如，假设$L_{c_{n-2}}=a_{n-2}$，$L_{c_{n-1}}=a_{n-1}$和$L_{c_n}=a_n$为不依赖于边$(v,u)\in E(G)$的常数，则方程(9.20)可进一步简写为

$$a_{n-2}G^{L_{n-2}}+a_{n-1}G^{L_{n-1}}+a_nG^{L_n}=\mathbf{O},\tag{9.21}$$

即对任一边$(v,u)\in E(G)$均有$a_{n-2}L_{n-2}+a_{n-1}L_{n-1}+a_nL_n=0$，对应的是递归方程为$a_{n-2}x_{n-2}+a_{n-1}x_{n-1}+a_nx_n=0$的数列$\{x_n\}_1^{\infty}$。例如，欧阳博士告诉惠子，斐波那契数列$\{F_n\}_1^{\infty}$满足递归关系$F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$，是网络流方程(9.21)中的$a_n=$

$-1, a_{n-1}=a_{n-2}=1$和$L_n:(v,u)\to F_n$，即任一边(v,u)上的流量均为F_n的情形。这时，网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^{\infty}$对应的是斐波那契数列$\{F_n\}_1^{\infty}$。

一般地，欧阳博士解释说，网络流方程(9.18)中的$L_{c_i}, 1\le i\le n$对G中的不同边(v_1,u_1)和(v_2,u_2)不一定有$L_{c_i}(v_1,u_1)=L_{c_i}(v_2,u_2)$。这样，$n$-阶线性网络流方程(9.18)可视为$m=|E(G)|$个$n$-阶线性递归方程

$$c_{vu}^{[1]}L_1(v,u)+c_{vu}^{[2]}L_2(v,u)+\cdots+c_{vu}^{[n]}L_n(v,u)=0 \qquad (9.22)$$

确定的数列$\{L_n(v,u)\}_1^{\infty}$构成的集合$\{\{L_n(v,u)\}_1^{\infty},\ (v,u)\in E(G)\}$。

2.2.网络流间距. 一部电影在展现一只老虎连续跑动时需采用高速摄像机，以保证两幅摄像间隔在人的视觉暂留0.1-0.4秒之内。一般地，刻画一个事物运动有三个相关指标，即距离、速度与时间。这样，在用网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^{\infty}$刻画一个事物连续变化时需要引入网络流间距的概念。那么，怎样度量两个网络流$G^L, G^{L'}$的间距$\rho\left(G^L,G^{L'}\right)$呢？欧阳博士解释说，如果把一个网络流$G^L$视为欧氏空间中坐标为$(L(v,u);\ (v,u)\in E(G))$的一个点，则度量网络流$G^L$与$G^{L'}$间距一种最自然的方法是将它们在欧氏空间中的距离作为G^L与$G^{L'}$的间距，即

$$\rho\left(G^L,G^{L'}\right)=\sqrt{\sum_{(v,u)\in E(G)}\left(L(v,u)-L'(v,u)\right)^2}=\rho\left(\mathbf{O},G^{L-L'}\right), \qquad (9.23)$$

并定义网络流G^L的次为

$$\left|G^L\right|=\rho\left(\mathbf{O},G^L\right)=\sqrt{\sum_{(v,u)\in E(G)}L^2(v,u)}\ 。 \qquad (9.24)$$

这样，由欧氏空间中向量的性质(4.33)和(4.35)，对任三个网络流$G^L, G^{L'}$和G^{L^*}有：

1）（非负性） $\rho\left(G^L,G^{L'}\right)\ge 0$且等号当且仅当$G^L=G^{L'}$或$G^{L-L'}=\mathbf{O}$时成立；

2）（对称性） $\rho\left(G^L,G^{L'}\right)=\rho\left(G^{L'},G^L\right)$；

3）（三角不等式） $\rho\left(G^L,G^{L'}\right)\le\rho\left(G^L,G^{L^*}\right)+\rho\left(G^{L^*},G^{L'}\right)$。

现在，假设$m=|E(G)|$，应用网路流的次(9.24)可以构造一个次$\left|G^{L_n}\right|=n$的网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^{\infty}$如下：

首先，在欧氏平面$\mathbb{R}^2=\{(x,y)|-\infty<x,y<+\infty\}$上取与$x$-轴夹角度数为$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$的$m$个夹角，如图9.15所示。同时，对$G$中的边$(v,u)\in E(G)$重新进行对称编号，即当$m$为一个偶数$2k$时

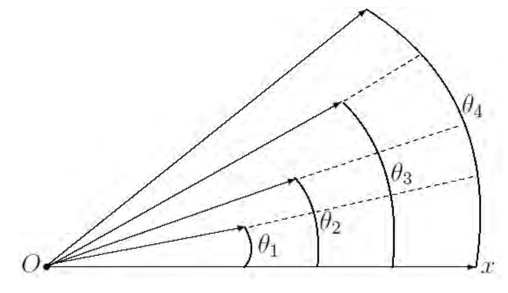


图9.15 与x轴的4个夹角

编为$(v,u)_i^+,(v,u)_i^-$，$1\leq i\leq k$；当m为一个奇数$2k+1$时编为$(v,u)_0$, $(v,u)_i^+$, $(v,u)_i^-$, $1\leq i\leq k$；接下来，分G中的边数m为偶数、奇数定义边$(v,u)\in E(G)$上的流量：①当m为偶数$2k$时，对任意整数$1\leq i\leq k$定义边$(v,u)_i^+,(v,u)_i^-\in E(G)$上的流量为

$$L_n(v,u)_i^+=\frac{n}{\sqrt{k}}\sin\theta_i,\quad L_n(v,u)_i^-=\frac{n}{\sqrt{k}}\cos\theta_i,$$

则网络流G^{L_n}的次为

$$\left|G^{L_n}\right|=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left({L_n}^2(v,u)_i^+ + {L_n}^2(v,u)_i^-\right)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\frac{n^2}{k}\left(\sin\theta_i^2+\cos\theta_i^2\right)}\ =\ n;$$

②当m为奇数$2k+1$时定义边$(v,u)_0,(v,u)_i^+,(v,u)_i^-\in E(G),1\leq i\leq k$上的流量为

$$L_n(v,u)_0=2n-1,\quad L_n(v,u)_i^+=\frac{n-1}{\sqrt{k}}\sin\theta_i,\quad L_n(v,u)_i^-=\frac{n-1}{\sqrt{k}}\cos\theta_i,$$

则网络流G^{L_n}的次为

$$\begin{aligned}\left|G^{L_n}\right| &= \sqrt{{L_n}^2(v,u)_0+\sum_{i=1}^{k}\left({L_n}^2(v,u)_i^+ + {L_n}^2(v,u)_i^-\right)}\\ &= \sqrt{2n-1+\sum_{i=1}^{k}\frac{(n-1)^2}{k}\left(\sin\theta_i^2+\cos\theta_i^2\right)}\\ &= \sqrt{2n-1+(n-1)^2}\ =\ n,\end{aligned}$$

即对任一个图G均存在一个映射L_n使网络流G^{L_n}的次$\left|G^{L_n}\right|=n$。

2.3.网络流极限. 一个网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$中，相邻网络流的间距是定量刻画网络流变化的一个重要指标，进而判断网络流是无限趋向于一个稳定的网络流还是发散。对人类认知万物，把握事物变化规律而言，事物变化总是在由不稳定趋于稳定，回归自然平衡的变化中。与此相对，网络流序列模拟事物的这种变化对应的，即是当$n\to\infty$时序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$的一种极限状态。

那么，什么是网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$的极限呢？欧阳博士告诉惠子，类似于数列$\{x_n\}_1^\infty$的极限，假设$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$为一个网络流序列，$G^L$为一个网络流，如果对给定的任意小整数$\varepsilon$总是存在一个整数$N$，使得$n>N$时有

$$\rho\left(G^{L_n},G^L\right)\ <\ \varepsilon,\tag{9.25}$$

则称网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$收敛于$G^L$，记为

$$\lim_{n\to\infty}G^{L_n}\ =\ G^L,\tag{9.26}$$

并称G^L为网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$的极限。反之，如果一个网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$没有极限，则称$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$发散。例如，图9.16两个网络流序列，($a$）中的是发散的，($b$）中的是收敛的。

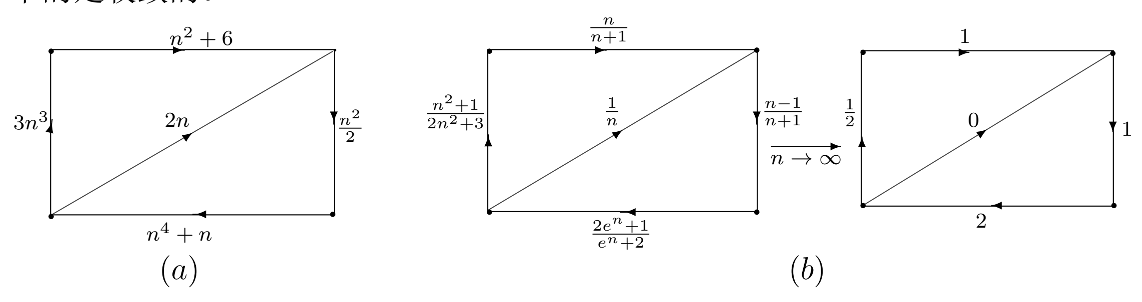


图9.16 非收敛与收敛网络流序列

由网络流间距的定义(9.23)，如果一个网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$收敛于$G^L$，则对任一正数$\varepsilon$存在一个整数$N$，使得$n > N$时有$\rho\left(G^{L_n}-G^L\right) < \varepsilon$。这样，对任一条边$(v,u)\in E(G)$，在$n > N$时定有$|L_n(v,u)-L(v,u)| \leq \rho\left(G^L-G^{L'}\right) < \varepsilon$，即数列$\{L_n(v,u)\}_1^\infty$收敛于$L(v,u)$；反之，如果对任一边$(v,u)\in E(G)$数列$\{L_n(v,u)\}_1^\infty$收敛于$L(v,u)$，则由定义对任一正数$\varepsilon/\sqrt{|E(G)|}$，存在一个整数$N_{vu}$使得当$n > N_{vu}$时有$|L_n(v,u)-L(v,u)| < \varepsilon/\sqrt{|E(G)|}$。现在，取$N=\max\{N_{vu},(v,u)\in E(G)\}$，则$n > N$时由(9.23)有

$$\rho\left(G^{L_n},G^L\right) = \sqrt{\sum_{(v,u)\in E(G)}\left(L(v,u)-L'(v,u)\right)^2} < \sqrt{\sum_{(v,u)\in E(G)}\frac{\varepsilon^2}{|E(G)|}} = \varepsilon,$$

即网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$收敛于$G^L$。这样，欧阳博士总结说，我们就得到一个网络流序列收敛的判别准则，即一个网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$收敛于$G^L$当且仅当对任一条边$(v,u)\in E(G)$，数列$\{L_n(v,u)\}_1^\infty$收敛于$L(v,u)$，并在此基础上得到收敛网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$的一些重要性质。

与数列$\{x_n\}_1^\infty$的收敛类似，一个收敛的网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$有以下性质：

(1）极限唯一. 若网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$收敛，则极限$\lim\limits_{n\to\infty} G^{L_n}=G^L$唯一。如若不然，设$G^{L'}$是$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$的另一个极限，即$\rho\left(G^L-G^{L'}\right) > 0$。取$\varepsilon=\rho\left(G^L-G^{L'}\right)/2$，则由极限的定义(9.25)，存在一个整数$N$使得$n > N$时有

$$\rho\left(G^{L_n}-G^L\right) < \varepsilon, \quad \rho\left(G^{L'}-G^{L_n}\right) < \varepsilon,$$

则应用网络流次的三角不等式和对称性，有

$$\begin{aligned}2\varepsilon &= \rho\left(G^L-G^{L'}\right)=\rho\left(\left(G^L-G^{L_n}\right)+\left(G^{L_n}-G^{L'}\right)\right)\\ &\leq \rho\left(G^L-G^{L_n}\right)+\rho\left(G^{L_n}-G^{L'}\right)=\rho\left(G^{L_n}-G^L\right)+\rho\left(G^{L_n}-G^{L'}\right) < 2\varepsilon\end{aligned}$$

的矛盾。故此，网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$若收敛则极限一定唯一。

(2) 次有界性. 若网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$收敛，则存在一个正数$M$使得对任一正整数$n$有$\left|G^{L_n}\right| \leq M$。注意，由网络流次的三角不等式有$\rho\left(G^{L_n}, \mathbf{O}\right) \leq \rho\left(G^{L_n}, G^L\right) + \rho\left(G^L, \mathbf{O}\right)$，即$\rho\left(G^{L_n}, G^L\right) \geq \left|G^{L_n}\right| - \left(\left|G^L\right|\right.$。现在，如果$\lim\limits_{n\to\infty} G^{L_n} = G^L$，则对$\varepsilon = 1$一定存在整数$N$使得对任一正数$n > N$，有$\rho\left(G^{L_n}, G^L\right) < 1$，即$\left|G^{L_n}\right| \leq \left|G^L\right| + 1$。这样，只需取$M = \max\left\{\left|G^L\right| + 1, \left|G^{L_n}\right|, 1 \leq n \leq N\right\}$，则对任意整数$n$即有$\left|G^{L_n}\right| \leq M$。

(3) 迫敛性. 网络流上可以引入偏序"$\preceq$"，即对两个网络流G^{L_1}, G^{L_2}，如果对任一条边$(v,u) \in E(G)$均有$L_1(v,u) \leq L_2(v,u)$，则称网络流G^{L_1}序弱于G^{L_2}，记为$G^{L_1} \preceq G^{L_2}$。现在，设$\left\{G_1^L[n]\right\}_1^\infty, \left\{G_2^L[n]\right\}_1^\infty$是收敛的网络流序列，$\lim\limits_{n\to\infty} G^{L_{1n}} = G^L$，$\lim\limits_{n\to\infty} G^{L_{2n}} = G^L$，如果存在一个正数$N_0$使得$n > N_0$时有$G^{L_{1n}} \preceq G^{L_n} \preceq G^{L_{2n}}$，则网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$一定收敛且$\lim\limits_{n\to\infty} G^{L_n} = G^L$。为什么是这样的呢？欧阳博士解释说，因为对任一条边$(v,u) \in E(G)$，由定义可知，数列$\{L_{1n}(v,u)\}_1^\infty$和$\{L_{2n}(v,u)\}_1^\infty$均收敛。这时，有$\lim\limits_{n\to\infty} L_{1n}(v,u) = \lim\limits_{n\to\infty} L_{2n}(v,u) = L(v,u)$且$L_{1n}(v,u) \leq L_n(v,u) \leq L_{2n}(v,u)$。这样，由数列的迫收敛性知$\lim\limits_{n\to\infty} L_n(v,u) = L(v,u)$，即$\lim\limits_{n\to\infty} G^{L_n} = G^L$。

(4) 极限运算. 网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$极限的运算(9.9), (9.10)与数列$\{x_n\}_1^\infty$极限的四则运算类似，即对收敛的网络流序列$\left\{G^L[n]\right\}_1^\infty$和$\left\{G^{L'}[n]\right\}_1^\infty$，有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(G^{L_n} + G^{L'_n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(G^{L_n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(G^{L'_n}\right), \\
\lim_{n\to\infty}\left(G^{L_n} \cdot G^{L'_n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(G^{L_n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(G^{L'_n}\right)。
\end{aligned} \tag{9.27}$$

更进一步，如果对任一条边$(v,u) \in E(G)$均有$\lim\limits_{n\to\infty} L_n(v,u) \neq 0$，则$\left\{G^{L_n}/G^{L'_n}\right\}$是一个收敛的网络流序列，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G^{L_n}}{G^{L'_n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} G^{L_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} G^{L'_n}}。 \tag{9.28}$$

第3节 网络演化

网络流序列是用有限个或可数个网络流模拟事物运动或变化状态，展现的是事物一幅一幅的网络流像，但像与像间存在一定的间隔或空白，对把握事物的动态行为有一定的影响。例如，当一部电影的放映速度小于每秒24格，如慢到每秒12格时就会感觉画面中的动物是在机械地跳动而并非是人眼中的动物景象，因为屏幕上展现的动物变化中有缺失或跳跃，与人正常的感知不一致，这也是采用有限或可数个网络流模拟事物运动或变化的缺陷。那么，怎样弥补网络流序列在刻画事物运动或

变化中的这种缺失呢？欧阳博士告诉惠子，一种自然的方法是完整地展现事物演化，增补相邻网络流间缺失的那些事物状态，给出事物由一个状态变为另一个状态的连续性状或因果关系的网络流体现，即网络流的连续演化。

那么，怎样刻画网络流的演化呢？欧阳博士解释说，一个网络流G^L的演化是在保持图结构G不变的条件下从G^L的一个状态演化为另一个状态，一种自然的模拟方法是将网络流G^L视为随时间t和空间$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$变化，记为$G^L[t,\mathbf{x}]$。为简化起见，让时间$t=x_{n+1}$而记$G^L[t,\mathbf{x}]$为$G^L[\mathbf{x}],\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n+1}$。这样，网络流$G^L:\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n+1}\to G^L[\mathbf{x}]$刻画的是事物基元间的作用函数，即函数族$\{L(v,u)[\mathbf{x}],(v,u)\in E(G)\}$随时间和空间元$\mathbf{x}$的变化状态。那么，怎样定义网络流$G^L[\mathbf{x}]$演化的连续性呢？欧阳博士告诉惠子，定义网络流上的连续演化需要先引入网络流δ-邻域的概念。

一个网络流G^{L_0}的δ-邻域定义为网络流集合$\left\{G^L[\mathbf{x}]|\rho\left(G^L[\mathbf{x}],G^{L_0}\right)<\delta\right\}$。对一个网络流$G^L[\mathbf{x}]$，如果对任意给定的正数$\varepsilon$总是存在$G^{L_0}$的一个$\delta$-邻域使得对该邻域内的任一个网络流$G^L[\mathbf{x}]$均有$\rho\left(G^L[\mathbf{x}],G^{L_0}\right)=\rho\left(G^{L[\mathbf{x}]-L_0},\mathbf{O}\right)<\varepsilon$，则$G^{L_0}$称为网络流$G^L[\mathbf{x}]$的极限，记为$\lim\limits_{L[\mathbf{x}]\to L_0}G^L[\mathbf{x}]=G^{L_0}$。这里，并不要求存在$\mathbf{x}_0$使网络流$G^L[\mathbf{x}_0]=G^{L_0}$，但对于网络流的连续演化，一定存在$\mathbf{x}_0$使网络流$G^L[\mathbf{x}_0]=G^{L_0}$。这里，连续演化刻画的是网络流$G^L[\mathbf{x}]$随$\mathbf{x}$的一种连续变化，不存在间断或跳跃的演化性质，即对任一给定的正数ε，如果存在一个正数δ使得$\mathbf{x}$与$\mathbf{x}_0$间的距离

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta\quad\Rightarrow\quad\rho\left(G^L[\mathbf{x}],G^L[\mathbf{x}_0]\right)<\varepsilon,\tag{9.29}$$

则称网络流$G^L[\mathbf{x}]$在网络流$G^L[\mathbf{x}_0]$处是连续的，记为$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}G^L[\mathbf{x}]=G^L[\mathbf{x}_0]$。

一般地，记变量差$\Delta\mathbf{x}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$，网络流差$\Delta G^L[\mathbf{x}]=G^L[\mathbf{x}]-G^L[\mathbf{x}_0]$。则由网络流减法定义(9.11)知$\Delta G^L[\mathbf{x}]=G^{L[\mathbf{x}]-L[\mathbf{x}_0]}=G^{\Delta L[\mathbf{x}]}$，见图9.17。这样一来，网络流的连续演化又可以定义为$\Delta\mathbf{x}\to\mathbf{0}$时$\Delta G^L[\mathbf{x}]\to\mathbf{O}$或者$\lim\limits_{\Delta\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\Delta G^L[\mathbf{x}]=\mathbf{O}$。反之，称一个网络流$G^L[\mathbf{x}]$在$\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^{n+1}$处不连续，包括$G^L[\mathbf{x}]$在$\mathbf{x}_0$处没有定义、极限$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}G^L[\mathbf{x}]$不存在或是极限$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}G^L[\mathbf{x}]\neq G^L[\mathbf{x}_0]$，均称网络流$G^L[\mathbf{x}]$演化时在$\mathbf{x}_0$处是间断的。

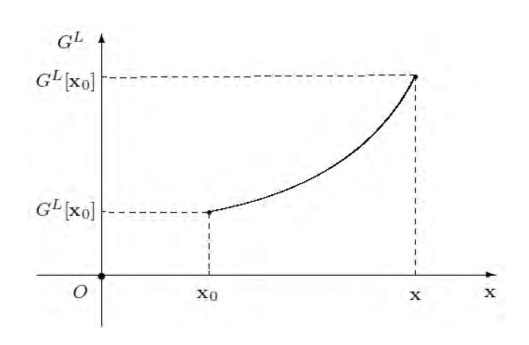


图9.17 网络流演化差

3.1.连续演化等价条件. 对任一条边$(v,u)\in E(G)$，网络流$G^L[\mathbf{x}]$在随$\mathbf{x}$演化时在边(v,u)上的限制是一个函数，即$L:(v,u)\to L(v,u)[\mathbf{x}]\in\mathbb{R}$。这样一来，如果$G^L[\mathbf{x}]$在$G^L[\mathbf{x}_0]$处是连续的，则对任一给定正数$\varepsilon$存在一个正数$\delta$使得$|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta$时

有$\rho\left(G^L[\mathbf{x}],G^L[\mathbf{x}_0]\right)<\varepsilon$。这样，对任一$(v,u)\in E(G)$有

$$\begin{aligned}|L(v,u)[\mathbf{x}]-L(v,u)[\mathbf{x}_0]| &\leq \sqrt{\sum_{(v,u)\in E(G)}\left(L(v,u)[\mathbf{x}]-L(v,u)[\mathbf{x}_0]\right)^2}\\ &= \rho\left(G^L[\mathbf{x}],G^L[\mathbf{x}_0]\right) < \varepsilon,\end{aligned}$$

即网络流$G^L[\mathbf{x}]$在任一条边(v,u)上的限制在$\mathbf{x}_0$处是一个连续函数的结论。反之，如果网络流$G^L[\mathbf{x}]$在任一条边(v,u)上的限制在$\mathbf{x}_0$处是连续的，即对任一正数$\varepsilon/\sqrt{|E(G)|}$存在一个正数$\delta_{vu}$使得

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta_{vu} \quad\Rightarrow\quad |L(v,u)[\mathbf{x}]-L(v,u)[\mathbf{x}_0]|<\varepsilon/\sqrt{|E(G)|}\ 。$$

取正数$\delta=\min\left\{\delta_{vu},(v,u)\in E(G)\right\}$，则在$|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta$时，对任一条边$(v,u)\in E(G)$均有$|L(v,u)[\mathbf{x}]-L(v,u)[\mathbf{x}_0]|<\varepsilon/\sqrt{|E(G)|}$。这样，一定有

$$\begin{aligned}\rho\left(G^L[\mathbf{x}],G^L[\mathbf{x}_0]\right) &= \sqrt{\sum_{(v,u)\in E(G)}\left(L(v,u)[\mathbf{x}]-L(v,u)[\mathbf{x}_0]\right)^2}\\ &< \sqrt{|E(G)|\ \frac{\varepsilon^2}{|E(G)|}}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即网络流$G^L[\mathbf{x}]$在$\mathbf{x}_0$处是连续的。欧阳博士告诉惠子，综合上面的讨论就得到判定网络流$G^L[\mathbf{x}]$在$G^L[\mathbf{x}_0]$处连续的一个等价条件，即网络流$G^L[\mathbf{x}]$在$G^L[\mathbf{x}_0]$处是连续的当且仅当对任一条边$(v,u)\in E(G)$，$G^L[\mathbf{x}]$在边$(v,u)\in E(G)$上的限制$L(v,u)[\mathbf{x}]$在$\mathbf{x}_0$处是一个连续函数。应用这个等价条件，假设网络流$G^L[\mathbf{x}]$和$G^{L'}[\mathbf{x}]$在$\mathbf{x}_0$处连续，则由连续变换的等价条件和连续函数的性质，有

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\left(G^L[\mathbf{x}]+G^{L'}[\mathbf{x}]\right) &= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}G^L[\mathbf{x}]+\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}G^{L'}[\mathbf{x}],\\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\left(G^L[\mathbf{x}]-G^{L'}[\mathbf{x}]\right) &= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}G^L[\mathbf{x}]-\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}G^{L'}[\mathbf{x}],\\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\left(G^L[\mathbf{x}]\ \cdot\ G^{L'}[\mathbf{x}]\right) &= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}G^L[\mathbf{x}]\ \cdot\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}G^{L'}[\mathbf{x}],\end{aligned}\tag{9.30}$$

且若对任一条边$(v,u)\in E(G)$均有$L'(v,u)[\mathbf{x}_0]\neq\mathbf{0}$，则有

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{G^L[\mathbf{x}]}{G^{L'}[\mathbf{x}_0]}=\frac{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}G^L[\mathbf{x}]}{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}G^{L'}[\mathbf{x}_0]}\ 。\tag{9.31}$$

现在，设$G^L:\mathbf{x}\to G^L[\mathbf{x}]$和$G^{L'}:G^L[\mathbf{x}]\to G^{L'}[\mathbf{x}]$为连续网络流，则$G^{L'(L)}:\mathbf{x}\to G^{L'}\left(G^L[\mathbf{x}]\right)=G^{L'(L)[\mathbf{x}]}$也是一个网络演化，称为$G^L[\mathbf{x}]$和$G^{L'}[\mathbf{x}]$的复合演化。这样，一

个自然的问题，是复合演化$G^{L'(L)[\mathbf{x}]}$在什么条件下是连续的呢？欧阳博士告诉惠子，与复合函数的连续性类似，对网络流上的复合演化$G^{L'(L)[\mathbf{x}]}$，如果$G^L[\mathbf{x}]$在$\mathbf{x}_0$处是连续的，$G^{L'}[\mathbf{x}]$在$G^L[\mathbf{x}_0]$处是连续的，则复合演化$G^{L'(L)[\mathbf{x}]}$在$\mathbf{x}_0$处也是连续的。为什么这样的复合演化$G^{L'(L)[\mathbf{x}]}$仍是连续的呢？因为对任一条边$(v,u)\in E(G)$，由网络演化在一点连续的等价条件知$G^L[\mathbf{x}]$在边(v,u)上的限制$L(v,u)[\mathbf{x}]$在$\mathbf{x}_0$处连续，$G^{L'}[\mathbf{x}]$在边(v,u)上的限制$L'(v,u)[\mathbf{x}]$在$L(v,u)[\mathbf{x}_0]$处连续。这样，应用连续函数的复合函数仍是连续函数的结论，知$G^{L'(L)[\mathbf{x}]}$在任一条边$(v,u)\in E(G)$上的限制$L'(L)(v,u)[\mathbf{x}]$在点$\mathbf{x}_0$上连续。接下来，再应用网络流连续演化的等价条件，即知复合演化$G^{L'(L)[\mathbf{x}]}$在点$\mathbf{x}_0$上连续的结论。

网络流连续演化的四则运算和复合演化的连续性为计算网络流连续演化的极限提供了一定的便利条件，即对每一条边$(v,u)\in E(G)$计算极限$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} L(v,u)[\mathbf{x}]$，再将计算后的极限值作为图$G$中边$(v,u)$上的标号即得$G^L[\mathbf{x}]$在$\mathbf{x}_0$点上的极限$G^L[\mathbf{x}_0]$。例如，图9.18中（$a$）所示的是网络流$G^L[\mathbf{x}]$,（$b$）是$G^L[\mathbf{x}]$在$(x,t)\to(2,1)$时的极限。

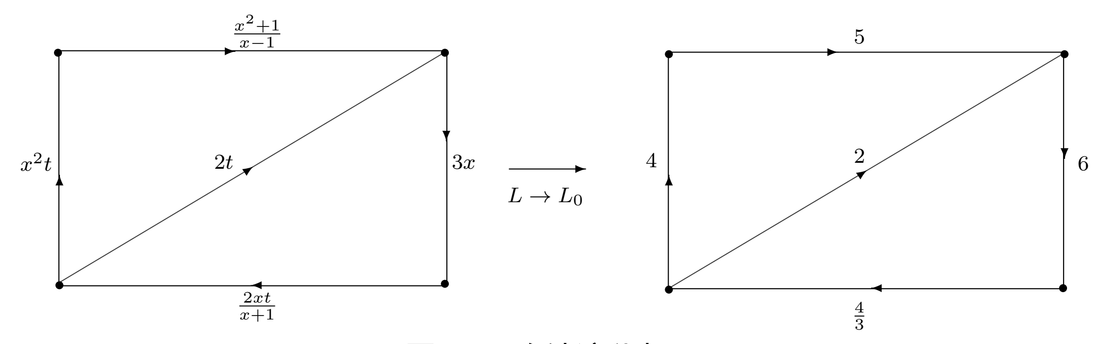


图8.18 连续演化极限

3.2.网络演化偏序性质. 给定两个网络流G^{L_1},G^{L_2}，如果对任一条边$(v,u)\in E(G)$均有$L_1(v,u)<L_2(v,u)$，则G^{L_1}的序严格弱于G^{L_2}，记为$G^{L_1}\prec G^{L_2}$。序关系“$\prec$”在网络演化$G^L[\mathbf{x}]$中形成一种偏序关系，在$G^L[\mathbf{x}]$中形成偏序链。为简化起见，下面的讨论中假设$\mathbf{x}=t$，即网络流$G^L[\mathbf{x}]$仅随一个参数t演化的情形$G^L[t]$。

1)有界性. 对实数$a,b\in\mathbb{R},a\le b$，$G^L[t]$是闭区间$[a,b]$上一个连续演化的网络流，即对任一条边$(v,u)\in E(G)$，$L(v,u)[t]$是闭区间$[a,b]$上的一个连续函数。这样，由网络流次的定义(9.24)和连续函数的性质，次

$$\left|G^L[t]\right|=\sqrt{\sum_{(v,u)\in E(G)}L^2(v,u)[t]} \tag{9.32}$$

是闭区间$[a,b]$上关于t的一个连续函数。应用闭区间上连续函数的有界性，知存在一个正数M使得$\left|G^L[t]\right|\le M$，即闭区间上连续演化的网络流有界。更进一步，应用次$\left|G^L[t]\right|$为一个连续函数和闭区间上连续函数的最大、最小值性质，可知闭区

间$[a,b]$上连续演化的网络流次$\left|G^L[t]\right|$在该区间上一定能取得最大值和最小值。

2)介值性. 闭区间$[a,b], a,b\in\mathbb{R}$上网络流$G^L[t]$的连续演化中，有两种介值性需要讨论：一是次介值性，二是偏序介值性。

网络流$G^L[t]$连续演化中的次介值性是闭区间上连续函数介值性的一个推论，因为由(9.32)式已知次$\left|G^L[t]\right|$是闭区间$[a,b]$上关于t的一个连续函数。这时，由闭区间上连续函数的介值性，对任一个处在$\left|G^L[a]\right|$和$\left|G^L[b]\right|$间的实数C，即$\left|G^L[a]\right| < C < \left|G^L[b]\right|$，一定存在一个实数$c\in(a,b)$使得$\left|G^L[c]\right| = C$。

网络流$G^L[t]$连续演化中的偏序介值性受偏序“$\prec$”的影响，不如闭区间上连续函数介值性那样简洁，但存在一种构造规则确定介间网络流。这时，假设网络演化$G^L[t]$是连续的，$G^L[a]=G^{L_1}, G^L[b]=G^{L_2}$且$G^{L_1}\prec G^{L_0}\prec G^{L_2}$。欧阳博士解释说，网络连续演化$G^L[t]$的等价条件表明，这时，对任一条边$(v,u)\in E(G)$，$L(v,u)[t]$是一个关于$t$的连续函数，由连续函数的介值定理，对任意满足$L(v,u)[a]<L_0(v,u)<L(v,u)[b]$的$L_0(v,u)$，区间$(a,b)$上存在一个实数$c_{vu}$使得$L_0(v,u)=L(v,u)[c_{vu}]$，即网络流$G^{L_0}$中的映射$L_0$在构造上等价于对任一条边$(v,u)\in E(G)$，映射$L_0:(v,u)\to L(v,u)[c_{vu}]$，可以由网络演化$G^L[t]$中的$L$表示出来。当然，一般地，对不同的边$(v_1,u_1)$, $(v_2,u_2)\in E(G)$，这里的实数$c_{v_1u_1}, c_{v_2u_2}\in(a,b)$不一定相同。特别地，如果对所有边$(v,u)\in E(G)$，$c_{vu}$均相同，为一个常数$c\in(a,b)$，则网络流$G^{L_0}$是网络$G^L[t]$在$t=c$时的演化，即$G^{L_0}=G^L[c]$。

3.3.网络演化代数. 对任一个整数$m\geq 1$，设$G^{L_1}[\mathbf{x}], G^{L_2}[\mathbf{x}],\cdots,G^{L_m}[\mathbf{x}]$为$m$个连续演化的网络流，则在网络流运算(9.9) − (9.11)和复合演化定义下，网络流有代数结构的性质。

1）常数元. 对任一个常数$c\in\mathbb{R}$和任一条边$(v,u)\in E(G)$，定义网络流G^{L_c}中的映射$L_c:(v,u)\to c$。特别地，有$\mathbf{O}=G^{L_0}$，$\mathbf{I}=G^{L_1}$。这当中，$\mathbf{O}$和$\mathbf{I}$分别为加法“$+$”和乘法“$\cdot$”的单位元，即

$$\mathbf{O}+G^L[\mathbf{x}]=G^L[\mathbf{x}]+\mathbf{O}=G^L[\mathbf{x}],$$
$$\mathbf{I}\cdot G^L[\mathbf{x}]=G^L[\mathbf{x}]\cdot\mathbf{I}=G^L[\mathbf{x}]。$$

这里，加法单位元$\mathbf{O}$和乘法单位元$\mathbf{I}$间的运算表如下：

$$\mathbf{O}+\mathbf{O}=\mathbf{O},\quad \mathbf{O}+\mathbf{I}=\mathbf{I}+\mathbf{O}=\mathbf{I},$$
$$\mathbf{O}\cdot\mathbf{O}=\mathbf{O},\quad \mathbf{I}\cdot\mathbf{O}=\mathbf{O}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{O},\quad \mathbf{I}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{I}。$$

2）群与双群. 对任一个网络流$G^L[\mathbf{x}]$，如果$X+G^L[\mathbf{x}]=\mathbf{O}$则称$X$为$G^L[\mathbf{x}]$的加法“$+$”逆元。类似地，如果对任一条边$(v,u)\in E(G)$均有$L(v,u)[\mathbf{x}]\neq\mathbf{0}$，$Y\cdot G^L[\mathbf{x}]=\mathbf{I}$，

则称Y为$G^L[\mathbf{x}]$的乘法“$\cdot$”逆元。由网络流运算规则(9.9) − (9.11)，易知

$$X=-G^L[\mathbf{x}]=G^{-L}[\mathbf{x}],\quad Y=\frac{1}{G^L[\mathbf{x}]}=G^{\frac{1}{L}}[\mathbf{x}]=G^{L^{-1}}[\mathbf{x}] \tag{9.33}$$

且有如下等式

$$-G^L[\mathbf{x}]=G^{-L}[\mathbf{x}],\quad \frac{\mathbf{I}}{G^L[\mathbf{x}]}=G^{\frac{1}{L}}[\mathbf{x}]. \tag{9.34}$$

这样，由(9.9) − (9.11)和等式(9.33) − (9.34)，一个图G上的网络流$G^L[\mathbf{x}]$在加法“+”下构成一个交换群$\left(\{G^L[\mathbf{x}]\};+\right)$；对任一条边$(v,u)\in E(G)$均有$L(v,u)[\mathbf{x}]\neq\mathbf{0}$的网络流$\{G^L[\mathbf{x}]\}$在乘法“$\cdot$”下构成一个群$\left(\{G^L[\mathbf{x}]\};\cdot\right)$，即不一定有$G^L[\mathbf{x}]\cdot G^{L'}[\mathbf{x}]=G^{L'}[\mathbf{x}]\cdot G^L[\mathbf{x}]$。特别地，对任一条边$(v,u)\in E(G)$均有$L(v,u)[\mathbf{x}]\neq\mathbf{0}$的网络流$\{G^L[\mathbf{x}]\}$在加法“+”和乘法“$\cdot$”双运算下构成一个*双群*，即网络流$\{G^L[\mathbf{x}]\}$中的元在加法“+”和乘法“$\cdot$”运算下均构成一个群。

3）*代数表示式*. 由网络流运算(9.9) − (9.11)和等式(9.33)与(9.34)，网络流$G^{L_1}[\mathbf{x}]$, $G^{L_2}[\mathbf{x}],\cdots,G^{L_m}[\mathbf{x}]$的线性组合、多项式和分式表示如下：

①对任意的$a_1,a_2,\cdots,a_m\in\mathbb{R}$，网络流$G^{L_1}[\mathbf{x}],G^{L_2}[\mathbf{x}],\cdots,G^{L_m}[\mathbf{x}]$线性组合为

$$\begin{aligned}\left(a_1G^{L_1}[\mathbf{x}]\right)+\left(a_2G^{L_2}[\mathbf{x}]\right)+\cdots+\left(a_mG^{L_m}[\mathbf{x}]\right) &= G^{(a_1L_1)+(a_2L_2)+\cdots+(a_mL_m)}[\mathbf{x}],\\ \left(a_1G^{L_1}[\mathbf{x}]\right)\cdot\left(a_2G^{L_2}[\mathbf{x}]\right)\cdots\left(a_mG^{L_m}[\mathbf{x}]\right) &= G^{(a_1L_1)\cdot(a_2L_2)\cdot\cdots\cdot(a_mL_m)}[\mathbf{x}]\ 。\end{aligned}$$

②对任意的$a_1,a_2,\cdots,a_m\in\mathbb{R}$，网络流$G^L[\mathbf{x}]$的多项式表示为

$$(a_0\mathbf{I})+\left(a_1G^L[\mathbf{x}]\right)+\cdots+\left(a_mG^{L^m}[\mathbf{x}]\right)=G^{a_0+(a_1L)+\cdots+(a_mL^m)}[\mathbf{x}]\ 。$$

③对任意的$a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_m\in\mathbb{R}$，网络流$G^{L_1}[\mathbf{x}],G^{L_2}[\mathbf{x}],\cdots,G^{L_m}[\mathbf{x}]$上的分式表示为

$$\begin{aligned}&\frac{\left(a_1G^{L_1}[\mathbf{x}]\right)+\left(a_2G^{L_2}[\mathbf{x}]\right)+\cdots+\left(a_mG^{L_m}[\mathbf{x}]\right)}{\left(b_1G^{L_1'}[\mathbf{x}]\right)+\left(b_2G^{L_2'}[\mathbf{x}]\right)+\cdots+\left(b_mG^{L_m'}[\mathbf{x}]\right)}\\ &=\frac{G^{(a_1L_1)+(a_2L_2)+\cdots+(a_mL_m)}[\mathbf{x}]}{G^{\left(b_1L_1'\right)+\left(b_2L_2'\right)+\cdots+\left(b_mL_m'\right)}[\mathbf{x}]}\\ &=G^{(a_1L_1)+(a_2L_2)+\cdots+(a_mL_m)}[\mathbf{x}]\cdot\frac{\mathbf{I}}{G^{\left(b_1L_1'\right)+\left(b_2L_2'\right)+\cdots+\left(a_mL_m'\right)}[\mathbf{x}]}\\ &=G^{\frac{(a_1L_1)+(a_2L_2)+\cdots+(a_mL_m)}{\left(b_1L_1'\right)+\left(b_2L_2'\right)+\cdots+\left(b_mL_m'\right)}}[\mathbf{x}]\ 。\end{aligned}$$

欧阳博士告诉惠子，网络流代数是网络流按四则运算的计算结果。注意，这当中的图G在计算过程中始终不发生变化。这样，网络流计算等同于对任一条边$(v,u)\in$

$E(G)$上的映射$L(v,u)$按一般代数规则计算后，用计算结果对该边重新进行标号，这是引入网络流代数表示刻画网络流演化的意义。

第4节 网络积微

宇宙万物处在不断的运动和变化之中，用网络流$G^L[\mathbf{x}]$模拟一件事物S的运动或变化状态，需要同时对S中的基元$v \in S$和基元$v,u \in S$间的作用$L(v,u)[\mathbf{x}], v,u \in S$局部认知，进而是对事物$T$的状态进行系统认知。欧阳博士告诉惠子，事物$T$的发展于变化可以分为两个部分，一是对事物$T$作为一个整体或一个抽象点的状态变化，即基元间的同步变化；二是事物S基元$v,u \in S$间的局部作用。例如，一个体操运动员做后空翻360^o可分解为屈膝准备→起跳→向后翻转→抱膝团身→落地等步骤。对应的，一是运动员身体在空中后翻旋转360^o，展现运动员后空翻动作，如图9.19（a）所示，二是运动员由A点经弧线运动到B点，如图9.19（b）所示，展现运动员身体各部分的同步运行轨迹。这时，如果把运动员身体的头部、手臂、躯干和腿作为基元，运动员对应的网络G^L是一棵7个节点的树T，如图9.19（c）所示。这样，运动员后空翻360^o的运动过程可以用网络流T的演化模拟。



图9.19 后空翻360^o动作分解

那么，怎样用网络流模拟事物这种同步变化规律呢？欧阳博士解释说，这时的同步运动对应于运动员后空翻时的运动轨迹，即图9.18中的情形(c)中的网络T各部分的同步运动$f(t)$。听了欧阳博士的解释，惠子有些感悟地说："爸爸，我怎么觉得这种认知方法有点像是相对论呢！先在人的地球参照系上将运动员想象为一个质点，再取运动员身上的某一点为基点构建坐标系观测运动员的后空翻动作，然后把二者组合在一起，这不是侠义相对论中的坐标变换方法吗？"欧阳博士点了点头，说这种方法正是爱因斯坦相对论引导的认知理念。他顿了顿问惠子："运动员进行后空翻360^o运动是一种人眼可见或宏观世界中的可见行为。把运动员换成一个生物大分子，人在显微镜下能观测这个大分子运动但观测不到分子内的原子运动，这种情形下又应怎样模拟这个大分子状态呢？"惠子回答说："可把它抽象为一个点，用质点力学刻画大分子的状态。"欧阳博士解释说，质点力学仅能用来刻画生物大分子的外在行为而不能刻画其内部结构、原子状态的变化。想要同时刻画分子及其内原子

状态，一种自然的方法是由分子内的原子在结合力作用下构成一个网络流，模拟这个分子的状态，包括其整体的外在表现和内部原子的局部状态，这种方法的一般化即是以事物内蕴组合结构动态化认知事物的发展与变化。

一般地，刻画网络流$G^L[\mathbf{x}]$上的同步运动需要引入网络流上的映照$f: G^L[\mathbf{x}] \to G^{f(L)}[\mathbf{x}]$，即

$$f\left(G^L[\mathbf{x}]\right) \ = \ G^{f(L)[\mathbf{x}]} \tag{9.35}$$

对事物的运动和变化进行动态模拟。

4.1.网络连续映照. 网络流上的连续映照旨在刻画网络流上的细微变化引发映照像的变化。对任意两个连续的网络演化$G^L[\mathbf{x}], G^{L'}[\mathbf{x}]$，设$f$是$G^L[\mathbf{x}]$上的一个映照，如果对任意一个正数$\varepsilon$均存在一个实数$\delta$使得

$$\rho\left(G^L[\mathbf{x}], G^{L'}[\mathbf{x}_0]\right) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho\left(f\left(G^L[\mathbf{x}]\right), G^{L'}[\mathbf{x}_0]\right) < \varepsilon, \tag{9.36}$$

则称映照f在网络流$G^{L'}[\mathbf{x}_0]$处是连续的，记为$\lim\limits_{G^L\to G^{L'}} f\left(G^L[\mathbf{x}]\right) = G^{L'}[\mathbf{x}_0]$。

注意，$G^L[\mathbf{x}], G^{L'}[\mathbf{x}_0]$是两个连续演化。这样，对任一边$(v,u)\in E(G)$，由网络流间距的定义有

$$\begin{aligned}
\rho\left(G^L[\mathbf{x}], G^{L'}[\mathbf{x}_0]\right) < \delta \quad &\Leftrightarrow \quad |L(v,u)[\mathbf{x}] - L'(v,u)[\mathbf{x}_0]| < \frac{\delta}{\sqrt{|E(G)|}},\\
\rho\left(f\left(G^L[\mathbf{x}]\right), G^{L'}[\mathbf{x}_0]\right) < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad |f(L)(v,u)[\mathbf{x}] - L'(v,u)[\mathbf{x}_0]| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{|E(G)|}}\ 。
\end{aligned}$$

这样，定义(9.35)等价于对任一边$(v,u)\in E(G)$有

$$|L(v,u)[\mathbf{x}] - L'(v,u)[\mathbf{x}_0]| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad |f(L)(v,u)[\mathbf{x}] - L'(v,u)[\mathbf{x}_0]| < \varepsilon, \tag{9.37}$$

记为$\lim\limits_{L\to L'} f\left(G^L[\mathbf{x}]\right) = G^{L'}[\mathbf{x}_0]$。

特别地，如果标号映射$L' = f(L)$，即映照f在一个连续演化$G^L[\mathbf{x}]$上的某一点$G^L[\mathbf{x}_0]$连续，则由连续映照的等价条件，对任一边$(v,u)\in E(G)$有

$$\begin{aligned}
\rho\left(G^L[\mathbf{x}], G^{L'}[\mathbf{x}_0]\right) < \delta \quad &\Leftrightarrow \quad |L(v,u)[\mathbf{x}] - L(v,u)[\mathbf{x}_0]| < \frac{\delta}{\sqrt{|E(G)|}},\\
\rho\left(f\left(G^L[\mathbf{x}]\right), G^{L}[\mathbf{x}_0]\right) < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad |f(L)(v,u)[\mathbf{x}] - f(L)(v,u)[\mathbf{x}_0]| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{|E(G)|}}
\end{aligned}$$

而这时$L(v,u)[\mathbf{x}]$是个连续函数，一定存在一个正数δ使得

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad |L(v,u)[\mathbf{x}] - L(v,u)[\mathbf{x}_0]| < \frac{\delta_1}{\sqrt{|E(G)|}}\ 。$$

这样，映照f在连续演化$G^L[\mathbf{x}]$上的一点连续的等价条件为：

一个映照f在连续演化$G^L[\mathbf{x}]$上的一点$G^L[\mathbf{x}_0]$是连续的，当且仅当对任一正数ε和任一边$(v,u)\in E(G)$存在一个实数δ使得

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta \quad \Leftrightarrow \quad |f(L)(v,u)[\mathbf{x}]-f(L)(v,u)[\mathbf{x}_0]|<\varepsilon, \tag{9.38}$$

即对任一边$(v,u)\in E(G)$，复合函数$f(L)[\mathbf{x}]$在边(v,u)上的局部化$f(L)(v,u)[\mathbf{x}]$在$\mathbf{x}_0$处是连续的，记为$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f\left(G^L[\mathbf{x}]\right)=f\left(G^L[\mathbf{x}_0]\right)$。这样，欧阳博士告诉惠子，应用连续映照的这个等价条件很容易将初等函数拓广为网络流连续演化上的连续映照，例如，

①幂映照. 对任一实数$a\in\mathbb{R}$和整数$n\in\mathbb{Z}^+$，映照的n-次幂

$$f\left(G^L[\mathbf{x}]\right)=a\left(G^L[\mathbf{x}]\right)^n=G^{aL^n[\mathbf{x}]};$$

②指数映照. 对任一实数$0\neq a\in\mathbb{R}$，指数映照

$$f\left(G^L[\mathbf{x}]\right)=a^{G^L}[\mathbf{x}]=G^{a^L}[\mathbf{x}],\quad \log G^L[\mathbf{x}]=\overrightarrow{G}^{\log L[\mathbf{x}]}\ 。$$

特别地，当$a=e$时有网络等式

$$e^{G^L}[\mathbf{x}]=G^{e^{L[\mathbf{x}]}},\quad G^L[\mathbf{x}]=G^{\ln L[\mathbf{x}]};$$

③三角映照. 三角映照是三角函数在网络流上的拓广，即

$$\begin{aligned}
\sin G^L[\mathbf{x}] &= G^{\sin L[\mathbf{x}]}, & \cos G^L[\mathbf{x}] &= G^{\cos L[\mathbf{x}]},\\
\tan G^L[\mathbf{x}] &= G^{\tan L[\mathbf{x}]}, & \cot G^L[\mathbf{x}] &= G^{\cot L[\mathbf{x}]},\\
\sinh G^L[\mathbf{x}] &= G^{\sinh L[\mathbf{x}]}, & \cosh G^L[\mathbf{x}] &= G^{\cosh L[\mathbf{x}]},\\
\coth G^L[\mathbf{x}] &= G^{\coth L[\mathbf{x}]}, & \tanh G^L[\mathbf{x}] &= G^{\tanh L[\mathbf{x}]}
\end{aligned}$$

等网络流上的连续映照。同时，由网络流的代数表示、连续映照和(9.35)式，对任一整数$n\in\mathbb{Z}^+$, $a\in\mathbb{R}$易于得到以下网络恒等式：

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{I}+aG^L[\mathbf{x}]\right)^n &= G^{(1+aL[\mathbf{x}])^n}, \quad \left(\mathbf{I}+\frac{a\mathbf{I}}{G^L[\mathbf{x}]}\right)^n = G^{\left(1+\frac{a}{L[\mathbf{x}]}\right)^n},\\
\frac{\mathbf{I}-G^{nL}[\mathbf{x}]}{\mathbf{I}-G^L[\mathbf{x}]} &= \mathbf{I}+G^{L[\mathbf{x}]}+G^{2L[\mathbf{x}]}+\cdots+G^{(n-1)L[\mathbf{x}]}\ 。
\end{aligned}$$

更进一步，还有指数映照恒等式

$$e^{G^L[\mathbf{x}]}=\mathbf{I}+\frac{G^L[\mathbf{x}]}{1!}+\frac{G^{2L}[\mathbf{x}]}{2!}+\cdots+\frac{G^{nL}[\mathbf{x}]}{n!}+\cdots\ 。 \tag{9.39}$$

那么，等式(9.39)是怎样得到的呢？欧阳博士解释说，由网络流运算的定义有

$$\begin{aligned}&\mathbf{I}+\frac{G^L[\mathbf{x}]}{1!}+\frac{G^{2L}[\mathbf{x}]}{2!}+\cdots+\frac{G^{nL}[\mathbf{x}]}{n!}+\cdots\\&\quad= \mathbf{I}+G^{\frac{L[\mathbf{x}]}{1!}}+G^{\frac{2L[\mathbf{x}]}{2!}}+\cdots+G^{\frac{nL[\mathbf{x}]}{n!}}+\cdots\\&\quad= G^{1+\frac{L[\mathbf{x}]}{1!}+\frac{2L[\mathbf{x}]}{2!}+\cdots+\frac{nL[\mathbf{x}]}{n!}+\cdots} = G^{e^{L[\mathbf{x}]}}\text{。}\end{aligned}$$

这样，由(9.35)式知$e^{G^L[\mathbf{x}]}=G^{e^{L[\mathbf{x}]}}$，即得到等式(9.39)

$$e^{G^L[\mathbf{x}]}=\mathbf{I}+\frac{G^L[\mathbf{x}]}{1!}+\frac{G^{2L}[\mathbf{x}]}{2!}+\cdots+\frac{G^{nL}[\mathbf{x}]}{n!}+\cdots\text{。}$$

同时，由等式(9.35)和(9.39)易知指数映照运算规则

$$\begin{aligned}e^{G^L[\mathbf{x}]}\cdot e^{G^{L'}[\mathbf{x}]} &= G^{e^{L[\mathbf{x}]}}\cdot G^{e^{L'}[\mathbf{x}]}\\&= G^{e^{L[\mathbf{x}]}\cdot e^{L'[\mathbf{x}]}}=G^{e^{L[\mathbf{x}]+L'[\mathbf{x}]}}=e^{G^{L[\mathbf{x}]+L'[\mathbf{x}]}},\end{aligned}$$

与通常的指数运算规则$e^x\cdot e^y=e^{x+y}$一致。这时，惠子发现将(9.39)式中的$G^L[\mathbf{x}]$替换为x，得到的

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

正是指数函数e^x的泰勒级数，便把这个发现告诉欧阳博士说："爸爸，(9.39)式中的$G^L[\mathbf{x}]$替换为x后得到的是e^x的泰勒级数，意味着(9.39)是指数函数e^x的泰勒级数在网络流上的推广。那么，这种推广有什么意义呢？"欧阳博士笑了笑，问她是否还记得线性微分方程$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}$在初值为$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$时的解，惠子回答说这时方程的解为$\mathbf{x}(t)=e^{tA}\mathbf{x}_0$且其中的$A$是一个$n$-阶矩阵。欧阳博士又问她："这个解的表示式中，$e^{tA}$是什么意思？"惠子回答说是矩阵和，即

$$e^{tA}=I_n+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^k}{k!}+\cdots \tag{9.40}$$

的简写。欧阳博士告诉她："e^{tA}可不是矩阵求和的简写，它是一个真实的矩阵，称为指数矩阵。相应地，(9.40)是一个矩阵恒等式。"见惠子仍有些不解，欧阳博士又说："你试一试，把等式中的tA替换为x得到什么呢？"惠子回答说替换后得到的是e^x的泰勒级数。欧阳博士告诉她，(9.40)式是e^x的泰勒级数在矩阵e^{tA}上的推广。按网络流的观点，一个$m\times n$-矩阵对应的恰是一个特殊的图，即m条道路P_{n+1}的并mP_{n+1}上的网络流。这样，等式(9.39)不仅可以看作指数函数e^x的泰勒级数在网络流$G^L[\mathbf{x}]$上的一个推广，它还可以视为是矩阵恒等式(9.40)的一般化，即指数函数e^x的泰勒级数不仅作为函数是一个恒等式，它作为网络流上的指数映照，包括指数矩阵(9.40)同样是一个恒等式。这当中体现的，正是数学发展中一条由具体到抽象的发展之路。

4.2.网络微积分. 假设$G^L[t]$是一个关于t的连续网络流，f是$G^L[t]$上的一个连续映照且$\Delta t\to 0$时有$f\left(G^L[t+\Delta t]\right)\to f\left(\overrightarrow{G}^L[t]\right)$。如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(G^L[t+\Delta t]\right)-f\left(G^L[t]\right)}{G^{\Delta t}} \ = \ G^{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(L)[t+\Delta t]-f(L)[t]}{\Delta t}}$$

存在，则称f在$G^L[t]$处可微，记为

$$\frac{df}{dt} \ = \ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(G^L[t+\Delta t]\right)-f\left(G^L[t]\right)}{G^{\Delta t}}\ 。 \tag{9.41}$$

这里，$G^{\Delta t}$中的$\Delta:(v,u)\in E(G)\to\Delta t$。现在，对任一边$(v,u)\in E(G)$，如果映射$C:(v,u)\to c_{vu}$ 为一个常数，则称G^C为一个定常流，简记G^C为C。注意，定常流C并不是常数流G^{L_c}，只有对任一边$(v,u)\in E(G)$均有$c_{vu}=c$ 时C才是一个常数流G^{L_c}，即定常流C是G^{L_c}的推广。

那么，怎样定义网络流上的积分呢？欧阳博士解释说，积分是微分的逆运算，网络流上的积分也不例外。由网络流上映照f可微的定义有

$$\frac{d}{dt}f\left(G^L\right)[t]=F\left(G^L[t]\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}f\left(G^L[t]+C\right)=F\left(G^L[t]\right)\ 。$$

故此，定义网络流$G^L[t]$上的映照f的不定积分为

$$\int F\left(G^L[t]\right)dt \ = \ f\left(G^L[t]\right)+C=G^{f(L)+C}\ 。 \tag{9.42}$$

这样，由(9.41)和(9.42)有微分与积分关系式

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{df}{dt}\left(\overrightarrow{G}^L[t]\right)\right)dt \ &= \ f\left(\overrightarrow{G}^L[t]\right)+C,\\ \frac{df}{dt}\left(\int\left(f\left(\overrightarrow{G}^L[t]\right)\right)dt\right) \ &= \ f\left(\overrightarrow{G}^L[t]\right)\ 。\end{aligned} \tag{9.43}$$

同时，由网络流上映照的微分和积分定义(9.41)和(9.42)式，易知微分d/dt和不定积分$\int$是网络流上的线性映射，即对网络流$G^L[t]$上的任意两个映照f和g，以及定常流C_1,C_2有等式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(C_1\cdot f\left(G^L[t]\right)+C_2\cdot g\left(G^L[t]\right)\right) \ &= \ C_1\cdot\frac{d}{dt}f\left(G^L[t]\right)+C_2\cdot\frac{d}{dt}g\left(G^L[t]\right),\\ \int\left(C_1\cdot f\left(G^L[t]\right)+C_2\cdot g\left(G^L[t]\right)\right) \ &= \ C_1\cdot\int f\left(G^L[t]\right)+C_2\cdot\int g\left(G^L[t]\right)\ 。\end{aligned}$$

注意，欧阳博士告诉惠子，如果映照f在$G^L[t]$处可微，由$G^L[t]$连续和(9.41)知

$$\frac{df}{dt} \ = \ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(G^L[t+\Delta t]\right)-f\left(G^L[t]\right)}{G^{\Delta t}}=G^{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(L)[t+\Delta t]-f(L)[t]}{\Delta t}}=G^{\frac{df(L)}{dt}},$$

即对任一边$(v,u)\in E(G)$，$f(L)(v,u)[t]$作为一个复合函数对t可微；反之，如果映照f在任一边(v,u)上的限制，即复合函数$f(L)(v,u)[t]$对t可微，则有

$$G^{\frac{df(L)}{dL}}=G^{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(L)[t+\Delta t]-f(L)[t]}{\Delta t}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(G^L[t+\Delta t]\right)-f\left(G^L[t]\right)}{G^{\Delta t}}=\frac{df}{dt},$$

即f在网络流$G^L[t]$处可微。这样，就得到一个映照f在网络流$G^L[t]$处可微的一个等价条件，即一个映照f在网络流$G^L[t]$处可微当且仅当对任一边$(v,u)\in E(G)$，复合函数$f(L)$在边(v,u)上的限制$f(L)(v,u)[t]$对t可微。欧阳博士告诉惠子，应用这个等价条件，函数上微分与不定积分一些常用的计算等式可以推广到网络流上。例如，

1）定常流. $\dfrac{dC}{dt}=\mathbf{O}$, $\displaystyle\int \mathbf{O}dt=\mathbf{C}$；

2）线性流. $\dfrac{d}{dt}\left(C\cdot G^t\right)=C$, $\displaystyle\int Cdt=C\cdot G^t+C'$。这里，$C,C'$为定常流，且对任一边$(v,u)\in E(G)$，映射$t:(v,u)\to t$；

3）幂流. $\dfrac{d}{dt}\left(G^{nL}[t]\right)=nG^{(n-1)L}[t]$, $\displaystyle\int G^{(n-1)L}[t]dt=\frac{1}{n}G^{nL}[t]$, $n\in\mathbb{Z}^+$；

4）指数流. $\dfrac{d}{dt}\left(e^{G^t}\right)=G^{\frac{de^t}{dt}}=G^{e^t}=e^{G^t}$, $\displaystyle\int e^{G^t}dt=e^{G^t}$；

5）对数流. 对任一边$\forall(v,u)\in E(G)$，如果$L\neq\mathbf{0}$则有

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left|G^L[t]\right|\right)=G^{\frac{d\ln|L[t]|}{dt}}=G^{\frac{1}{L[t]}}=\frac{1}{G^L[t]},\quad \int\frac{dt}{G^L[t]}=\ln\left|G^L[t]\right|\ 。$$

类似地，还可以得到三角流、双曲流上的微分与积分。例如，

$$\frac{d}{dt}\left(\sin\left(G^L\right)\right)=\cos\left(G^L\right),\qquad \int\sin\left(G^L\right)dt=-\cos\left(G^L\right),$$
$$\frac{d}{dt}\left(\cos\left(G^L\right)\right)=-\sin\left(G^L\right),\qquad \int\cos\left(G^L\right)dt=\sin\left(G^L\right),\ \cdots.$$

4.3.网络积微定理. 作为网络微分的逆运算，(9.42)式给出的是一族网络流，这样引入的积分在网络流之间不是$1-1$对应而是$1\leftrightarrow\infty$的。那么，是否可以引入网络流上一种$1-1$对应的积分呢？当然可以！欧阳博士告诉惠子，这就是网络流上映照f的定积分，其引入与函数定积分中采用的分割与求和计算边线$x=a, x=b, y=0$和$y=f(t)$围成的图形面积类似，只不过这里的$f(t)$是$f(L)[t]$，如图9.20所示，即对给定的实数$a,b\in\mathbb{R}$，设$a=x_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$是闭区间$[a,b]$ 上的一个划分，$\Delta t_i=t_k-$

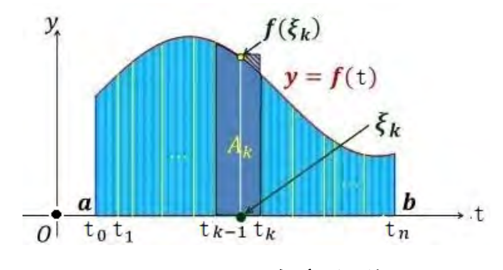


图9.20 网络定积分

t_{k-1}，$\mu = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta t_k$，且对任一边$(v,u)\in E(G)$网络流$G^L[t]$上的映照$f$在$(v,u)$上的限制$f(L)(v,u)[t]$在$[a,b]$上仅有有限个不连续点。这时，如果区间长度$\mu\to 0$，即端点逐渐趋近和二为一时和$\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(G^L[\xi_k]\right)\cdot G^{\Delta t_k}$存在，则定义网络流$G^L[t]$在区间$[a,b]$上的定积分

$$\int\limits_a^b f\left(G^L[t]\right)dt \ = \ \lim_{\mu\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(G^L[\xi_i]\right)\cdot G^{\Delta t_k},$$

这里，对任一边$(v,u)\in E(G)$，网络流$G^{\Delta t_i}$中的映射Δt_k ： $(v,u)\to\Delta t_k$，$\xi_i\in[t_{k-1},t_k]$为区间$[t_{k-1},t_k]$中的任一点。注意，在$\mu\to 0$时，函数$y=f(t)$由曲线趋近于直线$y=f(t_k)$或$f(t_{k-1})$，对应的矩形A_k面积$A_k\to f\left(G^L\right)[\xi_k]\cdot\Delta_k$。这里，$1\le i\le n$。

由定义易知

$$\int\limits_a^a f\left(G^L[t]\right)dt = \mathbf{O},$$

$$\int\limits_a^b f\left(G^L[t]\right)dt + \int\limits_b^c f\left(G^L[t]\right)dt = \int\limits_a^c f\left(G^L[t]\right)dt \text{ 。}$$

同时，由网络流运算知

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(G^L[\xi_i]\right)\cdot G^{\Delta t_i} &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} G^{f(L)[\xi_i]}\cdot G^{\Delta t_i}\\ &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} G^{f(L)[\xi_i]\Delta t_i}\\ &= \lim_{\mu\to 0} G^{\sum\limits_{i=1}^{n} f(L)[\xi_i]\Delta t_i} = G^{\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(L)[\xi_i]\Delta t_i} \text{ 。}\end{aligned}$$

这样一来，当$\mu\to 0$，

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(G^L[\xi_i]\right)\cdot G^{\Delta t_i} \text{ 存在 } \Leftrightarrow \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(L)[\xi_i]\Delta t_i \text{ 存在}$$

即对任一边$\forall(v,u)\in E(G)$，复合函数$f(L)(v,u)[t]$可积。

注意，由网络流上微分的定义，

$$\frac{d}{dt}F\left(G^L[t]\right) = f\left(G^L[t]\right)$$

蕴含着对任一边$(v,u)\in E(G)$有$\dfrac{d}{dt}F(L)(v,u)[t]=f(L)(v,u)[t]$，即

$$\begin{aligned}\int_a^b f\left(G^L[t]\right)dt &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(G^L[\xi_i]\right)\cdot G^{\Delta t_i}=G^{\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(L)[\xi_i]\Delta t_i}=G^{\int_a^b f(L)[t]dt}\\ &= G^{F(L)[b]-F(L)[a]}=F\left(G^L[t]\right)\Big|_{t=b}-F\left(G^L[t]\right)\Big|_{t=a}\text{。}\end{aligned}$$

这样，就得到网络积微的基本定理，即如果f是网络流$G^L[t],t\in[a,b]$上的连续映照，且在区间$[a,b]$上至多存在有限个不连续点，

$$\frac{d}{dt}F\left(G^L[t]\right)=f\left(G^L[t]\right),$$

则有

$$\int_a^b f\left(G^L[t]\right)dt=F\left(G^L[t]\right)\Big|_{t=b}-F\left(G^L[t]\right)\Big|_{t=a}\text{。}\tag{9.44}$$

显然，(9.44)是函数积分中牛顿-莱布尼茨公式在网络流上的一个推广，该公式极大地简化了网络流上的定积分计算。例如，图9.21中，(a)是一个网络流$G^L[t]$，(b)是网络流$G^L[t]$在区间$[2,4]$上的积分。

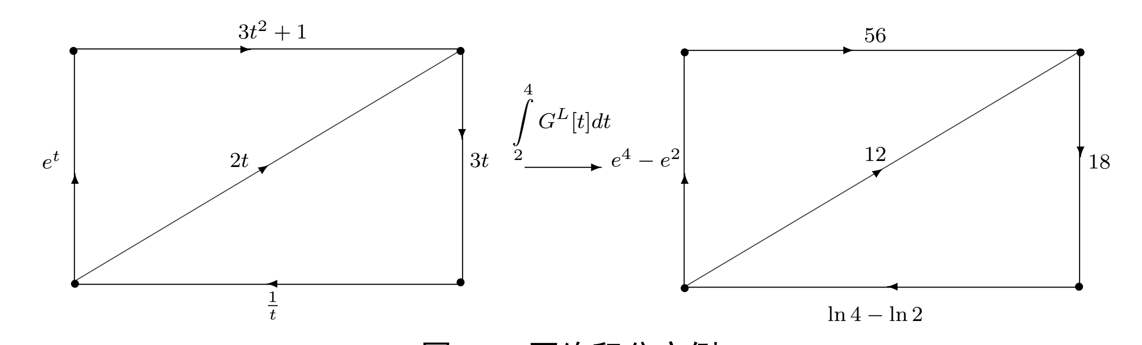


图8.21 网络积分实例

第5节 网络方程

一般地，网络方程是未知项为网络流的方程式或一族方程。相应地，方程的解是这一族方程的解，即一个网络流， 是人用网络流模拟一件事物T得到不同的含有

未知项的表示式$f\left(G^L(T)\right), g\left(G^L(T)\right)$，而客观事物$T$不以人的形式表示不同而改变。这时，一定有等式$f\left(G^L(T)\right)=g\left(G^L(T)\right)$，包括网络流上的代数方程、函数方程和微分方程等。欧阳博士告诉惠子，一个方程有解还是无解依赖于对解的存在域假设，即在什么范围内求解给定的方程。例如，代数方程求解依赖于解所在的数域，函数方程、微分方程依赖于解所在的函数域假设。类似地，网络方程的求解依赖于在那个图G上的数域或函数域。例如，代数方程$2x-4=0$在实数域$\mathbb{R}$中的解是$x=2$。现在，假设$G=K_3$为一个3-阶完全图或3-圈，解的数域仍为$\mathbb{R}$，则有常数流$2=K_3^{L_2}, 4=K_3^{L_4}$。相应地，方程$2x-4=0$变为$K_3^{L_2}\cdot X-K_3^{L_4}=\mathbf{O}$。这样，由网络流的运算规则，有$K_3^{L_2}\cdot X=K_3^{L_4}+\mathbf{O}=K_3^{L_4}$以及$K_3^{L_2}\cdot X=K_3^{L_4}\cdot 1/K_3^{L_2}=K_3^{L_4/L_2}=K_3^{L_2}$，即对应的网络方程解为$X=K_3^{L_2}$，仍为一个常数流。



图9.22 我不是我是谁呢

5.1.线性网络方程. 对任一整数$n\geq 1$、给定的图G上的网络流族$\left\{G^L[t]\right\}$和mn个定常流$C_{ij}, 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n$，族$\left\{G^L\right\}$ 中是否存在n个网络流$X_1, X_2, \cdots, X_n$使得线性网络方程组

$$\left\{\begin{array}{l} C_{11}\cdot X_1+C_{12}\cdot X_2+\cdots+C_{1n}\cdot X_n=G^{L_1} \\ C_{21}\cdot X_1+C_{22}\cdot X_2+\cdots+C_{2n}\cdot X_n=G^{L_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{m1}\cdot X_1+C_{m2}\cdot X_2+\cdots+C_{mn}\cdot X_n=G^{L_m} \end{array}\right. \tag{9.45}$$

成立呢？这里，对任意整数$1\leq j\leq n$，$X_j=G^{L_i}$是族$\left\{G^L\right\}$中n个网络流。这时，欧阳博士解释说，对任一边$(v,u)\in E(G)$，假设未知网络流X_j中边(v,u)上的流量为x_j^{vu}，定常流C_{ij}中边(v,u)上的流量为c_{ij}^{vu}，则线性网络流方程(9.45)在边(v,u)上对应的线性方程组

$$\left\{\begin{array}{l} c_{11}^{vu}x_1^{vu}+c_{12}^{vu}x_2^{vu}+\cdots+c_{1n}^{vu}x_n^{vu}=L_1(v,u) \\ c_{21}^{vu}x_1^{vu}+c_{22}^{vu}x_2^{vu}+\cdots+c_{2n}^{vu}x_n^{vu}=L_2(v,u) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1}^{vu}x_1^{vu}+c_{m2}^{vu}x_2^{vu}+\cdots+c_{mn}^{vu}x_n^{vu}=L_1(v,u) \end{array}\right. \tag{9.46}$$

为矩阵方程(5.34)，即$\mathbf{Ax^t}=\mathbf{B}$。这里，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} c_{11}^{vu} & c_{12}^{vu} & \cdots & c_{1n}^{vu} \\ c_{21}^{vu} & c_{22}^{vu} & \cdots & c_{2n}^{vu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1}^{vu} & c_{m2}^{vu} & \cdots & c_{mn}^{vu} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} L_1(v,u) \\ L_2(v,u) \\ \vdots \\ L_m(v,u) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^t=\begin{pmatrix} x_1^{vu} \\ x_2^{vu} \\ \vdots \\ x_n^{vu} \end{pmatrix}。$$

这样，由线性方程组(9.46)的可解条件知线性网络方程(9.45)可解当且仅当对任一边$(v,u)\in E(G)$有

$$\text{rank}\left[c_{ij}^{vu}\right]_{m\times n}=\text{rank}\left[c_{ij}^{vu}\right]_{m\times(n+1)}^{+}。$$

这里，rank$\mathbf{A}$表示矩阵$\mathbf{A}$的秩，即矩阵方程(5.34)采用消元法得到的整数l，

$$\left[c_{ij}^{vu}\right]_{m\times(n+1)}^{+}=\begin{bmatrix} c_{11}^{vu} & c_{12}^{vu} & \cdots & c_{1n}^{vu} & L_1(v,u) \\ c_{21}^{vu} & c_{22}^{vu} & \cdots & c_{2n}^{vu} & L_2(v,u) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ c_{m1}^{vu} & c_{m2}^{vu} & \cdots & c_{mn}^{vu} & L_m(v,u) \end{bmatrix}。$$

特别地，如果C_{ij}为常数流$G^{L_{c_i}}$，$G^{L_i}=G^{L_{b_i}},1\leq i\leq m,1\leq j\leq n$，则线性网络方程(9.45)就是线性方程组(5.34)。这时，得到的解$X_j=G^{L_{x_j}},1\leq j\leq n$是常数流。

5.2.高次网络方程. 在网络流族$\{G^L[t]\}$中，对任一整数$n\geq 1$考虑n次网络方程

$$C_n\cdot X^n+C_{n-1}\cdot X^{n-1}+\cdots+C_1\cdot X+C_0=\mathbf{O}\ 。\tag{9.47}$$

这当中，对任一边$(v,u)\in E(G)$和整数$1\leq i\leq n$，定常流C_i中的边(v,u)流量为c_i^{vu}且$c_n^{vu}(v,u)\neq 0$。假设$X=G^L$是网络方程(9.47) 的解，则由定义知(9.47)的左端

$$\begin{aligned} &C_n\cdot X^n+C_{n-1}\cdot X^{n-1}+\cdots+C_1\cdot X+C_0 \\ &\qquad = G^{C_nL^n+C_{n-1}L^{n-1}+\cdots+C_1L+C_0} = G^{p(L)}, \end{aligned}$$

即网络方程(9.47)等价于$G^{p(L)}=\mathbf{O}$。这里，多项式$p(L)=C_nL^n+C_{n-1}L^{n-1}+\cdots+C_1L+C_0$。同时，对任一边$(v,u)\in E(G)$有

$$c_n^{vu}L^n(v,u)+c_{n-1}^{vu}L^{n-1}(v,u)+\cdots+c_1^{vu}L(v,u)+c_0^{vu}=0\ 。\tag{9.48}$$

这样，应用经典代数学中的代数基本定理，代数方程(9.48)在复数域$\mathbb{C}$中有n个根λ_1^{vu}, $\lambda_2^{vu},\cdots,\lambda_n^{vu}$，即网络方程(9.47)任一解$G^L$中的映射$L$为

$$L:\ (v,u)\to\ \{\lambda_1^{vu},\lambda_2^{vu},\cdots,\lambda_n^{vu}\},\quad (v,u)\in E(G),$$

进而得到网络方程(9.47)的网络流解$X = G^L$。

反之，对任一边$(v,u) \in E(G)$定义映射$L:(v,u) \to \{\lambda_1^{vu}, \lambda_2^{vu}, \cdots, \lambda_n^{vu}\}$和网络流$G^L$，则由

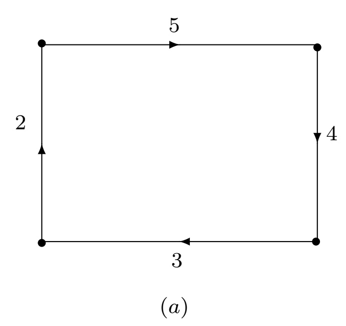
$$c_n^{vu}L^n(v,u) + c_{n-1}^{vu}L^{n-1}(v,u) + \cdots + c_1^{vu}L(v,u) + c_0^{vu} = 0$$

易知$G^{p(L)} = \mathbf{O}$，即对网络流$X = G^L$有

$$C_n \cdot X^n + C_{n-1} \cdot X^{n-1} + \cdots + C_1 \cdot X + C_0 = \mathbf{O}\ 。$$

这样，就有网络方程(9.47)在网络流族$\{G^L[t]\}$中解的条件，即对任一边$(v,u) \in E(G)$，映射$L:(v,u) \to \{\lambda_1^{vu}, \lambda_2^{vu}, \cdots, \lambda_n^{vu}\}$。这里，对任一整数$1 \le i \le n$，$L_{c_i}(v,u) \in \mathbb{C}$且$L_{c_n}(v,u) \neq 0$，$\lambda_1^{vu}, \lambda_2^{vu}, \cdots, \lambda_n^{vu}$为多项式$p(L)(v,u)[t]$在复数域$\mathbb{C}$上的$n$个根。

注意，上面构造的网络方程(9.47)的解有些是相同的，仅是展现在平面上的视角不同。例如，图9.23中的两个网络流(a)和(b)在本质上是一样的，可以由对画板的旋转，即从一个网络流(a)绕图形中心旋转180^o得到网络流(b)，与网络流(a)在组合结构和边流量上没有本质的区别。



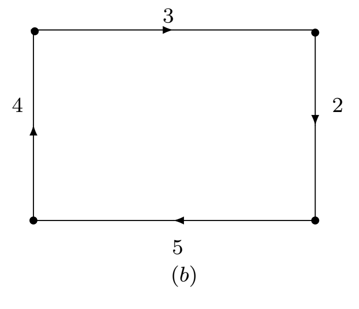


图9.23 同构网络流

那么，怎样刻画两个网络流在本质上是一致的，进而计算网络方程(9.47)有多少个本质上不同的解G^L呢？欧阳博士解释说，图9.23中的旋转180^o度是图像的一个对称变换，特点是把网络流(a)中的节点变为(b)中的节点，边变为(b)中的边且保持边上的流量不变。一般地，正方形上存在4个保持图像不变的对称变换，即绕着正方形中心旋转$0^o, 90^o, 180^o$和270^o。沿正方形对边的中心线翻折也保持正方形不变，但它等同于绕正方形中心旋转180^o，不过(a)和(b)中的四个边上均有方向，翻折(a)并不等于(b)，因为(a)翻折后得到的网络流方向与(b)不同。类似地，正方体上有24个保持立方体不变的对称变换，分别为：保持各点不动的变换1个、

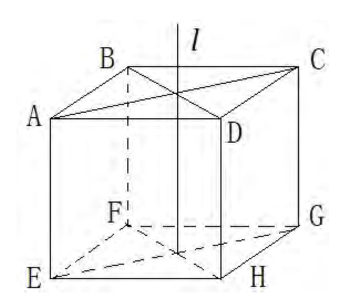


图9.24 **正方体对称变换**

绕三条面心-面心轴，即面ABCD-EFGH的l轴、ABFE-CDHG和ADHE-BCGF中心轴转动$90^o, 180^o$和270^o的变换9个、四条绕棱心-棱心，即棱AB-GH、CD-EF、AE-CG和BF-DH中心轴旋转180^o变换6个和四条空间对角线AG、CE、BH 和DF转动$120^o, 240^o$的变换8个，如图9.24所示。为简化起见，将图9.24 中正方体的六个面用数字$1, 2, 3, 4, 5$和6标记，即面$ABCD = 1, EFGH = 2, ABFE = 3, CDHG = 4, ADHE = 5, BCGF = 6$。这样一来，正方体上的对称变换可以简化为数字$1, 2, 3, 4, 5, 6$之间的变动，称为置换。例如，绕$l$轴转动$180^o$对应的变换是$1 \leftrightarrow 1,\ 2 \leftrightarrow 2,\ 3 \leftrightarrow 4,\ 5 \leftrightarrow 6$。

一般地，设$\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是一个由$n$个元素构成的集合，则$\Omega$上的一个置换$\sigma : \Omega \to \Omega$是其元素间的一个$1-1$对应。记元$a_i$在置换$\sigma$下的像为$a_i^\sigma$，$1 \le i \le n$。这样，$\sigma$可以一般地表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^\sigma & a_2^\sigma & \cdots & a_n^\sigma \end{pmatrix}。$$

注意，上面Ω中的元素$a_i, 1 \le i \le n$是元素的表示符号。这样，为简化起见，可以取$\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$。这时，置换$\sigma$可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1^\sigma & 2^\sigma & \cdots & n^\sigma \end{pmatrix}。$$

现在，设σ, τ是Ω上的两个置换，则它们的乘积$\sigma\tau$的含义是置换τ和σ对元$i = 1, 2, \cdots, n$施以连续作用，即$i^{\sigma\tau} = (^\sigma)^\tau$。例如，假设

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

则有

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

如果σ对一个元$a_1 \in \Omega$的作用表现为$a_1^\sigma = a_2, a_2^\sigma = a_3, \cdots, a_{m-1}^\sigma = a_m, a_m^\sigma = a_1$，即$a_1$经过$\sigma$的$m$次重复作用回到$a_1$，记为$(a_1, a_2, \cdots, a_m)$，称为$a_1$在$\sigma$的作用为一个$m$-循环；接着，在集合$\Omega \backslash \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$中再选择一个元$b_1$并经$\sigma$重复作用，直至回到$b_1$为止得到第二个循环$(b_1, b_2, \cdots, b_m)$；且这一过程不断进行下去，直至$\Omega$中的每个元都在一个循环中。这样，就得到任一个置换$\sigma$可以唯一表示为互不相交的循环乘积的结论。例如，上面例子中的$\sigma = (1243), \tau = (12)(34)$。

一个集合Ω上的所有置换在连续作用下称为*对称群*S_n，满足代数学中群的公理：①封闭性，即置换的连续作用仍是置换：②可结合性，对任三个置换$\sigma, \tau, \rho \in S_n$，

元$a\in\Omega$有$a^{(\sigma\tau)\rho}=a^{\sigma(\tau\rho)}$；③单位元$1_{id}=(1)(2)\cdots(n)$；④逆元，即对任一个置换$\sigma\in S_n$存在逆元$\sigma^{-1}$使得$\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=1_{id}$。对称群$S_n$的一个子集$H\subset S_n$如果仍满足这四条公理则称$H$为一个置换群。对任一元$\alpha\in\Omega$，置换群$H$对$\alpha$的作用$\alpha^g,g\in H$称为元$\alpha$在$H$作用下的轨道，记为$\alpha^H$。注意，对$h_k,h_l\in H$，如有$\alpha^{h_k}=\alpha^{h_l}$则有$\alpha^{h_kh_l^{-1}}=1_{id}$，即$h_k^{h_l^{-1}}$保持$\alpha$不动。一般地，$H$ 中所有保持α不动的元构成H的一个子群，称为α的稳定子群，记为H_α。这样一来，如果轨道$\alpha^H=\left\{\alpha,\alpha^{h_1},\cdots,\alpha^{h_{s-1}}\right\}$，则元$\alpha,\alpha^{h_1},\cdots,\alpha^{h_{s-1}}$在$H$作用下，任两个轨道的交集为空集，轨道的长度均为$s$，且$s$等于$H$中保持$a$不动的元的个数$|H_\alpha|$，即有Burnside引理

$$\left|a^H\right||H_\alpha| = |H| \text{。} \tag{9.49}$$

特别地，取集合Ω为一个图G的顶点集$V(G)$。这时，$V(G)$上的所有保持顶点邻接关系的置换构成的置换群称为G的自同构群，记为$\mathrm{Aut}G$，即对任一元$g\in\mathrm{Aut}G$和任一边$(v,u)\in E(G)$有$g(v,u)=(g(v),g(u))$。

那么，怎样判断两个网络流G^{L_1},G^{L_2}同构呢？欧阳博士解释说，网络流同构是在图同构的基础上增加边流量的保持性，即如果存在一个图G的自同构$g\in\mathrm{Aut}G$使对任一边$(v,u)\in E(G)$有$gL_1(v,u)=L_2g(v,u)=L_2(g(v),g(u))$，则称$g$为网络流$G^{L_1}$和$G^{L_2}$间的一个同构。特别地，如果$L_1=L_2$，则称$g$为网络流$G^L$上的一个自同构。同样，所有$G^L$上的自同构构成一个置换群，记为$\mathrm{Aut}G^L$。这样，由自同构定义，图$G$与其上的网络流$G^L$自同构群间存在关系$\mathrm{Aut}G^L\preceq\mathrm{Aut}G$，$\left|\mathrm{Aut}G^L\right|\leq|\mathrm{Aur}G|$。

现在，可以确定网络方程(9.47)在网络流族$\left\{G^L[t]\right\}$中有多少个本质上不同，即不同构的解G^L的个数$n\left(G^L\right)$了。首先，由网络方程(9.47)解的条件，按映射L在任一边$(v,u)\in E(G)$上的选择不同，共有$n^{|E(G)|}$种选择方法，且这样选择确定的两个网络流G^{L_1}，G^{L_2}同构当且仅当存在一个图G的自同构$\varphi:G\to G$使对任一边$(v,u)\in E(G)$有$L_2(v,u)=L_1\varphi(v,u)$；其次，设Ω是所有映射为

$$L:\ (v,u)\to\ \{\lambda_1^{vu},\lambda_2^{vu},\cdots,\lambda_n^{vu}\}$$

的网络流解G^L构成的集合，并考虑自同构群$\mathrm{Aut}G^L$在Ω上的作用。注意，对网络方程(9.47)的任一解G^{L_0}，网络方程(9.47)同构解的个数为$\left|\left(G^{L_0}\right)^{\mathrm{Aut}G^L}\right|$，即$G^{L_0}$在自同构群$\mathrm{Aut}G^L$作用下的轨道长度，而自同构群$\mathrm{Aut}G^L$中，只有单位元$1_{id}$保持$G^{L_0}$不动，即$\left(\mathrm{Aut}G^L\right)_{G^{L_0}}=\{1_{id}\}$，$\left|\left(\mathrm{Aut}G^L\right)_{G^{L_0}}\right|=1$。

这样，由Burnside引理$\left|\mathrm{Aut}G^L\right|=\left|(\mathrm{Aut}G^L)_{G^{L_0}}\right|\left|\left(G^{L_0}\right)^{\mathrm{Aut}G^L}\right|$知$\left|\left(G^L\right)^{\mathrm{Aut}G^L}\right|=\left|\mathrm{Aut}G^L\right|$，即$G^{L_0}$在自同构群$\mathrm{Aut}G^L$作用下的长度为$\left|\mathrm{Aut}G^L\right|$，是个常数。故此，网络

方程(9.47)在网络流族$\left\{G^L\right\}$中的不同构解个数为

$$n\left(G^L\right) \;=\; \frac{n^{|E(G)|}}{|\mathrm{Aut}G^L|}\text{。} \tag{9.50}$$

例如，对任一整数$m \geq 3$，取$G = C_m$, K_m或B_m，则有

$$n\left(G^L\right) \;=\; \frac{n^m}{2m}, \quad \frac{n^m}{m!} \;\text{或}\; \frac{n^{\frac{m(m-1)}{2}}}{m!}\text{。}$$

5.3.网络微分方程. 一阶常微分方程有一个紧凑公式确定其通解。类似地，一阶网络微分方程也存在这样一个紧凑公式。一般地，设$G^{L_1}[t], G^{L_0}[t]$ 为网络流族$\left\{G^L[t]\right\}$上的两个已知网络流，一阶网络微分方程的一般形式为

$$\frac{dX}{dt} = G^{L_1}[t]\cdot X + G^{L_0}[t]\text{ 。} \tag{9.51}$$

首先，假设$G^{L_0}[t] = \mathbf{O}$，则有

$$\frac{dX}{dt} = G^{L_1}[t]\cdot X \quad \Rightarrow \quad \frac{dX}{X} = G^{L_1}[t]dt\text{ 。} \tag{9.52}$$

这时，对(9.52)式两端积分则有

$$\ln|X| = \int G^{L_1}[t]dt + C' \quad \Rightarrow \quad X[t] = C'\cdot e^{\int G^{L_1}[t]dt}\text{ 。} \tag{9.53}$$

这里，C'是一个定常流。接下来，假设C'随t变化，即$C' = G^L[t]$并代入(9.51)，则有

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\left(G^L[t]\right)\right)e^{\int G^{L_1}[t]dt} &+ G^L[t]\cdot e^{\int G^{L_1}[t]dt}\cdot G^{L_1}[t] \\ &= G^{L_1}[t]\cdot G^L[t]\cdot e^{\int G^{L_1}[t]dt} + G^{L_0}[t]\text{ 。}\end{aligned}$$

合并上式中的同类项并化简，有

$$\frac{d}{dt}\left(G^L[t]\right) = G^{L_0}\cdot e^{-\int G^{L_1}dt} \quad \Rightarrow \quad G^L[t] = \int G^{L_0}\cdot e^{-\int G^{L_1}dt}dt + C\text{ 。}$$

这里，C为一个定常流。这样，网络方程(9.51)的通解可表示为

$$X[t] = e^{\int G^{L_1}dt}\cdot\left(\int G^{L_0}\cdot e^{-\int G^{L_1}dt}dt + C\right)\text{ 。} \tag{9.54}$$

对一阶网络微分方程(9.51)上的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt} = G^{L_1}[t]\cdot X + G^{L_0}[t] \\ X|_{t=t_0} = G^{L(0)}\end{cases} \tag{9.55}$$

可以经由确定(9.54)中的定常流C解决。实际上，假设初值问题(9.55)的解为$X = G^L[t]\cdot e^{\int_{t_0}^{t} G^{L_1}dx}$并将其代入网络方程(9.55)，则通过合并同类项有

$$\frac{d}{dt}\left(G^L[t]\right) = G^{L_0}[t]\cdot e^{-\int_{t_0}^{t} G^{L_1}[x]dx} \ \Rightarrow\ G^L[t] = \int\limits_{t_0}^{t} G^{L_0}[x]\cdot e^{-\int_{t_0}^{x} G^{L_1}[s]ds}dx + C\ 。$$

故此，

$$X[t] = \left(\int\limits_{t_0}^{t} G^{L_0}[x]\cdot e^{-\int_{t_0}^{x} G^{L_1}[s]ds}dx + C\right)\cdot e^{\int_{t_0}^{t} G^{L_1}[x]dx}\ 。$$

这样，取$t = t_0$则有

$$X(t_0) = \left(\int\limits_{t_0}^{t_0} G^{L_0}[x]\cdot e^{-\int_{t_0}^{t_0} G^{L_1}[s]ds}dx + C\right)\cdot e^{\int_{t_0}^{t_0} G^{L_1}[x]dx}$$

由假设条件和网络积分的性质，有

$$X|_{t=t_0} = G^{L(0)},\quad \int_{t_0}^{t_0} G^{L_0}[x]dx = \int_{t_0}^{t_0} G^{L_1}[x]dx = \mathbf{O}\ 。$$

这样一来，$X(t_0) = (\mathbf{O}+C)\cdot e^{\mathbf{O}} = C\cdot I = C$，即$C = X(t_0) = G^{L(0)}$。故此，初值问题(9.55)的解为

$$X[t] = \left(\int\limits_{t_0}^{t} G^{L_0}[x]\cdot e^{-\int_{t_0}^{x} G^{L_1}[s]ds}dx + G^{L(0)}\right)\cdot e^{\int_{t_0}^{t} G^{L_1}[x]dx}\ 。\qquad (9.56)$$

例如，取$G^{L_1}[t], G^{L_0}[t]$为图9.25中的(a)和(b)，则网络方程(9.51)的通解为图9.25(c)，其中α为一个常数。

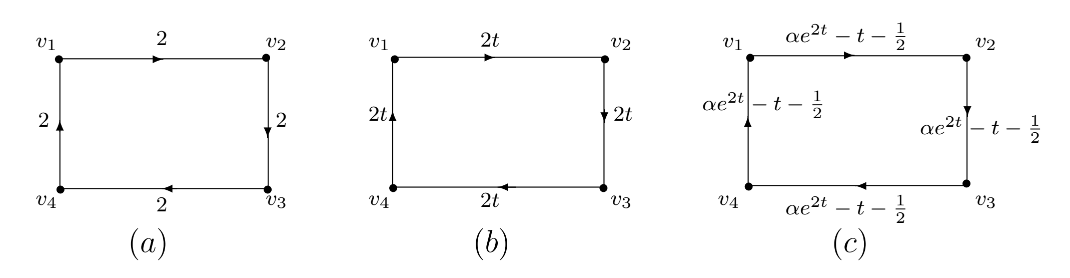


图9.25 网络方程通解示例

特别地，如对任一边$(v,u)\in E(G)$取$L(0):(v,u)\to te^t$，则初值问题(9.56)的解，即图9.25(c)中的$\alpha = 1/2$。

对任一整数$n\geq 1$和定常流$C_0,C_1,\cdots,C_{n-1}$，图G上网络流族$\left\{G^L[t]\right\}$中的方程

$$\frac{d^nX}{dt^n}+C_{n-1}\cdot\frac{d^{n-1}X}{dt^{n-1}}+C_{n-1}\cdot\frac{d^{n-2}X}{dt^{n-2}}+\cdots+C_1\cdot\frac{dX}{dt}+C_0=\mathbf{O} \tag{9.57}$$

称为常系数线性微分网络方程，对应的特征方程为代数网络方程

$$\Lambda^n+C_{n-1}\cdot\Lambda^{n-1}+C_{n-2}\cdot\Lambda^{n-2}+\cdots+C_1\cdot\Lambda+C_0=\mathbf{O}\text{。} \tag{9.58}$$

特别的，对任一边$(v,u)\in E(G)$，特征方程(9.58)在(v,u)上的限制为代数方程

$$\lambda^n+c_{n-1}^{vu}\lambda^{n-1}+c_{n-2}^{vu}\lambda^{n-2}+\cdots+c_1^{vu}\lambda+c_0^{vu} \;=\; 0 \tag{9.59}$$

现在，假设代数方程(9.59)的n个根为

$$\begin{array}{l}\lambda_1^{vu}=r_1^{vu},\lambda_2^{vu}=r_1^{vu},\cdots,\lambda_{m_{r_1}}^{vu}=r_1^{vu},\\ \lambda_{m_{r_1}+1}^{vu}=r_2^{vu},\lambda_{m_{r_1}+2}^{vu}=r_2^{vu},\cdots,\lambda_{m_{r_1}+m_{r_2}}^{vu}=r_2^{vu},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \lambda_{m_{r_1}+m_{r_2}+\cdots+m_{r_{s-1}}+1}^{vu}=r_s^{vu},\lambda_{m_{r_1}+m_{r_2}+\cdots+m_{r_{s-1}}+2}^{vu}=r_s^{vu},\cdots,\lambda_n^{vu}=r_s^{vu}\text{。}\end{array}$$

这里，$m_{r_1}+m_{r_2}+\cdots+m_{r_s}=n$，则$n$次代数网络方程(9.58)的网络流通解可表示为$\Lambda=G^{L_\lambda}$。这当中，映射$L_\lambda:(v,u)\to\lambda_i^{vu}$, $1\leq i\leq n$。现在，对任一边$(v,u)\in E\left(G\right)$定义一个映射$\tau:G^{L_\lambda}\to G^{\tau(L_\lambda)}$为

$$\tau:\ L_\lambda(v,u)=\lambda_i^{vu}\ \to\ \begin{cases} t^{i-1}e^{r_1^{vu}t}, & 1\leq i\leq m_{r_1},\\ t^{i-1}e^{r_2^{vu}t}, & m_{r_1}+1\leq i\leq m_{r_1}+m_{r_2},\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ t^{i-1}e^{r_s^{vu}t}, & m_{r_1}+m_{r_2}+\cdots+m_{r_{s-1}}+1\leq i\leq n,\end{cases}$$

则$\left\{G^{\tau\left(L_\lambda^1\right)},G^{\tau\left(L_\lambda^2\right)},\cdots,G^{\tau\left(L_\lambda^m\right)}\right\}$为网络方程(9.57)解空间$\mathscr{S}$的一组生成基，且解空间$\mathscr{S}$的维数

$$\dim\mathscr{S} \;=\; \frac{n^{|E(G)|}}{|\mathrm{Aut}G^L|}\text{。} \tag{9.60}$$

那么，为什么网络方程(9.57)的解空间是这样的呢？欧阳博士解释说，首先，对任一边$(v,u)\in E(G)$，网络方程(9.57)在边(v,u)上的限制是常系数线性微分方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+c_{n-1}^{vu}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+c_{n-2}^{vu}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+c_1^{vu}\frac{dx}{dt}+c_0^{vu}=0\text{。} \tag{9.61}$$

这样，由常系数线性微分方程解空间的构造，设(9.61)的通解为$x\;=\;C_1'\tau\left(L_\lambda^1\right)+C_2'\tau\left(L_\lambda^2\right)+\cdots+C_m'\tau\left(L_\lambda^m\right)$，则任一个线性组合

$$\begin{aligned}X \;&=\; C_1'\cdot G^{\tau\left(L_\lambda^1\right)}+C_2'\cdot G^{\tau\left(L_\lambda^2\right)}+\cdots+C_m'\cdot G^{\tau\left(L_\lambda^m\right)}\\ &=\; G^{C_1'\tau\left(L_\lambda^1\right)+C_2'\tau\left(L_\lambda^2\right)+\cdots+C_m'\tau\left(L_\lambda^m\right)} \;=\; \mathbf{O},\end{aligned}$$

即X为网络方程(9.57)的一个网络流解。同时，网络流$G^{\tau\left(L_\lambda^1\right)}, G^{\tau\left(L_\lambda^2\right)}, \cdots, G^{\tau\left(L_\lambda^m\right)}$是线性独立的，即不存在定常流$C_1, C_2, \cdots, C_m$使得

$$C_1 \cdot G^{\tau\left(L_\lambda^1\right)} + C_2 \cdot G^{\tau\left(L_\lambda^2\right)} + \cdots + C_m \cdot G^{\tau\left(L_\lambda^m\right)} = \mathbf{O}, \tag{9.62}$$

如其不然，则对任一边$(v,u) \in E(G)$有

$$c_1^{vu}\tau\left(L_\lambda^1(v,u)\right) + c_2^{vu}\tau\left(L_\lambda^2(v,u)\right) + \cdots + c_m^{vu}\tau\left(L_\lambda^m(v,u)\right) = 0,$$

与线性常微分方程理论中$\{\tau(\lambda_i^{vu}),\ 1 \le i \le n\}$构成方程(9.61)解空间的一组生成基矛盾。故此，$\left\{G^{\tau\left(L_\lambda^1\right)}, G^{\tau\left(L_\lambda^2\right)}, \cdots, G^{\tau\left(L_\lambda^m\right)}\right\}$构成网络方程(9.57)解空间$\mathscr{S}$的一组生成基。注意，解空间$\mathscr{S}$的维数$\dim\mathscr{S}$由代数网络方程(9.58)中不同构网络流解的个数决定。这样，由代数网路方程(9.58)中不同构网络流解的个数(9.50)式得到解空间$\mathscr{S}$的维数，即公式(9.60)。

欧阳博士问惠子是否还记得一阶常微分方程$dx/dt = x$在初值$x|_{t=0} = 1$时的解，惠子回答说这时的解为$x = e^t$。接着，欧阳博士让她在图G上的网络流族$\{G^L\}$中，在初值$X|_{t=0} = \mathbf{I}$时试着求解网络方程$dX/dt = X$。惠子摇了摇头，说不知道怎样求网络流解。欧阳博士告诉她有两种方法。一种方法是假设解为$X[t] = G^L[t]$，则网络微分方程化为$dX/dt = G^{dL[t]/dt} = G^{L[t]}$，在任一边$(v,u) \in E(G)$上求对应的微分方程$dL(v,u)[t]/dt = L(v,u)[t]$的函数解。这时，分离变量

$$\frac{dL(v,u)[t]}{L(v,u)[t]} = dt \quad \Rightarrow \quad L(v,u)[t] = c_{vu}e^t,$$

再由初值条件$X|_{t=0} = \mathbf{I}$知$L(v,u)[0] = c_{vu} = 1$，即$L(v,u)[t] = e^t$。这样，得到网络方程$dX/dt = X$在网络流族$\{G^L\}$中的解为$X = G^{e^t} = e^{G^t}$；另一种方法是直接由网络流运算，分离变量得到$dX/X = dt$，再在网络流族$\{G^L\}$中积分，即有

$$\ln|X| = G^t + C' = tG + C' \quad \Rightarrow \quad X = C \cdot e^{tG}\text{。}$$

这当中，$C = e^{C'}$。接下来，再由初值条件$X|_{t=0} = \mathbf{I}$知$X|_{t=0} = C \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I}$，即得到网络流解为指数映照$X = e^{tG} = G^{e^t}$。

听到这里，惠子终于弄明白为什么在网络算术中要引入指数映照$e^{G^L[\mathbf{x}]}$以及等式(9.39)的价值，不无感悟地问欧阳博士："网络算术的功用既然这么强大，用它是否就可以模拟宇宙万物了呢？"欧阳博士告诉她，经典数学可看作是在模拟系统基元行为，网络算术是经典数学在组合结构G上的一种拓广。从这一视角看，网络算术能模拟的事物要比经典数学中那种把事物抽象为一个点或空间的方法宽泛，但这

还远不够，因为它没有考量各基元的自发行为。同时，任一边$(v,u)\in E(G)$上的流量遵从函数$L(v,u)[\mathbf{x}]$的假设过于理想，均需要进一步拓广以系统认知万物。

第6节 注释与评论

6.1. 网络流能够刻画的事物真实范围很有限，因为网络流为实践中路网、管网的抽象，是标号为实数的一种特殊标号图。一般地，人们假设观察者是站在网络流上的一点分析网络上的流量及走向，解决一些实际的输运优化问题[ChL]。那么，如果一个人是站在网络流外又能看到什么情景呢？这时，观察者看到的是网络的整体变化情况，包括边上流量的局部变化和网络变化，如节点的减少或增加、节点间边的连接与取消等整体变化情形。这样，网络流在理论上同样可应用于微观事物的刻画。例如，理论物理中以夸克为基本粒子，将质子、中子和介子分别视为由三个夸克或两个夸克，组合结构为K_3和K_2的组合物等，但很少有人讨论网络流整体性，且研究网络流的人热衷于解决网络优化问题而忽视网络流在人类认知中的应有价值。

6.2. 网络流算术是在顶点、边的标号为实数时，将网络流视为一个数学元，构建网络流的运算体系。与既有的数学元，如数、映射、函数$f(x),x\in\mathbb{R}$、向量、矩阵和点、线、开集等类似，网络流的整体变化可视为一个数学元的变化。那么，怎样刻画网络流这种数学元及其变化呢？有两种方法，一种是将网络流的变化看作一个序列，按序列的性质刻画网络流变化；另一种是将网络流变化视为连续变化，类似于函数论中的函数，由网络流的连续映照刻画网络流的整体变化。

6.3. 欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的n-维向量对应于路P_n上的网络流。注意，网络流演化遵循的不是全序而是一种偏序性质。这样，可以类比欧氏空间$\mathbb{R}^n$定义网络流的间距、网络流序列的极限、连续映照等概念，构建网络流代数运算式，特别是指数映照恒等式、网络积微基本定理等。与一般代数方程、微分方程不同，网络流方程的解大多不唯一，需要确定在图的自同构群作用下的等价分类或不同构解个数，用到置换群中的一些结论，如Burnside引理等对网络流方程的解进行同构分类，见有关群论的文献，如[BiM]、[BiW]、[Mao14]、[Mao21]和[Xum]等。

第 10 章
组合真实

****

云想衣裳花想容,
春风拂槛露华浓。
若非群玉山头见,
会向瑶台月下逢。

— 唐.李白《清平调.其一》

************************** 毛林繁. 万物组合论 ***************************

第1节 事物特征

人们对一件事物T的认知由T展现出来的特征进行认知。这里，特征是指那些依附于事物T而展现且可为人类认知的事物属性。关于事物属性，一个基本问题是事物属性是单一的还是多样的问题。欧阳博士问惠子："你觉得一件事物的属性是单一的还是多样的呢？"惠子回答说："我没思索过这个问题，不过如果是单一的，对事物状态的刻画只需要一个参数，这样相对简单，也便于把握事物状态。"欧阳博士告诉惠子，一件事物的单一属性量化后对应于一个实数$a \in \mathbb{R}$。然而，宇宙万物表现出来的形状是千姿百态，如图10.1中所示小姑娘正面、侧面和背面的相貌不同一样。同时，事物展现出来的属性是千差万别的，人们把握一件事物的真实需要从事物展现出的各个角度去认知。这样，站在不同视角观测一件事物行为的表象常常不同。例如，一件事物T展现出的颜色、气味、密度、温度、静止或运动等物理属性，事物的酸性、碱性、氧化性、还原性和热稳定性等化学属性，以及死与活，包括其生长、繁殖、习俗等生物属性表明，事物属性一般是多样性的，即第2章第5节或第7章第2节中由Smarandache重叠系统



图10.1 小姑娘相貌

$$T = \left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\mu_i\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{k\geq 1}\{\nu_k\}\right),$$

给出的事物T在时刻t的认知结果。这里，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$为事物T在时刻t的已知特征，$\nu_k, k\geq 1$为未知特征。

事物属性既然是多样的，欧阳博士问惠子："在对事物系统认知中，怎样刻画一个基元v的状态及其变化呢？"惠子回答说："可将基元v已知的特征组在一起形成一个n-维向量$\mathbf{v}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\in\mathbb{R}^n$，用向量$\mathbf{v}$的变化模拟基元$v$的状态与变化！"欧阳博士点点头说："很好！可这样一来，怎样定量刻画基元v的变化过程呢？"惠子回答说："基元v由一个状态$\mathbf{v}_1\in\mathbb{R}^n$变为另一个状态$\mathbf{v}_2\in\mathbb{R}^n$的过程可以用多元映射$f:\mathbf{v}_1\to\mathbf{v}_2$刻画。"现在，假设事物$T$有$n$个已知特征$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，欧阳博士问惠子："是否可以类似于刻画基元状态变化，人们用一个n元映射$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$刻画事物$T$的状态变化呢？"惠子想了想回答说："应该可以吧！因为$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$是事物T的已知特征，每一个基元v的状态变化都可以用向量$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$上的一个$n$-映射刻画。这样一来，事物$T$的状态变化当然可以用向量$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$上的一

个n-元映射刻画。”见惠子对这个问题的理解还有些含混，欧阳博士提示她：“你再想一想，事物T中的每个基元v的状态变化一定是一致或同步的吗？”听欧阳博士这样问，惠子反应过来了：“对呀，爸爸！只有基元v都是同步时，事物T的状态变化才能用一个n-元映射刻画。可一般地，基元v的状态变化不是同步的，这种情形应当怎样刻画呢？”欧阳博士告诉她，这时，事物T由基元v构成，内蕴一个组合结构即系统标号图G^L，如图10.2 所示，其由一个状态变化为另一个状态可以用标号图G^L的变化，即映射$F: G^{L_1} \to G^{L_2}$刻画。这当中，任一个基元v的状态为一个n-元向量。如果对T的系统认知中有m 个基元，则$F: G^{L_1} \to G^{L_2}$可以看作是$\mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}^{nm}$上一个保持组合结构$G$不变的映射，即

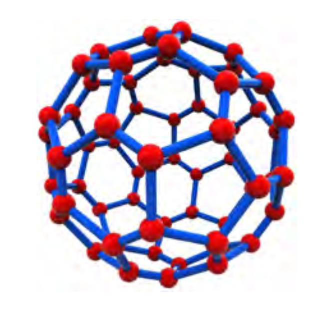


图10.2 组合结构示例

$$F:\left\{\begin{array}{c}\mathbf{v}_1(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\\ \mathbf{v}_2(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{v}_m(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{c}\mathbf{v'}_1(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\\ \mathbf{v'}_2(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{v'}_m(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\end{array}\right\}, \qquad (10.1)$$

类似于网络流，只不过对任一顶点$v \in V(G)$，这里的$L_1(v) = \mathbf{v}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，$L_2(v) = \mathbf{v}'(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$均为$n$-维向量。这样一来，为了刻画事物$T$的状态变化，需首先讨论向量算术，以一般性地模拟事物T的动态行为。

1.1.向量算术. 向量算术是网络算术的一种特殊情形，即图9.14中的情形(a)。这时，可以用欧氏空间中一些常用符号对向量算术结果进行表示。首先，对任一整数$n \geq 1$，设$\{\mathbf{v}_n\}_1^\infty = \{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_k,\cdots\}$为一个向量序列。这里，对任一整数$i \geq 1$均有$\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$。如果对任一个给定的正数$\varepsilon > 0$总是存在一个整数$N$，使得$n > N$时有$|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}| < \varepsilon$，则称向量序列$\{\mathbf{v}\}_1^\infty$ 的极限为v，记为$\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{v}_k = \mathbf{v}$。这时，如设$\mathbf{v}_k = (v_1^k, v_2^k,\cdots,v_n^k)$，$\mathbf{v} = (v_1,v_2,\cdots,v_n)$，则

$$|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}| = \sqrt{\left(v_1^k - v_1\right)^2 + \left(v_2^k - v_2\right)^2 + \cdots + \left(v_n^k - v_n\right)^2} \qquad (10.2)$$

且$\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{v}_k = \mathbf{v}$当且仅当对任一整数$1 \leq i \leq n$有$\lim\limits_{k\to\infty} v_i^k = v_i$，即$k \to \infty$时，向量$\mathbf{v}_k$的分量趋于$\mathbf{v}$上对应的分量。

其次，假设$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$和$\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^m$分别为一个$n$-维向量和一个$m$-维向量，映射$\mathbf{f}: \mathbf{v} \to \mathbf{v}'$或$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$蕴含着有

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \left(f_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right), f_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),\cdots, f_m\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\right),$$

即$\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$。这里，整数$n,m\geq 1$。这时，如对$\mathbf{v},\mathbf{v}_0\in\mathbb{R}^n$和任一给定的正数$\varepsilon>0$存在一个实数$\delta>0$使得$|\mathbf{v}-\mathbf{v}_0|<\delta$时有$|\mathbf{f}(\mathbf{v})-\mathbf{f}(\mathbf{v}_0)|<\varepsilon$，则称$\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$在点$\mathbf{v}_0$连续，记为$\lim\limits_{\mathbf{v}\to\mathbf{v}_0}\mathbf{f}(\mathbf{v})=\mathbf{f}(\mathbf{v}_0)$。这当中，$|\mathbf{v}-\mathbf{v}_0|$ 和$|\mathbf{f}(\mathbf{v})-\mathbf{f}(\mathbf{v}_0)|$分别是向量$\mathbf{v}$，$\mathbf{v}_0$在$\mathbb{R}^n$中和向量$\mathbf{f}(\mathbf{v}),\mathbf{f}(\mathbf{v}_0)$在$\mathbb{R}^m$中两个向量或点的欧氏距离，即(10.2)式中$n=n$或$m$的情形。对应地，一个映射$\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$在点$\mathbf{v}_0$是连续的当且仅当$\mathbf{f}$的每个分量均在点$\mathbf{v}_0$连续。

第三，假设$\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是一个连续映射，变量$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对应的增量$\Delta\mathbf{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)$，如果在$\Delta\mathbf{x}\to\mathbf{0}$时极限

$$\lim_{\Delta\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{\mathbf{f}(\Delta\mathbf{x}+\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x})}{|\Delta\mathbf{x}|}$$

存在，则称$\mathbf{f}$在点$\mathbf{x}$可微，记为

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}=\lim_{\Delta\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{\mathbf{f}(\Delta\mathbf{x}+\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x})}{|\Delta\mathbf{x}|},\tag{10.3}$$

则在$\mathbb{R}^n$的法坐标系$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\}$中，$\mathbf{f}$在点$\mathbf{x}$的微分$\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}$可表示为一个$m\times n$的雅可比矩阵，即

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\frac{\partial f_1}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}&\frac{\partial f_2}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}&\frac{\partial f_m}{\partial x_2}&\cdots&\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}=J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}。$$

这时，$\mathbf{f}$在点$\mathbf{x}$的微分可以用雅可比矩阵表示为

$$df=J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}dx^t,\tag{10.4}$$

即$J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}$是多元函数微分的变换矩阵。特别的，$m=1$或$n=1$时，$J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}$为

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),\quad \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x},\frac{\partial f_2}{\partial x},\cdots,\frac{\partial f_m}{\partial x}\right)^t。$$

这样，映射$\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$在点$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$可微当且仅当$\mathbf{f}$的每个分量均在点$\mathbf{x}$可微。应用矩阵乘法，雅可比矩阵可将复合函数$u=g(f)$的完全微分

$$du=\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial y^i}dy^i=\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial y^i}\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x^j}dx^j=\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x^i}dx^i$$

规则推广到映射$\mathbf{g}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^s$，$\mathbf{f}:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^m$的复合映射$\mathbf{g}(\mathbf{f})$上，即

$$J_{\mathbf{g}(\mathbf{f})|\mathbf{f}}J_{\mathbf{f}|\mathbf{x}}=J_{\mathbf{g}(\mathbf{f})|\mathbf{x}},\quad\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n。\tag{10.5}$$

1.2.Banach空间. 对任一整数$n \geq 1$，欧氏空间$\mathbb{R}^n$是人在直觉上最易接受的一类线性空间。特别是，在$\mathbb{R}^n$的一个法坐标系$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}, |\mathbf{e}_i| = 1$下，两点间的距离与勾股定理计算的结果，即(10.2)式一致。那么，在一般线性空间上是否可以类似于欧氏空间引入度量，计算两个向量间的距离呢？欧阳博士告诉惠子，对任一个线性空间都可以引入向量间的度量ρ，刻画其间距。

（1）**赋范空间.** 一个向量$\mathbf{v}$的范数$\|\mathbf{v}\|$是欧氏空间中长度概念的推广，赋范空间即是在一个线性空间上引入范数，刻画向量长度。我们知道，一个线性空间上仅定义了元素间的加法“+”和数乘·运算，那么，应怎样在一般的线性空间上引入度量呢？欧阳博士解释说，这时，设$(V;\mathscr{F})$为数域$\mathscr{F}$上的一个有限或无限维线性空间，在V上定义一个函数$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$，满足以下三个条件：

(N_1)（非负性）对任意$\mathbf{v} \in V$有$\|\mathbf{v}\| \geq 0$，且$\|\mathbf{v}\| = 0$当且仅当$\mathbf{v} = \mathbf{0}$，称$\mathbf{0}$为V上的$\mathbf{0}$元；

(N_2)（齐次性）对任意$\mathbf{v} \in V$和$\alpha \in \mathscr{F}$均有$\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$；

(N_3)（三角不等式）对任意的$\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$均有$\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|$。

这样的函数$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$一般称为$V$上的一个范数。一般地，一个定义了范数$\|\cdot\|$的线性空间$(V;\mathscr{F})$称为赋范空间，记为$(V;\|\cdot\|)$。

欧氏空间$\mathbb{R}^n$中，任意两个点$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$间有一个非负的函数，即距离$d: \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \to d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$确定两点间的距离，比较点之间的远近。那么，在一个线性空间上是否可以引入这样的函数度量两个向量间的距离呢？欧阳博士告诉惠子，答案是肯定的！这时，对一个线性空间$(V;\mathscr{F})$和任意向量$\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$，定义一个函数$\rho: V \times V \to \mathbb{R}$，满足以下三个条件：

(M_1)（非负性）$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \geq 0$且$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$当且仅当$\mathbf{v} = \mathbf{u}$；

(M_2)（对称性）$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}, \mathbf{v})$；

(M_3)（三角不等式）$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq \rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u}, \mathbf{w})$。

这样的函数$\rho: V \times V \to \mathbb{R}$称为$V$上的一个度量，可类似于欧氏空间$\mathbb{R}^n$用于确定向量间的距离。相应地，一个引入了度量$\rho: V \times V \to \mathbb{R}$的线性空间$(V;\mathscr{F})$称为度量空间，记为$(V;\rho)$。那么，赋范空间与度量空间概念间有什么样的关系呢？欧阳博士解释说，对一个赋范空间$(V;\|\cdot\|)$中的任意向量$\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$，由范数$\|\cdot\|$引入一个函数$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$，则函数$\rho: V \times V \to \mathbb{R}$且满足条件$(M_1) - (M_3)$，即使线性空间$V$成为一个度量空间。

需要注意的是，在V上一般有不止一种方法定义范数$\|\mathbf{v}\|: V \times V \to \mathbb{R}$。那么，怎样判别在同一个线性空间$V$上的两个范数实质上是一致或等价的呢？欧阳博士解

释说，对V上的两个范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$，如果存在两个常数c_1, c_2使得

$$c_1\|\cdot\|_1 \ \le \ \|\cdot\|_2 \ \le \ c_2\|\cdot\|_1, \tag{10.6}$$

则称范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是等价的。这时，在同一个线性空间V上赋予的两个等价范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$，得到的赋范空间$(V;\|\cdot\|_1)$和$(V;\|\cdot\|_2)$无需分别讨论，因为这时对V中的任意两个向量$\mathbf{v},\mathbf{u}\in V$，在$(V;\|\cdot\|_1)$中计算$\rho(\mathbf{v},\mathbf{u})$与在$(V;\|\cdot\|_2)$中计算$\rho(\mathbf{v},\mathbf{u})$的结果仅相差一个与向量$\mathbf{v},\mathbf{u}$无关的常数因子。

等价范数在认知事物真实中并不乏见。例如，在一个欧氏空间$\mathbb{R}^n$上，对任一点$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$或向量$\overrightarrow{Ox}$可以定义三种范数如下：

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1 &= \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},\\ \|\mathbf{x}\|_2 &= |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,\\ \|\mathbf{x}\|_3 &= \max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\},\end{aligned}$$

则$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_3$是$\mathbb{R}^n$上的三个等价范数。为什么是等价的呢？欧阳博士解释说，在柯西不等式(4.34)中取$a_i=1, b_i=|x_i|, 1\le i\le n$则有

$$(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)^2\le n\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)\le n\left(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\right)^2,$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_2 \ \le \ \|\mathbf{x}\|_1 \ \le \ \|\mathbf{x}\|_2。$$

同时，由

$$\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}\le\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\le\sqrt{n}\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}$$

知

$$\|\mathbf{x}\|_3 \ \le \ \|\mathbf{x}\|_1 \ \le \ \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_3。$$

故$\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_3$均与$\|\cdot\|_1$等价。欧阳博士解释说，一般地，有任一个有限维线性空间上的任两个范数等价的结论。更进一步，还有一个范数等价的准则，即一个赋范线性空间$(V;\|\cdot\|)$上的两个范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$等价当且仅当对V的任一个点列$\{\mathbf{v}_n\}_1^\infty$有$\|\mathbf{v}_n\|_1\to 0$当且仅当$\|\mathbf{v}_n\|_2\to 0$。

注意，对任一正数$r>0$，在欧氏空间$\mathbb{R}^n$的任一点$\mathbf{x}$上均存在一个半径为r的开球$\mathbb{B}(\mathbf{x},r)=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n|d(\mathbf{x},\mathbf{y})<r\}$，进而定义$\mathbb{R}^n$中的开集以构造$\mathbb{R}^n$上的拓扑结构使其成为一个拓扑空间。这样，在一个度量空间上是否可以定义开集以使其对应于

一个拓扑空间呢？答案是肯定的！这样的拓扑称为度量拓扑，欧阳博士解释说，给定一个度量空间$(V;\rho)$，用度量ρ取代欧氏空间中的距离d，即可在度量空间V上引入一种拓扑结构。这时，设$U\subset V$为V上的一个子集，如果对任一个向量$\mathbf{v}\in U$均存在一个正数$r>0$使得$\mathbb{B}_r(\mathbf{v})\subset U$，则称$U$是$V$中的一个开集。这当中的$\mathbb{B}_r(\mathbf{v})$是$V$中以$\mathbf{v}$为中心，以$r$为半径的一个开球，即$\mathbb{B}_r(\mathbf{v})=\{\mathbf{u}\in V|\rho(\mathbf{v},\mathbf{u})<r\}$。按照这一定义，开球$\mathbb{B}_r(\mathbf{v})$自身也是一个开集，且所有这些开集构成$V$上的一个拓扑结构，即度量拓扑。故此，可将一个度量空间V看作一个拓扑空间，其中的任一个向量看作是拓扑空间V中的一个点。

（2）**Banach空间.** 系统认知一件事物T需拓广网络流为连续流模型G^L，其上的顶点、边的标号为向量，Banach空间是连续流模型的基础。那么，什么是Banach空间呢？欧阳博士告诉惠子，赋范空间$(V;\|\cdot\|)$上存在一个导出度量

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,\quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in V。\tag{10.7}$$

相应地，一个Banach空间是一个完备的赋范空间$(V;\|\cdot\|)$。这里，一个赋范空间是“完备的”，是指其中的任一个柯西点列按导出度量ρ是一个收敛点列。

那么，一个度量空间中的柯西点列是什么呢？欧阳博士解释说，度量空间$(V;\rho)$中的一个向量或点列$\{\mathbf{v}_n\}_1^\infty$，如果对任意小的一个正数$\varepsilon>0$均存在一个整数$N$，使得$n,m>N$时有$\rho(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_m)<\varepsilon$，则称$\{\mathbf{v}_n\}_1^\infty$为一个柯西点列，即随着序数的增加点间距离愈发靠近，或是去掉序列$\{\mathbf{v}_n\}_1^\infty$前有限个元后，余下的元中任两点间的距离不超过一个任意给定的正数，如图10.3所示。一般地，一个收敛的点列一定是柯西点列，但一个柯西点列$\{\mathbf{v}_n\}_1^\infty$并不一定是一个收敛点列。但是，如果该柯西点列存在一个收敛于$\mathbf{v}$的子点列$\{\mathbf{v}_{n_k}\}_1^\infty$，则$\{\mathbf{v}_n\}_1^\infty$也一定收敛于$\mathbf{v}$。欧阳博士解释说，这时，对任一个给定的正数$\varepsilon>0$，由定义存在整数$K$和$N$，使得当$k>K$和$n>N$时分别有：①当$k>K$时有$\rho(\mathbf{v}_{n_k},\mathbf{v})<\varepsilon/2$；②当$n,m>N$时有$\rho(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_m)<\varepsilon/2$。现在，取整数$k>K$且使得$n_k>N$，则在$n>N$时由三角不等式$(M_3)$式知

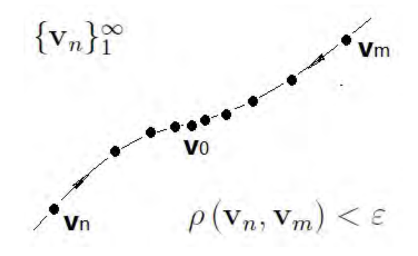


图10.3 柯西点列

$$\rho(\mathbf{v}_n,\mathbf{v})\leq(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n_k})+(\mathbf{v}_{n_k},\mathbf{v})<\varepsilon,$$

即柯西点列$\{\mathbf{v}_n\}_1^\infty$收敛于$\mathbf{v}$。

柯西点列刻画的是完备度量空间点的一种稠密性质。一般地，度量空间$(V;\rho)$上的度量ρ在其任一子集$U\subset V$上是一个度量，满足条件$(M_1)-(M_3)$，即$(U;\rho)$也是

一个度量空间，称为$(V;\rho)$的子空间。在这些度量子空间中，存在一种刻画点之间稠密的子空间，称为稠密子空间。那么，什么是稠密子空间呢？欧阳博士告诉惠子，假设$U\subset V$是$(V;\rho)$的一个子空间，如果任一点$\mathbf{u}_0\in V$的每个半径为$r>0$的开球$\{\mathbf{u}\in V|\rho(\mathbf{u},\mathbf{u}_0)<r\}$都含有$U$中的点，则称$U$是$V$的一个稠密子空间。注意，这当中的$r$可以任意地接近于0，进而刻画$U$中的点在$V$中的稠密程度。这样，在度量空间的构造上就有一个一般性的结论，即每一个度量空间都是另一个完备度量空间的稠密子空间或每一个度量空间都是另一个柯西点列都收敛的度量空间的稠密子空间。

Banach空间有两种常见类型，即对任一个整数$n\geq 1$，Banach空间中线性空间$(V;\mathscr{F})$的域$\mathscr{F}$为实数域$\mathbb{R}$和复数域$\mathbb{C}$的情形，称为实Banach空间$\mathbb{R}^n$和复Banach空间$\mathbb{C}^n$。特别是，当$n<\infty$时的有限维Banach空间$\mathbb{R}^n$和$\mathbb{C}^n$。

（3）**线性算子.** 线性算子是欧氏空间$\mathbb{R}^n$上线性变换$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$的推广。欧阳博士告诉惠子，设$V,U$为数域$\mathscr{F}$上两个赋范空间，$D\subset V$为$V$的一个线性子空间，$T:D\to U$是一个映射。如果对任意的$\mathbf{v},\mathbf{u}\in D$和$\alpha,\beta\in\mathscr{F}$均有

$$T(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{u}) \;=\; \alpha T(\mathbf{v})+\beta T(\mathbf{u}), \tag{10.8}$$

则T称为一个线性算子。这里，D称为T在V上的定义域，$R(T)=\{T(\mathbf{x})|\mathbf{x}\in D\}$称为$T$的值域。特别地，在(10.8)式中取$\beta=0$有$T(\alpha\mathbf{v})=\alpha T(\mathbf{v})$。这时，如果$\alpha=0$则有$T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$。一般地，当$U=\mathbb{R}$（或$\mathbb{C}$），即$T$的值为实数或复数时，称$T$为一个实（或复）线性泛函，其在点$\mathbf{v}$上的作用记为$\langle T,\mathbf{v}\rangle$。

Banach空间V和U上的所有线性算子$T:V\to U$构成的集合记为$L(V,U)$。同时，对任一个线性算子$T\in L(V,U)$，由

$$\|T\| \;=\; \sup_{\mathbf{v}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}}\frac{\|T(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|} \;=\; \sup_{\|\mathbf{v}\|=1}\|T(\mathbf{v})\|$$

定义一个函数$\|\cdot\|:L(V,U)\to\mathbb{R}$，其中$\sup A$表示集合$A$的上确界，则函数$\|\cdot\|$满足

1）非负性，因对任一$T\in L(V,U)$有

$$\|T\|=\sup_{\mathbf{v}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}}\frac{\|T(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|}\geq 0,$$

且如果$\|T\|=0$，则对任一$\mathbf{v}\in V$有$T(\mathbf{v})=0$，即$\mathbf{v}=\mathbf{0}$;

2）齐次性，因对任一$\alpha\in\mathscr{F}$和$T\in L(V,U)$，有$\|\alpha T\|=\|\sup\limits_{\|\mathbf{v}\|=1}\alpha T(\mathbf{v})\|=|\alpha|\|\sup\limits_{\|\mathbf{v}\|=1}T(\mathbf{v})\|=|\alpha|\|T\|$;

3）三角不等式，因对任意的$T_1,T_2,\in L(V,U)$，有

$$\|T_1+T_2\|=\sup_{\|\mathbf{v}\|=1}(T_1(\mathbf{v})+T_2(\mathbf{v}))\leq\sup_{\|\mathbf{v}\|=1}T_1(\mathbf{v})+\sup_{\|\mathbf{v}\|=1}T_2(\mathbf{v})=\|T_1\|+\|T_2\|,$$

即函数$\|\cdot\|$满足范数条件$(N_1)-(N_3)$。欧阳博士解释说，这样，$\|\cdot\|$是线性算子集$L(V,U)$上的一个范数，使得$(L(V,U);\|\cdot\|)$成为一个Banach空间。

对任一个线性算子$T:D\subset E\to U$和点$\mathbf{v}_0\in D$，如果对任一个点列$\{\mathbf{v}_n\}_1^\infty\subset D$，当$\mathbf{v}_n\to\mathbf{v}_0$时有$T(\mathbf{v}_n)\to T(\mathbf{v}_0)$，则称算子$T$在$\mathbf{v}_0$点是连续的，即

$$\lim_{n\to\infty}T(\mathbf{v}_n)=T\left(\lim_{n\to\infty}\mathbf{v}_n\right)。\tag{10.9}$$

注意，由线性算子的性质，$T(\mathbf{v}_n)-T(\mathbf{v}_0)=T(\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_0)$，条件$\mathbf{v}_n\to\mathbf{v}_0$可由$\mathbf{v}_n\to\mathbf{0}$取代。这样，一个线性算子$T$在$D$上的任一点$\mathbf{v}_0$连续当且仅当$T$在$\mathbf{0}$点连续。同时，如$T$在任一点$\mathbf{v}\in D$连续，由$T(\mathbf{v}_n-\mathbf{v}+\mathbf{v}_0)=T(\mathbf{v}_n)-T(\mathbf{v})+T(\mathbf{v}_0)\to T(\mathbf{v}_0)$，即推导出$T$在点$\mathbf{v}_0$亦连续。这样，有一个线性算子$T$在$D$上处处连续当且仅当$T$在$D$上的一点，如点$\mathbf{0}$处连续。

一个线性算子$T:D\to U$在D上连续与算子T在D上是否有界有关。那么，什么是一个线性算子T的有界呢？欧阳博士解释说，假设$(V;\|\cdot\|_1)$和$U;\|\cdot\|_2$为两个赋范空间，$T:D\subset V\to U$为一个线性算子。如果存在一个实数$C\in\mathbb{R}$使得对任一点$\mathbf{v}\in V$均有$\|T(\mathbf{v})\|_2\le C\|\mathbf{v}\|_1$，则称$T$是一个有界算子。注意，如果$T$是一个有界算子，$\{\mathbf{v}_n\}\subset D$是一个收敛于$\mathbf{v}$的点列，则由$T(\mathbf{v}_n)-T(\mathbf{v})=T(\mathbf{v}-\mathbf{v})\le C\|\mathbf{v}_n-\mathbf{v}\|$知$T$是$D$上的一个连续算子；反之，如果$T$是$D$上的一个连续算子但无界，则对任一整数$n\ge 1$，$D$中必存在一个非$\mathbf{0}$点$\mathbf{v}_n$使得$T(\mathbf{v}_n)\ge n\|\mathbf{v}_n\|$。这样，对任一整数$n\ge 1$，定义$\mathbf{u}_n=\mathbf{v}_n/(n\|\mathbf{v}_n\|)$得到一个点列$\{\mathbf{u}_n\}_1^\infty$，则$n\to\infty$时有$\|\mathbf{u}_n\|\to 0$，即$\mathbf{u}_n\to\mathbf{0}$，$T(\mathbf{u}_n)\to T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$。但由假设$T$是一个线性算子，故

$$\|T(\mathbf{u}_n)\|=\left\|T\left(\frac{\mathbf{v}_n}{n\|\mathbf{v_n}\|}\right)\right\|=\frac{T(\mathbf{v}_n)}{n\|\mathbf{v}_n\|}\ge\frac{n\|\mathbf{v}_n\|}{n\|\mathbf{v}_n\|}=1,$$

与$T(\mathbf{u}_n)\to\mathbf{0}$矛盾，即$T$在$D$上一定有界。这样，与一般的函数连续性不同，一个线性算子T在D上是连续的当且仅当T在D上有界。

一个Banach空间V,U上的线性映射$T:V\to U$称为开映射或闭映射，是指映射T把V中的开集（闭集）映射为U中的开集（闭集）。这样，如果T是一个连续算子且是一个满映射，则T一定是一个开映射；反之，如果T是一个闭算子，则T一定是一个连续算子。

假设V是一个实赋范空间，函数$p:V\to\mathbb{R}$如果满足：①对任一$\mathbf{v}\in V,0<\alpha\in\mathbb{R}$有$p(\alpha\mathbf{v})=\alpha p(\mathbf{v})$；②对任两个向量$\mathbf{v},\mathbf{u}\in V$有$p(\mathbf{v}+\mathbf{u})\le p(\mathbf{v})+p(\mathbf{u})$，则称$p$为$V$上的一个次线性泛函。这时，在$V$的任一个子空间$W\subset V$上，如果存在一个次线性泛函$p$和一个实线性泛函$f:W\to\mathbb{R}$使得对任一$\mathbf{w}\in W$有$f(\mathbf{w})\le p(\mathbf{w})$，则实线性

泛函f可由子空间W延拓为V上的一个实线性泛函$\widetilde{f}$且对任一向量$\mathbf{v}\in W$有$\widetilde{f}(\mathbf{v})=f(\mathbf{v})$。同时，对任一向量$\mathbf{v}\in V$仍有$\widetilde{f}(\mathbf{v})\leq p(\mathbf{v})$，称为Hahn-Banach泛函延拓定理。

1.3.Hilbert空间. Hilbert空间是量子力学中对应于量子态的一种空间模型，是一种完备的内积空间。一般地，设$\mathcal{H}$是复数域$\mathbb{C}$上的一个复线性空间，如果存在一个映射$\langle\cdot,\cdot\rangle:(\mathbf{v},\mathbf{u})\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 满足以下条件：

（H_1）（非负性）对任一$\mathbf{v}\in\mathcal{H}$有$\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle\geq 0$且$\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=0$当且仅当$\mathbf{v}=\mathbf{0}$;

（H_2）（共轭性）对任意的$\mathbf{v},\mathbf{u}\in\mathcal{H}$有$\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle=\overline{\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}$。这里，$\overline{a+ib}=a-ib$，为复数$a+ib\in\mathbb{C},a,b\in\mathbb{R}$的共轭复数；

（H_3）（线性）对任意的$\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w}\in\mathcal{H}$和$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$有

$$\langle\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle=\alpha\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle+\beta\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle。$$

则称映射$\langle\cdot,\cdot\rangle$为$\mathcal{H}$上的一个内积，$\mathcal{H}$为一个内积空间。这时，如定义$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle}$则$\mathcal{H}$即是一个赋范空间。更进一步，如果由内积导出范数$\|\cdot\|$在$\mathcal{H}$上是完备的，则称$\mathcal{H}$为一个Hilbert空间。

那么，为什么量子力学中将Hilbert空间作为量子态的一种空间模型呢？欧阳博士告诉惠子，量子力学中，把向量分为右矢$|\psi\rangle$和左矢$\langle\varphi|$。这样，右矢$|\psi\rangle$和左矢$\langle\varphi|$的内积为$\langle|\psi\rangle,\langle\varphi|\rangle$简记为$\langle\psi|\varphi\rangle$，即有$\langle\psi|\psi\rangle\geq 0$，外积$|\psi\rangle\times\langle\varphi|$简记为$|\psi\rangle\langle\varphi|$，仍为一个向量。这时，如果$A$是一个算子，在符号表示上，$A$总是从左边作用于右矢$A|\psi\rangle$，从右边作用于左氏$\langle\varphi|A$。这样，$\langle\psi|A|\varphi\rangle$可以看作是一个左矢$\langle\psi|A$与右矢$|\varphi\rangle$的内积，也可以看作是一个右矢$A|\varphi\rangle$与左矢$\langle\psi|$的内积，结果均为$\langle\psi|A|\varphi\rangle$，这样的算子$A$称为Hermitian算子。注意，Hermitian算子的特征值均为实数，可以测量。



图10.4 量子态重叠

量子态处在重叠中，如图10.4所示。同时，左矢、右矢对应的线性组合关系为

$$\begin{aligned}\langle\psi|(c_1|\varphi_1\rangle+c_2|\varphi_2\rangle)\rangle &= c_1\langle\psi|\varphi_1\rangle+c_2\langle\psi|\varphi_2\rangle,\\ \langle(c_1|\psi_1\rangle+c_2|\psi_2\rangle)|\varphi\rangle &= c_1\langle\psi_1|\varphi\rangle+c_2\langle\psi_2|\varphi\rangle。\end{aligned}$$

欧阳博士解释说，量子力学中，波函数是量子系统的态$|\psi\rangle$在坐标系或基矢下

的一种表示，但怎样对波函数的物理内涵进行解释并没有达成共识。对此，著名的哥本哈根解释对量子给出了如下三个假设：

假设1. 量子纯态对应于Hilbert空间$\mathcal{H}$中的归一化向量$|\psi\rangle$，即$\langle\psi|\psi\rangle = 1$。一般地，假设$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle, \cdots$是某一量子系的可能态，则它们的线性叠加$c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle + \cdots + c_n|\psi_n\rangle + \cdots$也视为该量子系的一个可能态。这里，$c_i, i \geq 1$为复常数。

假设2. 对量子的任一个可观测物理量a，如位置、动量、能量和自旋等，$\mathcal{H}$上存在一个Hermitian算子A，且在量子态$|\psi\rangle$下测量物理量a时得到的是算子A的某一个特征值λ_j。这时，a的态$|\psi\rangle$瞬时坍缩为对应的特征向量或本征态$|\lambda_j\rangle$，即$A|\lambda_j\rangle = \lambda_j|\lambda_J\rangle$。一般地，在态$|\psi\rangle$下多次测量$a$可以得到特征向量$|\lambda_j\rangle$的概率$p_j = |\langle\lambda_j|\psi\rangle|^2$。

假设3. 量子态$|\psi\rangle$随时间参数的变化遵从薛定谔方程

$$i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle,$$

其中，$\hbar$为普朗克常数，H是对应于系统能量的Hermitian算子。

这时，量子态按假设1和2构成一个线性空间，波函数$\psi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})$间的内积为

$$\langle\psi, \varphi\rangle = \int_\Omega \overline{\psi(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

且由波函数$\psi(\mathbf{x})$的概率归一化条件，有

$$\langle\psi, \psi\rangle = \int_\Omega \overline{\psi(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_\Omega |\psi(\mathbf{x})|^2 = 1。$$

那么，为什么这个内积空间还是完备的呢？欧阳博士解释说，因为量子态的任意组合仍是一个量子态，要求对应的空间模型是完备的，即为Hilbert空间。特别地，一个物理量a上一组完全正交的本征态$\{|\lambda_i\rangle; i \geq 1\}$满足$\langle\lambda_i|\lambda_i\rangle = 1$和$|\lambda_i\rangle \perp |\lambda_j\rangle, 1 \leq i \neq j < \infty$相当于Hibert空间中的法坐标系。这样，物理量$a$的量子态$|\psi\rangle$可按这组本征态展开为$|\psi\rangle = \sum\limits_{i\geq 1} c_i|\lambda_i\rangle = \sum\limits_{i\geq 1}\langle\psi|\lambda_i\rangle|\lambda_i\rangle$，则

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \sum_{j,i} c_j^* c_i\langle\lambda_j|A|\lambda_i\rangle = \sum_{j,i} c_j^* c_i\lambda_i\delta_{ji} = \sum_i \lambda_i|c_i|^2 \tag{10.10}$$

即为对物理量a观测的期望值。这里，$|c_i|^2 = |\langle\lambda_i|\psi\rangle|^2$为观测值为$\lambda_i$时的概率，$c^*$为$c$的共轭复数，$\delta_{ij}$为Kronecker函数，即$i = j$时$\delta_{ij} = 1$，否则为0。这当中还有一个问题需要回答，即这样的Hermitian算子A在Hilbert空间$\mathcal{H}$上是否一定存在呢？答案是肯定的，即设$A : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$为Hilbert空间$\mathcal{H}$上一个连续的线性泛函，则存在一个向量$\mathbf{v} \in \mathcal{H}$使得对任一$\mathbf{u} \in \mathcal{H}$有$A(\mathbf{u}) = \langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle$，这即是Riesz和Fréchet的表示定理，换成量子力学中的术语，即满足(10.10)式中的的Hermitian算子A一定存在。

第2节 流元模型

对一件事物T的系统认知是对系统基元及其相互作用行为的认知，需要在系统基元内蕴的组合结构G^L上认知事物T的状态。这在一定程度上蕴意着需要在“万物是组合的”思想引领下刻画群体事物行为，在事物T内蕴的1-维拓扑结构G^L上构建一种全新的数学科学，以实现对事物的系统认知。

惠子问欧阳博士：“在事物的内蕴组合结构G^L上构建数学科学不就是网络算术吗？”当然不是！欧阳博士解释说，网络流的边流量一般是一个实数，即便是一个动态网络流，其边流量也是一个实数域上的函数。既然事物属性是多样化的，就不可能用单一的量化指标，即实数或实函数系统认知事物，这一点在对微观粒子的认知中表现得尤其突出。欧阳博士问惠子：“我们是否可以对粒子的微观行为进行精准测量？”惠子回答说：“微观粒子遵从测不准原理，不能同时准确测量出粒子的位置和动量。只能对单一特征值测量，得到量子态在Hermitian算子A作用下的本征值$\langle\psi|A|\psi\rangle$。”欧阳博士又问：“量子态是一个实数还是一个向量？”惠子笑了笑说：“当然是向量，是Hilbert空间中的向量！”欧阳博士点了点头说：“正确！这样一来，网络流能否作为一群微观粒子的模型，刻画粒子行为呢？”惠子顿时明白了欧阳博士的话意，回答说：“是的！这样看来，网络流的确不能用作刻画一群微观粒子行为的模型。”欧阳博士进一步解释说，物质构成理论表明，自然界中的任何一种物质都由微观粒子组成。微观粒子属性的多样性表明，网络流不能直接作为模拟事物行为的模型，需要拓广；其次，网络流G^L中的图结构G是一成不变的，而生物细胞则不然，始终处在“新陈代谢”之中。即便以人体为例，研究表明每秒即有大约380万个细胞新生或死亡；第三，按牛顿力学中的第三定律，即作用力与反作用力大小相等但方向相反，是否据此可以得出基元v作用于基元u的量与基元u自我消纳后反作用于v的量一致呢？当然不能这么简单地划等号，因为牛顿力学仅是刚体上作用与反作用情形，不适用于群体，特别是生命个体间的作用与反作用。

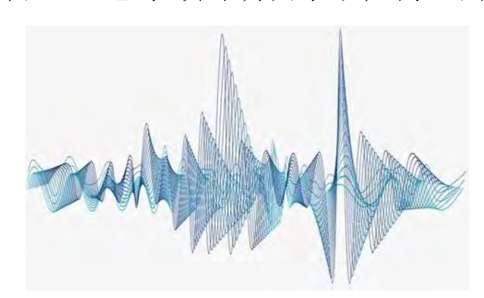


图10.5 粒子波动图

这样，系统基元及其相互作用行为，即在其内蕴组合结构G^L上应当用向量对顶点$v\in V(G)$、边$(v,u)\in E(G)$进行标定，刻画系统基元及其相互作用的多样性。那么，怎样刻画系统内蕴结构变化，即基元的增加、减少或作用的变化呢？欧阳博士告诉惠子，刻画群体增长或规模缩小一种最朴素的办法是应用集合的“并”和“差”

运算，即对任意两个集合X,Y施行$X\cup Y$与$X\backslash Y$、$Y\backslash X$运算。在集合的并与差运算基础上，两个图G,G'的“并”$G\bigcup G'$和“差”$G\backslash G'$定义如下：

$$
\begin{aligned}
V(G\bigcup G') &= V(G)\bigcup V(G'), \quad E(G\bigcup G') = E(G)\bigcup E(G'),\\
V(G\setminus G') &= V(G)\setminus V(G'), \quad E(G\setminus G') = E(G)\setminus E(G'),
\end{aligned}
$$

即图的并运算$G\bigcup G'$将图G,G'的顶点、边合在一起构成一个“大图”，图的差运算$G\backslash G'$则是在图G中去掉与图G'重合的顶点、边形成一个“小图”，如图10.6所示。

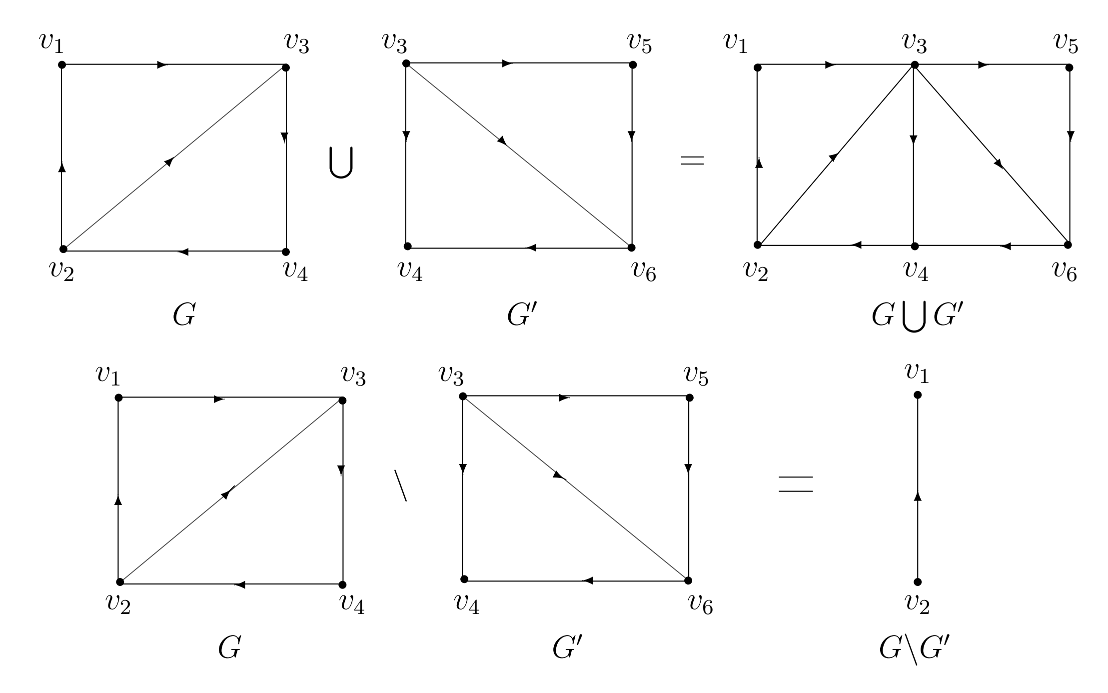


图10.6 图的并与差运算

这样一来，可以取一个图族或图序列$\{G_n\}_1^{\infty}$，讨论其在并和差运算下生成的图空间$\langle G_n; n\geq 1\rangle$，进而模拟系统基元的变化与状态。此外，系统基元的变化还可以用标号图G^L中边上的标号刻画。一个标号图G^L中那些$L(v,u)=\mathbf{0}$的边$(v,u)\in E(G)$，以及那些与其关联边上的流量$L(v,u)=\mathbf{0}, u\in N_G(v)$的顶点$v$ 在标号图G^L的变化中并不起作用，可以约定$G^L=G^L\backslash\{(v,u)\in E(G)|L(v,u)=\{\mathbf{0}\}\}$和$G^L=G^L\backslash\{v\in V(G)|L(v,u)=\mathbf{0}, u\in N_G(v)\}$。这样，可以事先取一个阶数$n$充分大的完全图$K_n$模拟系统状态，由边上的流量变化模拟系统基元及其相互作用状态和变化。

那么，应当怎样衡量基元v对基元u的作用在基元u上产生的作用效果呢？欧阳博士告诉惠子，基元v对基元u的作用存在一个当量换算，即v对u的作用 $L(v,u)$ 对u产生的效果是多少的问题，如图10.7所示。注意，这时不一定遵从牛顿力学中的第三定律，但在网络流模

$L(v,u)$

v u

图10.7 基元作用当量

型G^L上，是假设基元v流入基元u的流量$L(v,u)$即为在基元u上的作用效果，但自然界中的大多情形并非如此。例如，不同形式的能量转化、不同材料燃烧释放出的碳当量等。这在数学上，等价于在向量$L(v,u)$上存在一个算子T，即v对u的作用效果为$T: L(v,u) \to L^T(v,u)$。欧阳博士告诉惠子，这些问题思考清楚，就可以构建系统认知事物T的一般模型，并可将其作为一种数学元模拟事物T的动态行为。

2.1.流元模型. 一个事物T的发展与变化是内因和外因的辩证统一。这当中，内因是基础，是根据；外因是条件，是诱因，外因经由内因推动事物的发展与变化。这样，对事物T的系统认知可以抽象为事物基元及相互间作用的输入与输出，进而用向量刻画这种输入输出状态。注意，欧阳博士解释说，网络流是宏观世界中物质流动在网络上的模拟，也是在刻画这种输入输出状态，但网络流G^L上的顶点$v \in V(G)$，边$(v,u) \in E(G)$上的标号$L(v)$，$L(v,u) \in \mathbb{R}$均为实数，限制了它的模拟范围。那么，怎样抽象地模拟微观世界中的物质流动呢？欧阳博士告诉惠子，假设对物质流动由处在微观世界中的一个微观人观测，可以类似于网络流，但需要把网络流G^L上映射$L: V(G) \cup E(G) \to \mathbb{R}$的值域$\mathbb{R}$替换为一个Banach空间$(V; \|\cdot\|)$，并用$V$中的向量对图$G$ 中的顶点$v \in V(G)$和边$(v,u) \in E(G)$标号，仍满足节点上的输入输出守恒关系，这样的标号图G^L可作为系统认知事物的抽象模型，称为连续流或流元。

一般地，采用数学术语，一个连续流是一个拓扑图G上的标号图G^L，其顶点、边用一个数域$\mathscr{F}$上Banach空间$\mathscr{B}$中的元进行标号，即对图G中的任一顶点$v \in V(G)$，任一边$(v,u) \in E(G)$，标号映射$L: v \to L(v) \in \mathscr{B}$, $(v,u) \to L(v,u) \in \mathscr{B}$, 2个边端算子$A^+_{vu}, A^+_{uv} \in L(\mathscr{B},\mathscr{B})$作用于边$(v,u)$上的流量$L(v,u)$，如图10.8所示，分别为$A^+_{vu}: L(v,u) \to L^{A^+_{vu}}(v,u)$和$A^+_{uv}: L(u,v) \to L^{A^+_{uv}}(u,v)$且满足

$$L(v,u) = -L(u,v), \quad A^+_{vu}(-L(v,u)) = -L^{A^+_{vu}}(v,u)。$$

图10.8 作用量及边端算子

同时，在图G的任一顶点$v \in V(G)$上遵从连续方程

$$\sum_{u \in N^-_G(v)} L^{A^+_{uv}}(u,v) - \sum_{u \in N^+_G(v)} L^{A^+_{uv}}(u,v) = L(v)。 \tag{10.11}$$

这里，$N^-_G(v), N^+_G(v)$分别为顶点$v \in V(G)$的入、出邻域，即流入顶点v的邻点$N^-_G(v) \subset N_G(v)$、流出顶点v的邻点$N^+_G(v) \subset N_G(v)$且有$N^-_G(v) \cup N^+_G(v) = N_G(v)$。

注意，方程(10.11)是一个向量方程，算子$A^{+}_{vu},(v,u)\in E(G)$是Banach空间$\mathscr{B}$上的线性算子，包括常见的微分算子和积分算子。这样一来，连续流中的节点守恒方程涵盖一般的代数方程、微分方程、积分方程和算子方程。

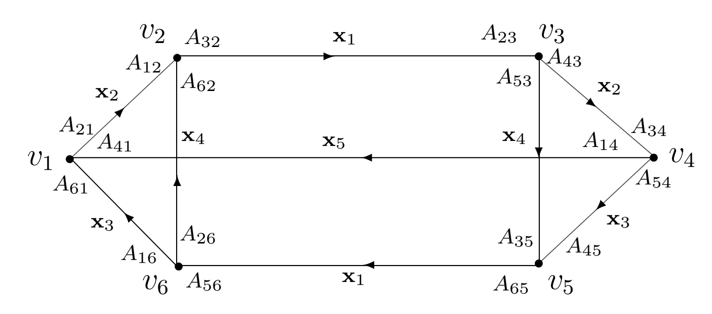


图10.9 连续流例子

例如，图10.9中给出的连续流G^L的节点对应的守恒方程为

$$\begin{cases} (v_1):\ A_{41}(\mathbf{x}_5)+A_{61}(\mathbf{x}_3)-A_{21}(\mathbf{x}_2)=L(v_1),\\ (v_2):\ A_{12}(\mathbf{x}_2)+A_{62}(\mathbf{x}_4)-A_{32}(\mathbf{x}_1)=L(v_2),\\ (v_3):\ A_{23}(\mathbf{x}_1)-A_{43}(\mathbf{x}_2)-A_{53}(\mathbf{x}_4)=L(v_3),\\ (v_4):\ A_{34}(\mathbf{x}_2)-A_{14}(\mathbf{x}_5)-A_{54}(\mathbf{x}_3)=L(v_4),\\ (v_5):\ A_{35}(\mathbf{x}_4)+A_{45}(\mathbf{x}_3)-A_{65}(\mathbf{x}_1)=L(v_5),\\ (v_6):\ A_{56}(\mathbf{x}_1)-A_{16}(\mathbf{x}_3)-A_{26}(\mathbf{x}_4)=L(v_6)。\end{cases} \tag{10.12}$$

特别地，假设

$$L(v_1)=L(v_2)=L(v_3)=L(v_4)=L(v_5)=L(v_6)=\mathbf{0},$$

$$A_{21}=A_{32}=A_{43}=A_{53}=A_{14}=A_{54}=A_{65}=A_{16}=A_{26}=1_{\mathscr{B}},$$

$$A_{41}=A_{61}=A_{12}=A_{62}=A_{56}=\frac{d}{dt},$$

$$A_{23}=A_{34}=A_{35}=A_{45}=A_{56}=t\frac{d}{dt},$$

则算子方程(10.12)对应的是一个微分方程组

$$\begin{cases} t\dfrac{d\mathbf{x}_1}{dt}=\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_4, & \dfrac{d\mathbf{x}_2}{dt}+\dfrac{d\mathbf{x}_4}{dt}=\mathbf{x}_1,\\ t\dfrac{d\mathbf{x}_2}{dt}=\mathbf{x}_5+\mathbf{x}_3, & t\dfrac{d\mathbf{x}_4}{dt}+t\dfrac{d\mathbf{x}_3}{dt}=\mathbf{x}_1,\\ t\dfrac{d\mathbf{x}_1}{dt}=\mathbf{x}_3+\mathbf{x}_4, & \dfrac{d\mathbf{x}_5}{dt}+\dfrac{d\mathbf{x}_3}{dt}=\mathbf{x}_2。\end{cases}$$

类似地，对算子方程(10.12)中的$A_{ij},1\leq i,j\leq 6$取不同类型的算子，如偏微分算子、积分算子、差分算子，节点守恒方程(10.12)可对应不同类型的算子方程，如偏微分方程、积分方程和差分方程等。

反之，对任一个算子方程，可按其包含的方程m数将每个方程拆分为m项，即

$$
① \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{F}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \\ \mathscr{F}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ \mathscr{F}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{0}。 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad ② \left\{ \begin{array}{l} A_{11}(\mathbf{x}_1) + A_{21}(\mathbf{x}_2) + \cdots + A_{m1}(\mathbf{x}_m) = \mathbf{0}, \\ A_{12}(\mathbf{x}_1) + A_{22}(\mathbf{x}_2) + \cdots + A_{m2}(\mathbf{x}_m) = \mathbf{0}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ A_{1m}(\mathbf{x}_1) + A_{2m}(\mathbf{x}_2) + \cdots + A_{mm}(\mathbf{x}_m) = \mathbf{0}。 \end{array} \right.
$$

这当中，如果①中某一个方程$\mathscr{F}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$中不含变量$\mathbf{x}_k, 1 \leq k \leq m$，则在②中拆分时取$\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$，即仍在②中拆分成$m$项。这样一来，可以构造一个$m$阶完全图上的连续流$K_m^L$如下：

$$
V(K_m) = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}, \quad E(K_m) = \{(v_i, v_j) | 1 \leq i, j \leq m\}。
$$

同时，对任意整数$1 \leq i, j \leq m$，标号映射

$$
L : v_i \to -A_{ii}(\mathbf{x}_i), \quad L : (v_i, v_j) \to \mathbf{x}_j
$$

且边(v_i, v_j)上的边端算子$A^+_{v_iv_j} = A_{ij}, A^+_{v_jv_i} = A_{ji}, 1 \leq i, j \leq m$。这样，得到算子方程②对应的完全图$K_m$上的连续流$K_m^L$。

注意，连续流中含有许多有趣的特例，有的已被深入研究，有的则还没有引起人们的足够兴趣。例如，当所有边端算子均为$\mathbf{1}_{\mathscr{V}}$时，对任一点$v \in V(G)$ 取$L(v) = \dot{x}_v$，对应的连续流即为复杂网络；对任一点$v \in V(G)$取$L(v) = \mathbf{v}$为一个常向量时，对应的连续流称为G-流。更进一步，在G- 流中取Banach空间$\mathscr{B} = \mathbb{R}$，则相应的G-流就是通常的网络流。

对事物发展变化的刻画，中国古哲学有着很好的总结和提炼，认为任何一件事物都有阴阳两个方面或两种力量在相辅相成、共同推动着事物发展，是事物本性及其运动的基本法则，这也正是太极图中的哲学寓意，见图10.10。对此，孔子在《易经.系辞上》中写到:“一阴一阳之谓道，继之者善也，成之者性也”，即一阴一阳是事物产生与发展的“生生之道”或规律，继承阴阳之道是人的一种善举，发扬阴阳之道是人的天性。这样一来，按中国古哲学观，连续流模型G^L中顶点、边上的标号应同时包括正、反两个方面的向量$\mathbf{v}, \mathbf{u}$且满足$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{c}$，一个恒定的常向量以实现太极图蕴意中的阴阳调和、此消彼长，这与薛定谔猫的生与死情形类似，即人只能观测到向量$\mathbf{v}$和$\mathbf{u}$中的一个向量。这样一来，



图10.10 相生相克

单纯用$\mathbf{v}$或$\mathbf{u}$中的任一个向量标定图G都不能全面反映出正反两个方面的作用，类似于一个人在海面上观看漂浮的冰山，只能看见其露出水面的那一部分，如图10.11所示。同样，如用$\mathbf{v}+\mathbf{u}$标定图G，则因$\mathbf{v}+\mathbf{u}=\mathbf{c}$是个恒定向量，无法反映出基元状态及相互间作用的变化。那么，在这种情形下，又应怎样将中国古哲学中的阴阳观融入事物的连续流模型呢？欧阳博士解释说，这时，需要用到一种特殊的复向量标定图G^L，称为平衡流。这里，复向量是指形如$\mathbf{x}+i\mathbf{y}\in\mathscr{B}\times\mathscr{B}$，$\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathscr{B}$的向量，其中的$i$为单位虚数，即$i^2=-1$。

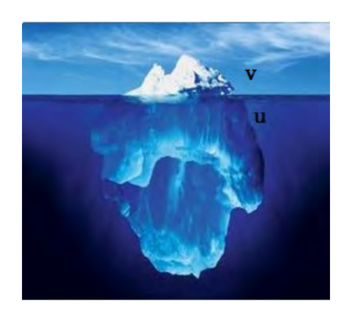


图10.11 冰山一角

一般地，一个平衡流G^{L^2}是一个空间中的拓扑图G，并在其顶点、边上用一个数域$\mathscr{F}$上Banach空间$\mathscr{B}\times\mathscr{B}$中的向量进行标号，即对任一顶点$v\in V(G)$和边$(v,u)\in V(G)$，标号映射$L^2: v\rightarrow L(v)+iL'(v)$，$L^2:(v,u)\rightarrow L(v,u)+iL'(v,u)$，满足$L(v)+L'(v)=\mathbf{c}_v\in\mathscr{B}$，$L(v,u)+L'(v,u)=\mathbf{c}_{vu}\in\mathscr{B}$，如图10.12所示。

$$L^2(v) \xrightarrow{A^+_{uv}\quad L(v,u)+iL'(v,u)\quad A^+_{vu}} L^2(u)$$

图10.12 复向量及边端算子

这时，2个边端算子$A^+_{vu}: L(v,u)+iL'(v,u)\rightarrow L^{A^+_{vu}}(v,u)+iL'^{A^+_{vu}}(v,u)$，$A^+_{uv}: L(v,u)+iL'(v,u)\rightarrow L^{A^+_{uv}}(u,v)+iL'^{A^+_{uv}}(u,v)$满足条件$L(v,u)=-L(u,v), L'(v,u)=-L'(u,v)$和$A^+_{vu}(-L(v,u))=-L^{A^+_{vu}}(v,u), A^+_{vu}(-L'(v,u))=-L'^{A^+_{vu}}(v,u)$。同时，在图$G$的任一个顶点$v\in V(G)$上遵从连续方程

$$\sum_{u\in N^-_G(v)}\left(L^2(u,v)\right)^{A^+_{uv}}-\sum_{u\in N^+_G(v)}\left(L^2(u,v)\right)^{A^+_{uv}}=L^2(v)。\tag{10.12}$$

注意，由于对任一边$(u,v)\in E(G)$均有$L(u,v)+L'(u,v)=\mathbf{c}_{uv}$，故将$L'(u,v)=\mathbf{c}_{uv}-L(u,v)$代入(10.12)式即有

$$\begin{aligned}L^2(v) &= \sum_{u\in N^-_G(v)}\left(L^2(u,v)\right)^{A^+_{uv}}-\sum_{u\in N^+_G(v)}\left(L^2(u,v)\right)^{A^+_{uv}}\\ &= \sum_{u\in N^-_G(v)}L^{A^+_{uv}}(u,v)-\sum_{u\in N^+_G(v)}L^{A^+_{uv}}(u,v)+i\sum_{u\in N^-_G(v)}\mathbf{c}_{uv}\\ &\quad -i\sum_{u\in N^-_G(v)}L^{A^+_{uv}}(u,v)-i\sum_{u\in N^+_G(v)}\mathbf{c}_{uv}+i\sum_{u\in N^+_G(v)}L^{A^+_{uv}}(u,v)\end{aligned}$$

$$= (1-i)\left(\sum_{u\in N_G^-(v)} L^{A_{uv}^+}(u,v) - \sum_{u\in N_G^-(v)} L^{A_{uv}^+}(u,v)\right)$$
$$+i\left(\sum_{u\in N_G^-(v)} \mathbf{c}_{uv}^{A_{uv}^+} - \sum_{u\in N_G^+(v)} \mathbf{c}_{uv}^{A_{uv}^+}\right)$$

这样，对G上的任一顶点$v\in V(G)$和边$(u,v)\in E(G)$，定义

$$\widehat{L}: \quad v \quad \to \quad L^2(v) - i\left(\sum_{u\in N_G^-(v)} \mathbf{c}_{uv}^{A_{uv}^+} - \sum_{u\in N_G^+(v)} \mathbf{c}_{uv}^{A_{uv}^+}\right),$$
$$\widehat{L}: (u,v) \quad \to \quad (1-i)L^2(u,v)$$

则有

$$\sum_{u\in N_G^-(v)} \widehat{L}^{A_{uv}^+}(u,v) - \sum_{u\in N_G^+(v)} \widehat{L}^{A_{uv}^+}(u,v) = \widehat{L}(v),$$

即平衡流G^{L^2}在标号映射$\widehat{L}$下转化为一个连续流$G^{\widehat{L}}$，表明结合中国古哲学阴阳观定义的平衡流G^{L^2}是连续流的一种特殊情形$G^{\widehat{L}}$；另一方面，对任一顶点$v\in V(G)$和边$(v,u)\in E(G)$，在平衡流G^{L^2}中取$L'(v)=\mathbf{0}$，$L'(v,u)=\mathbf{0}$，则平衡流G^{L^2}退化为一个连续流G^L。故此，连续流G^L与平衡流G^{L^2}仅是形式上的不同，二者实质是等价的。虽然如此，由平衡流中的实部和虚部在一定程度上可以反映出一个生命体的生死状况，更符合中国文化，即如果实部为$\mathbf{0}$，则该生命体的“生”在人的认知中不复在，处在死亡状态。类似地，可用一个复向量$A+iB, A, B\in\mathbb{R}$表示薛定谔猫的生死态，即当$A\neq\mathbf{0}$时猫是活的；反之，$A=\mathbf{0}$时则表明猫已死亡。

2.2.流元代数式. 网络流上的加法“$+$”和乘法“$\cdot$”运算(9.9)是在同一个图G上进行的，仅需计算相同边上对应标号的相加或相乘即可。连续流$G^L, G'^{L'}$则不同，是在两个可能不同的图G, G'上进行标号运算。这时，假设$G^L, G'^{L'}$是域为$\mathscr{F}$的Banach空间$\mathscr{B}$上的连续流, $\lambda\in\mathscr{F}$，定义向量加法、乘法和数乘运算为

$$G^L + G'^{L'} = (G\setminus G')^L \bigcup \left(G\bigcap G'\right)^{L+L'} \bigcup (G'\setminus G)^{L'}, \tag{10.13}$$
$$G^L \cdot G'^{L'} = (G\setminus G')^L \bigcup \left(G\bigcap G'\right)^{L\cdot L'} \bigcup (G'\setminus G)^{L'}, \tag{10.14}$$
$$\lambda \cdot G^L = G^{\lambda\cdot L}。 \tag{10.15}$$

这里, 对任一顶点$v\in V(G)$和边$(v,u)\in EG)$有$L(v), L'(v), L(v,u), L'(v,u)\in\mathscr{B}$，$L+L': v\to L(v)+L'(v),\ (v,u)\to L(v,u)+L'(v,u)$，$L\cdot L': v\to L(v)\cdot L'(v),\ (v,u)\to$

$L(v,u)\cdot L'(v,u)$，$\lambda\cdot L: v\to\lambda\cdot L(v),\ (v,u)\to\lambda\cdot L(v,u)$。这当中，$L(v)\cdot L'(v)$和$L(v,u)\cdot L'(v,u)$表示Banach空间$\mathscr{B}$上的Hadamard积。例如，向量

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,,\quad \mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\,,$$

则$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$的Hadamard积为

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\ =\ (x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_ny_n)。\tag{10.16}$$

对应地，边端算子分别替换为A_{vu}^{++}，$A_{vu}^{+\otimes}$和$A_{vu}^{+\cdot}$，作用于边$(v,u)\in E(G)$ 上向量的结果分别为

$$\begin{aligned}A_{vu}^{++}\ &:\ L(v,u)+L'(v,u)\to L^{A_{vu}^{+}}(v,u)+L'^{A'^{+}_{vu}}(v,u),\\ A_{vu}^{+\cdot}\ &:\ L(v,u)\cdot L'(v,u)\to L^{A_{vu}^{+}}(v,u)\cdot L'^{A'^{+}_{vu}}(v,u).\end{aligned}$$

注意，将$\lambda\in\mathscr{F}$视为$\mathscr{B}$中分量均为λ的向量$(\lambda,\lambda,\cdots,\lambda)$，则数乘$\lambda\cdot L$可以看作是向量Hadamard积的一种特殊情形。这时，对任一顶点$v\in V(G)$，由定义知数乘运算后v上的向量为$\lambda\cdot L(v)$；加法运算后v上的向量为

$$(L+L')(v)=\begin{cases}L(v), & v\in V(G)\setminus V(G'),\\ L(v)+L'(v), & v\in V(G)\bigcap V(G'),\\ L'(v), & v\in V(G')\setminus V(G)\end{cases}$$

和Hadamard积运算后v上的向量为

$$(L\cdot L')(v)=\begin{cases}L(v), & v\in V(G)\setminus V(G'),\\ \sum\limits_{u\in N_G(v)}L^{A_{vu}^{+}}(v,u)\cdot L'^{A'^{+}_{vu}}(v,u)), & v\in V(G)\bigcap V(G'),\\ L'(v), & v\in V(G')\setminus V(G)。\end{cases}$$

特别地，如果$G'=G$，则对任一顶点$v\in V(G)$有

$$(L+L')(v)=L(v)+L'(v),\quad (L\cdot L')(v)=\sum_{u\in N_G(v)}L^{A_{vu}^{+}}(v,u)\cdot L'^{A'^{+}_{vu}}(v,u))。$$

这样，类似于网络流的代数表示，连续流上的代数表示式如下：

①常流元. 常流元$G^{L_{\mathbf{C}}}$指对任一边$(v,u)\in E(G)$，标号映射$L_{\mathbf{C}}:(v,u)\to\mathbf{c}_{vu}$为一个常向量。特别地，对任一边$(v,u)\in E(G)$，$\mathbf{c}_{vu}=\mathbf{c}$为同一个常向量时记为$\mathbf{c}=G^{L_{\mathbf{c}}}$。这时，与网络流类似，有$\mathbf{O}=G^{L_{\mathbf{0}}}$为+运算的单位元，$\mathbf{I}=G^{L_{\mathbf{1}_{\mathscr{F}}}}$为Hadamard积的单位元，即

$$\mathbf{O}+G^L=G^L+\mathbf{O}=G^L,\quad \mathbf{I}\cdot G^L=G^L\cdot\mathbf{I}=G^L_{\circ}\tag{10.17}$$

这里，单位元**O**和**I**上的顶点、边标号均为零向量**0**或单位向量**1**。对应地，网络流上的单位元**O**和**I**是连续流单位元的特殊情形。

②逆元. 对Banach空间$\mathscr{B}$上的一个连续流G^L，如果$X+G^L=\mathbf{O}$则称X为G^L在加法运算下的逆元，记为$X=-G^L$。类似地，对任一非零点-边连续流G^L，即对任一顶点$v\in V(G)$和边$(v,u)\in E(G)$有$L(v)\neq\mathbf{0}, L(v,u)\neq\mathbf{0}$，存在一个连续流$Y$使得$Y\cdot G^L=\mathbf{I}$ 则称Y为G^L在Hadamard积下的逆元，记为$Y=1/G^L$。由连续流运算的定义(10.13) − (10.15)，易知

$$X=-G^L=G^{-L},\quad Y=\frac{1}{G^L}=G^{\frac{1}{L}}=G^{L^{-1}},$$

即一个连续流G^L在加法和Hadamard积中的逆元分别为

$$-G^L\ =\ G^{-L},\quad \frac{1}{G^L}\ =\ G^{\frac{1}{L}}. \tag{10.18}$$

③代数表示. 对任一整数$n\geq 1$，设$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$G_1^{L_1},G_2^{L_2},\cdots,G_n^{L_n}$分别为域$\mathscr{F}$ 中的n个元和Banach空间$\mathscr{B}$上的n个连续流，定义

$$\begin{aligned}a_1G_1^{L_1}+a_2G_2^{L_2}+\cdots+a_nG_n^{L_n} &= \left(\bigcup_{i=1}^{n}G_i\right)^{a_1L_1+a_2L_2+\cdots+a_nL_n},\\ \left(a_1G_1^{L_1}\right)\cdot\left(a_2G_2^{L_2}\right)\cdots\left(a_nG_n^{L_n}\right) &= \left(\bigcup_{i=1}^{n}G_i\right)^{(a_1L_1)\cdot(a_2L_2)\cdots(a_nL_n)}。\end{aligned}$$

④多项式. 对任一整数$n\geq 1$，$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathscr{F}$和连续流$G^L$，多项式

$$\begin{aligned}a_0+a_1G^L+a_2G^{L^2}+\cdots+a_nG^{L^n} &= G^{a_0+a_1\cdot L+a_2\cdot L^2+\cdots+a_n\cdot L^n},\\ a_0\ \cdot\left(a_1G^L\right)\cdot\left(a_2G^{L^2}\right)\cdots\left(a_nG^{L^n}\right) &= G^{a_0\ \cdot(a_1L)\cdot\left(a_2L^2\right)\cdots(a_nL^n)}。\end{aligned}$$

同时，如果$b_1L_1'+b_2L_2'+\cdots+b_nL_n'\neq\mathbf{0}$,应用(10.18)知分式

$$\begin{aligned}\frac{a_1G_1^{L_1}+a_2G_2^{L_2}+\cdots+a_nG_n^{L_n}}{b_1{G'}_1^{L_1'}+b_2{G'}_2^{L_2'}+\cdots+b_n{G'}_n^{L_n'}} &= \frac{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_i\right)^{a_1L_1+a_2L_2+\cdots+a_nL_n}}{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_i'\right)^{b_1L_1'+b_2L_2'+\cdots+b_nL_n'}}\\ &= \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_i\right)\bigcup\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_i'\right)\right)^{\frac{a_1L_1+a_2L_2+\cdots+a_nL_n}{b_1L_1'+b_2L_2'+\cdots+b_nL_n'}}.\end{aligned}$$

一般地，取一个对图的并运算封闭的图族$\mathscr{G}=\{G_n|n\geq 1\}$，即对任意$G_i,G_j\in\mathscr{G}$有$G_i\cup G_j\in\mathscr{G}$，设$\mathscr{B}$是域$\mathscr{F}$上的一个Banach空间，记$\mathscr{G}$中的图在$\mathscr{B}$上生成的连续

流G^L为$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$，即$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}=\left\{G^L|G\in\mathscr{G},L:V(G)\cup E(G)\to\mathscr{B}\right\}$。这时，由定义知$(\mathscr{G}_{\mathscr{B}};+)$和$(\mathscr{G}_{\mathscr{B}};\cdot)$均为$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上的交换群。这样，$(\mathscr{G}_{\mathscr{B}};+,\cdot)$是$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$在加法$+$和乘法$\cdot$运算下的一个双群。更进一步，如果$(\mathscr{B};+,\cdot)$是一个域且任一个连续流$G^L\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上的边端算子为$1_{\mathscr{B}}$，则$(\mathscr{G}_{\mathscr{B}};+,\cdot)$也是一个域，因为这时，对任一顶点$v\in E(G)$和边$(v,u)\in E(G)$有

$$\begin{aligned}
\left(L_1\cdot(L_2+L_3)\right)(v) &= \left(L_1\cdot L_2+L_1\cdot L_3\right)(v),\\
\left((L_1+L_2)\cdot L_3\right)(v) &= \left(L_1\cdot L_3+L_2\cdot L_3\right)(v),\\
\left(L_1\cdot(L_2+L_3)\right)(v,u) &= \left(L_1\cdot L_2+L_1\cdot L_3\right)(v,u),\\
\left((L_1+L_2)\cdot L_3\right)(v,u) &= \left(L_1\cdot L_3+L_2\cdot L_3\right)(v,u),
\end{aligned}$$

则对连续流$G_1^{L_1},G_2^{L_2}$和$G_3^{L_3}\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$有

$$\begin{aligned}
G^{L_1}\cdot\left(G^{L_2}+G^{L_3}\right) &= G^{L_1}\cdot G^{L_2}+G^{L_1}\cdot G^{L_3},\\
\left(G^{L_1}+G^{L_2}\right)\cdot G^{L_3} &= G^{L_1}\cdot G^{L_3}+G^{L_2}\cdot G^{L_3},
\end{aligned}$$

即$(\mathscr{B};+,\cdot)$上的连续流运算满足分配律。这里，$G=G_1\cup G_2\cup G_3$且对任一整数$1\leq i\leq 3$和$x\in V(G)\cup E(G)$，将L_i拓广到G上，即仅当$x\in V(G_i)\cup E(G_i)$时在G上的标号为$L_i(x)$，否则为$\mathbf{0}$。这样，欧阳博士解释说，拓广后有$G^{L_i}=G_i^{L_i},1\leq i\leq 3$。

第3节 Banach流空间

人无时不是生活在一个社会网络中，可在一个网络中观测网络上的社会物质流动。同时，人在显微镜下可以对菌、病毒和真菌等微生物的生活进行观测。二者不同之处在于，人对宏观世界中物质流动的观测是一种局部行为，以局部观测结果认知事物，而对微生物的观测则是一种整体行为，是由一个微生物的整体表象进行认知，且由微生物的细胞结构，观测结果是微生物网络结构整体的状态。这样，人无论是对宏观世界还是微观世界中的一件事物进行系统认知，实质是对事物基元构成的网络，即连续流状态的认知。

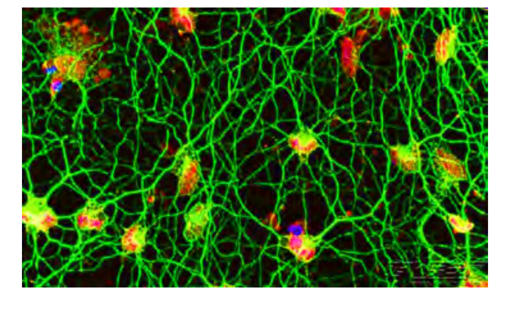


图10.13 人皮层细胞结构

那么，是否可将连续流G^L作为一个数学元构建相应的数学空间，进而模拟事物状态而不论是在宏观还是微观世界中呢？答案是肯定的！欧阳博士解释说，这就是一个图族$\mathscr{G}$在一个Banach空间$\mathscr{B}$上的连续流G^L在运算(10.13)和(10.15)上引入范

数$\|\cdot\|$得到的Banach流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$，即将一个连续流$G^L$视为一个向量，一个具有拓扑图结构$G$的向量，进而在连续流$G^L$上构建数学系统，称为数学组合学。

3.1.线性流空间. 取$\mathscr{B}$为域$\mathscr{F}$上的一个Banach空间，欧阳博士告诉惠子，对任意连续流$G_k, G_l, G_s \in \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$，由连续流加法+运算(10.13)和数乘·运算(10.15)，容易验证$(\mathscr{G}_{\mathscr{B}}; \mathscr{F})$满足线性空间条件，为一个线性空间：

1)交换律，即有$G_k^{L_k} + G_l^{L_l} = G_l^{L_l} + G_k^{L_k}$，因为

$$\begin{aligned} G_k^{L_k} + G_l^{L_l} &= (G_k \setminus G_l)^{L_k} \bigcup \left(G_k \bigcap G_l\right)^{L_k 2 + L_l 2} \bigcup (wG_l \setminus G_k)^{L_l} \\ &= (G_l \setminus G_k)^{L_l} \bigcup \left(G_l \bigcap G_k\right)^{L_l 2 + L_k} \bigcup (G_k \setminus G_l)^{L_l} \\ &= G_l^{L_l} + G_k^{L_k} \text{。} \end{aligned}$$

2)结合律，即有$\left(G_k^{L_k} + G_l^{L_l}\right) + G_s^{L_s} = G_k^{L_k} + \left(G_l^{L_l} + G_s^{L_s}\right)$，因有

$$\begin{aligned} \left(G_k^{L_k} + G_l^{L_l}\right) + G_s^{L_s} &= \left(G_k \bigcup G_l\right)^{L_{kl}^+} + G_s^{L_s} = \left(G_k \bigcup G_l \bigcup G_s\right)^{L_{kls}^+} \\ &= G_k^{L_k} + \left(G_l \bigcup G_s\right)^{L_{ls}^+} = G_k^{L_k} + \left(G_l^{L_l} + G_s^{L_s}\right)\text{。} \end{aligned}$$

这当中，标号映射L_{kl}^+是图$G_k \cup G_l$上的标号映射$L_k + L_l$，L_{kls}^+是图$G_k \cup G_l \cup G_s$上的标号映射，即

$$L_{kls}^+(e) = \begin{cases} L_k(v,u), & (v,u) \in E\left(G_k \setminus (G_l \cup G_s)\right), \\ L_l(v,u), & (v,u) \in E\left(G_l \setminus (G_k \cup G_s)\right), \\ L_s(v,u), & (v,u) \in E\left(G_s \setminus (G_k \cup G_l)\right), \\ L_{kl}^+(v,u), & (v,u) \in E\left((G_k \cap G_l) \setminus G_s\right), \\ L_{ks}^+(v,u), & (v,u) \in E\left((G_k \cap G_s) \setminus G_l\right), \\ L_{ls}^+(v,u), & (v,u) \in E\left((G_l \cap G_s) \setminus G_k\right), \\ \left(L_k + L_l + L_s\right)(v,u), & (v,u) \in E\left(G_k \bigcap G_l \bigcap G_s\right)\text{。} \end{cases}$$

3)单位元，由定义$\mathbf{O}$是$(\mathscr{G}_{\mathscr{B}}; \mathscr{F})$上唯一的单位元，即对任一连续流$G^L \in \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$有$\mathbf{O} + G^L = G^L + \mathbf{O} = G^L$。

4)逆元，对任一连续流$G^L \in \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$，$G^{-L}$是$G^L$唯一的逆元，即$G^L + G^{-L} = \mathbf{O}$。

5)数乘运算，由(10.15)定义，对任一连续流$G^L \in \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$和元$\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{F}$有

(a) $1_{\mathscr{F}} \cdot G^L = G^L$；

(b) $(\alpha_1 \alpha_2) \cdot G^L = \alpha_1(\alpha_2 \cdot G^L)$；

(c) $\alpha \cdot (G_k^{L_k} + G_l^{L_l}) = \alpha \cdot G_k^{L_k} + \alpha \cdot G_l^{L_l}$；

(d) $(\alpha_1+\alpha_2)\cdot G^L=\alpha_1\cdot G^L+\alpha_2\cdot G^L$。

这样，连续流空间$(\mathscr{G}_{\mathscr{B}};\mathscr{F})$满足线性空间的所有条件，为一个线性空间。

3.2.Banach流空间. 一个线性空间$(\mathscr{G}_{\mathscr{B}};\mathscr{F})$是一个Banach空间有两个条件，欧阳博士告诉惠子，一是引入范数$\|\cdot\|$，二是完备，即其上的任一个柯西点列收敛。

假设任一个连续流$G^L\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上的边端算子均为$\mathscr{B}$上连续的线性算子，定义范数

$$\left\|G^L\right\|=\sum_{(v,u)\in E(G)}\left\|L^{A^+_{vu}}(v,u)\right\|。\tag{10.19}$$

这当中，$\|\cdot\|$是Banach空间$\mathscr{B}$上的范数，则对任意的连续流$G^L,G_k^{L_k},G_l^{L_l}\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$有：

1)非负性. 由定义，$\left\|G^L\right\|\geq 0$且$\left\|G^L\right\|=0$当且仅当$G^L=\mathbf{O}$。

2)齐次性. 对任一$\xi\in\mathscr{F}$，有$\left\|G^{\xi L}\right\|=|\xi|\left\|G^L\right\|$。

3)三角不等式. 由连续流上的范数定义和对任意向量$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in\mathscr{B}$有$\|\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\|\leq\|\mathbf{v}_1\|+\|\mathbf{v}_2\|$知

$$\begin{aligned}\left\|G_k^{L_k}+G_l^{L_l}\right\| &= \sum_{(v,u)\in E(G_k\setminus G_l)}\left\|{L_k}^{A^+_{vu}}(v,u)\right\|+\sum_{(v,u)\in E(G_l\setminus G_k)}\left\|{L_l}^{A^+_{vu}}(v,u)\right\|\\ &\quad+\sum_{(v,u)\in E(G_k\cap G_l)}\left\|{L_k}^{A^+_{vu}}(v,u)+{L_l}^{A^+_{vu}}(v,u)\right\|\\ &\leq \sum_{(v,u)\in E(G_k\setminus G_l)}\left\|{L_k}^{A^+_{vu}}(v,u)\right\|+\sum_{(v,u)\in E(G_k\cap G_l)}\left\|{L_l}^{A^+_{vu}}(v,u)\right\|\\ &\quad+\sum_{(v,u)\in E(G_l\setminus G_k)}\left\|{L_k}^{A^+_{vu}}(v,u)\right\|+\sum_{(v,u)\in E(G_k\cap G_l)}\left\|{L_l}^{A^+_{vu}}(v,u)\right\|\\ &= \left\|G_k^{L_k}\right\|+\left\|G_l^{L_l}\right\|,\end{aligned}$$

即满足三角不等式$\left\|G_k^{L_k}+G_l^{L_l}\right\|\leq\left\|G_k^{L_k}\right\|+\left\|G_l^{L_l}\right\|$。

这样一来，映射$\|\cdot\|:\mathscr{G}_{\mathscr{B}}\to\mathbb{R}$满足范数条件$(N_1)-(N_3)$，故是连续流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上的一个范数。那么，什么是连续流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上的柯西序列呢？欧阳博士解释说，一个连续流序列$\left\{G_n^{L_n}\right\}_1^\infty$是一个柯西序列，如果该序列对任一正数$\varepsilon>0$总是存在一个整数$N(\varepsilon)$使得$k,l\geq N(\varepsilon)$时有$\left\|G_n^{L_k}-G_l^{L_l}\right\|<\varepsilon$成立。

现在，假设$\left\{G_n^{L_n}\right\}_1^\infty$为$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$中的一个柯西序列，定义图$\coprod=\bigcup\limits_{G\in\mathscr{G}}G$，则因图族$\mathscr{G}$对并运算封闭，有$\coprod\in\mathscr{G}$。我们在图$\coprod$上定义一个标号映射

$$\widehat{L}_n(x)=\begin{cases}L_n(x), & x\in V\left(G_n\right)\cup E\left(G_n\right),\\ \mathbf{0}, & x\in V\left(\coprod\setminus G_n\right)\cup E\left(\coprod\setminus G_n\right)\end{cases}$$

且$\coprod$上的边端算子与$G_n^{L_n}$相同，则由定义和对标号图的约定有$G_n^{L_n}=\coprod^{\widehat{L}_n}\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$。这样一来，显然有

$$\begin{aligned}\left\|G^{L_k}-G^{L_l}\right\| &= \left\|\coprod^{\widehat{L}_k}-\coprod^{\widehat{L}_l}\right\|=\left\|\coprod^{\widehat{L}_k-\widehat{L}_l}\right\| \\ &= \sum_{(v,u)\in E(\coprod)}\left(\left\|\widehat{L}_k^{A_{vu}^+}(v,u)-\widehat{L}_l^{A_{vu}^+}(v,u)\right\|\right).\end{aligned}$$

注意，对任一正数$\varepsilon>0$，如对任意整数$k,l\geq N(\varepsilon)$有$\left\|G^{L_k}-G^{L_l}\right\|\leq\varepsilon$，则一定有$\left\|\widehat{L}_k^{A_{vu}^+}(v,u)-\widehat{L}_l^{A_{vu}^+}(v,u)\right\|\leq\varepsilon$，即$\left\{\widehat{L}_n^{A_{vu}^+}(v,u)\right\}_1^\infty$是一个柯西序列且在Banach空间$\mathscr{B}$上收敛。不失一般性，对任一边$(v,u)\in E(\coprod)$，设$\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{L}_n^{A_{vu}^+}(v,u)=L_0^{A_{vu}^+}(v,u)$，则因算子$A_{vu}^+$是一个连续的线性算子，有$\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{L}_n(v,u)=L_0(v,u)$。这样，$\lim\limits_{n\to\infty}G_n^{L_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\coprod^{\widehat{L}_n}=\coprod^{\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{L}_n}=\coprod^{L_0}$，即柯西序列$\left\{G_n^{L_n}\right\}_1^\infty$在$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$中是个收敛序列。故由定义知连续流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$是一个Banach空间。

更进一步，如果Banach空间$\mathscr{B}$是一个内积为$\langle\cdot,\cdot\rangle$的Hilbert空间，则对任意两个连续流$G^L,G'^{L'}\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$，可定义它们的内积

$$\left\langle G^L,G'^{L'}\right\rangle=\sum_{(v,u)\in E(G\cap G')}\left\langle L^{A_{vu}^+}(v,u),L'^{A_{vu}^+}(v,u)\right\rangle, \tag{10.20}$$

并类似地得知：

1) 非负性. 对任一个连续流$G^L\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$有$\left\langle G^L,G^L\right\rangle\geq0$且$\left\langle G^L,G^L\right\rangle=0$当且仅当连续流$G^L=\mathbf{O}$。

2) 共轭性. 对任两个连续流$G_k^{L_k},G_l^{L_l}\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$有

$$\left\langle G_k^{L_k},G_l^{L_l}\right\rangle=\overline{\left\langle G_l^{L_l},G_k^{L_k}\right\rangle}。$$

3) 线性. 对任三个连续流$G^L,G_k^{L_k},G_l^{L_l}\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$和复数$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$有

$$\left\langle\alpha G_k^{L_k}+\beta G_l^{L_l},G^L\right\rangle=\alpha\left\langle G_k^{L_k},G^L\right\rangle+\beta\left\langle G_l^{L_l},G^L\right\rangle。$$

这样，由定义知如果$\mathscr{B}$为一个Hilbert空间，则连续流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$满足Hilbert空间的条件$(H_1)-(H_3)$，是一个Hilbert空间。

一个内积空间V中的两个向量$\mathbf{v}_1,\mathbf{v_2}\in V$如果满足$\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v_2}\rangle=0$，则称$\mathbf{v}_1$与$\mathbf{v_2}$是两个正交向量。欧氏空间$\mathbb{R}^3$中，两个向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$正交，即$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$当且仅当这两个向量间夹角为$90^o$。那么，两个连续流$G^L,G'^{L'}$在什么状态下正交呢？欧阳博士解释说，这时，由(10.20)连续流G^L与$G'^{L'}$正交条件是它们的内积为0，即

$$\left\langle G^L,G'^{L'}\right\rangle=\sum_{(v,u)\in E(G\cap G')}\left\langle L^{A_{vu}^+}(v,u),L'^{A_{vu}^+}(v,u)\right\rangle=0,$$

即图G与G'的交在同一条边上的向量在边端算子作用下的内积之和为0。

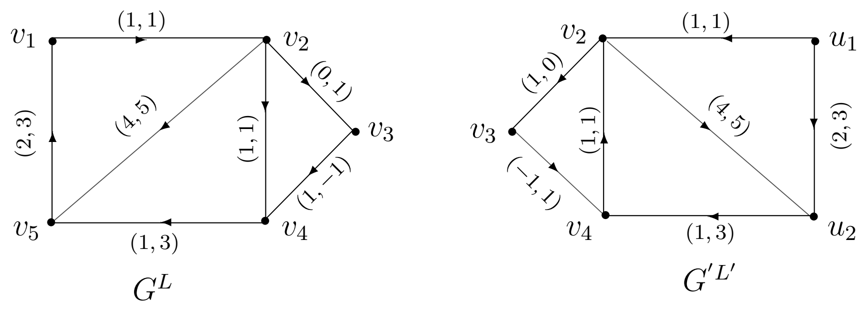


图10.14

例如，图10.14中给出了两个边端算子均为$1_{\mathscr{B}}$的连续流G^L和$G'^{L'}$，且图G与G'交图的顶点集$V(G\cap G')=\{v_2,v_3,v_4\}$，边集$E(G\cap G')=\{v_2v_3,v_3v_4,v_4v_2\}$，为一个完全图$K_3$。这时，$G^L$和$G'^{L'}$的内积为

$$\left\langle G^L,G'^{L'}\right\rangle=\langle(0,1),(1,0)\rangle+\langle(1,-1),(-1,1)\rangle+\langle(1,1),(1,1)\rangle=0-2+2=0,$$

即G^L与$G'^{L'}$正交。特别地，如果图$G\cap G'=\emptyset$，则对任一映射$L:V(G)\cup E(G)\to\mathscr{B}$和$L':V(G')\cup E(G')\to\mathscr{B}$一定有$\left\langle G^L,G'^{L'}\right\rangle=0$，与欧氏空间中的

$$\left\langle(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-k}),(\underbrace{0,\cdots,0}_{k},\beta_{k+1},\beta_{k+2},\cdots,\beta_n)\right\rangle=0$$

情形类似。这当中，对任意整数$1\le i\le k,k+1\le j\le n$有$\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}$。

3.3.G-同构算子. 一般地，作用于Banach空间$\mathscr{B}$上的算子把一个向量映射为另一个向量。欧阳博士告诉惠子，连续流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$既然是一个Banach空间，一种自然的想法是在Banach流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上分析那些将一个连续流$G^L$映射为另一个连续流$G'^{L'}$且保持两个连续流中的图结构对应的那些算子，进而拓广Banach空间的算子理论。

对任两个连续流$G_1^{L_1},G_2^{L_2}\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$，如果一个连续流上的算子$f:G_1^{L_1}\to G_2^{L_2}$满足以下两个条件：

$(C1)$ 图G_1,G_2是同构的，即存在一个图同构映射$\varphi:G_1\to G_2$；

$(C2)$ 对任一条边$(v,u)\in E(G_1)$有$L_2=f\circ\varphi\circ L_1$，

则称f是$G_1^{L_1}$与$G_2^{L_2}$间的一个G-同构算子。同时，称连续流$G_1^{L_1}$和$G_2^{L_2}$是G-同构的。这当中，算符"$\circ$"表示映射复合。这样，可以将一个G-同构算子f简单表示为$f:G^{L_1}\to G^{L_2}$。特别地，取$\varphi=\mathrm{id}_G$，即图G上的单位自同构，则一个G-同构算子f由方程

$$L_2(v,u)\ =\ f\circ L_1(v,u),\quad\forall(v,u)\in E(G)\tag{10.21}$$

成立确定。换言之，一个G-同构算子是Banach空间$\mathscr{B}$上的向量间保持图G结构不变的那一类映射。更进一步，如果$\mathscr{B}$是变量$\mathbf{x}$上的一个函数域，则一个G-同构算子f满

足方程

$$f\left(G^L[\mathbf{x}]\right) = G^{f(L[\mathbf{x}])}。 \tag{10.22}$$

例如，当取$\mathscr{B}$为一个实数域时，网络算术中的幂映照、指数映照、三角映照均成立。特别地，有指数方程

$$e^{G^L[\mathbf{x}]} = \mathbf{I} + \frac{G^L[\mathbf{x}]}{1!} + \frac{G^{2L}[\mathbf{x}]}{2!} + \cdots + \frac{G^{nL}[\mathbf{x}]}{n!} + \cdots \tag{10.23}$$

成立。注意，(10.23)虽然与(9.39)在形式上一致，但这里的$G^L[\mathbf{x}]$是一个连续流，乘法为Hadamard积，是网络流等式(9.39)的推广。

欧阳博士告诉惠子，连续流G^L上的一个G-同构是图G上的自同构，在刻画连续流变化状态时一般不是这种情形，而是对两个不同构图G_1, G_2刻画映射$f: G_1^{L_1} \to G_2^{L_2}$。这时，需要拓广$G$-同构算子。这当中的一个基本问题是，$G$-同构算子$f: G_1^{L_1} \to G_2^{L_2}$中的$G$一定是连续流$G_1^{L_1}$中的图$G_1$吗？答案是不一定！欧阳博士解释说，因为由连续流的约定，对任一个图$\widehat{G} \supset G$，如果定义

$$\widehat{L}(x) = \begin{cases} L(x), & x \in V(G) \cup E(G), \\ \mathbf{0}, & x \notin V(G) \cup E(G \end{cases}$$

则有$\widehat{G}^{\widehat{L}} = G^L$。这样，可以在一个更大的图中讨论$G$-同构算子，刻画任意两个图$G_1, G_2$上连续流$G_1^{L_1}, G_2^{L_2}$间的算子。

一般地，如果一个连续流上的算子$f: {G_1}^{L_1} \to {G_2}^{L_2}$满足以下条件：

$(C1')$ 存在一个图同构映射$\varphi: G \to G$；

$(C2')$ 对任一边$(v,u) \in E\left(G_1\right)$有$L_2 = f \circ \varphi \circ L_1$但对任一边$(v,u) \in E\left(G_2 \setminus G_1\right)$则有$f: \mathbf{0} \to L_2(v,u)$；对任一边$(v,u) \in E(G_1 \backslash G_2)$则有$f: L(v,u) \to \mathbf{0}$，则称$f$为一个扩展的$G$-同构算子。

那么，对任两个连续流$G_1^{L_1}, G_2^{L_2} \in \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$, Banach流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上是否一定存在扩展的$G$-同构算子$f: G_1^{L_1} \to G_2^{L_2}$呢？答案是肯定的！欧阳博士解释说，这时，可以取$\widehat{G} = G_1 \bigcup G_2$，在$\widehat{G}$上定义标号映射$\widehat{L}_1, \widehat{L}_2$如下：

$$\widehat{L}_1 = \begin{cases} L_1(v,u), & (v,u) \in E\left(G_1\right), \\ \mathbf{0}, & (v,u) \in E\left(\widehat{G} \backslash G_1\right) \end{cases}; \quad \widehat{L}_2 = \begin{cases} L_2(v,u), & (v,u) \in E\left(G_2\right), \\ \mathbf{0}, & (v,u) \in E\left(\widehat{G} \backslash G_2\right) \end{cases}。$$

且标号映射为$\widehat{L}_1$时$\widehat{G}$上的边端算子与G_1相同，$\widehat{L}_2$时$\widehat{G}$上的边端算子与G_2相同，则有$\widehat{G}^{\widehat{L}_1} = G_1^{L_1}$，$\widehat{G}^{\widehat{L}_2} = G_2^{L_2}$。这时，连续流算子$f: G_1^{L_1} \to G_2^{L_2}$等价于图$\widehat{G}$上的算子$f: \widehat{G}^{\widehat{L}_1} \to \widehat{G}^{\widehat{L}_2}$，取$\varphi$为图$\widehat{G}$上的一个自同构即满足连续流$G$-同构的条件。相应

地，$f: G_1^{L_1} \to G_2^{L_2}$为一个扩展的$G$-同构。这样，可以类似于网络算术，定义连续流序列的极限、算子的连续性等概念，进而构建连续流上的微积分理论。例如，一个G-同构算子$f: \mathscr{G}_{\mathscr{B}} \to \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$对$L$可微当且仅当$f(L)$对$L$可微，有微分与积分的关系

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{d}{dt} f\left(G^L\right)[x] \right) dx &= f\left(G^L[x]\right) + C, \\ \frac{df}{dt}\left(\int \left(f\left(G^L[x]\right)\right) dx \right) &= f\left(G^L[x]\right), \end{aligned} \tag{10.24}$$

以及微积分基本定理

$$\int_a^b f\left(\overrightarrow{G}^L[t]\right) dt = F\left(\overrightarrow{G}^L[t]\right)\Big|_{t=b} - F\left(\overrightarrow{G}^L[t]\right)\Big|_{t=a} \tag{10.25}$$

等。这里，着重拓广Banach空间上的线性算子与泛函理论到流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上。

假设映射$f: \mathscr{G}_{\mathscr{B}} \to \mathscr{G}_{\mathscr{B}'}$为域$\mathscr{F}$上Banach流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$的一个$G$-同构算子。对任两个连续流$G_1^{L_1}, G_2^{L_2} \in \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$和标量$\lambda, \mu \in \mathscr{F}$，如有

$$f\left(\lambda G_1^{L_1} + \mu G_2^{L_2}\right) = \lambda f\left(G_1^{L_1}\right) + \mu f\left(G_2^{L_2}\right), \tag{10.26}$$

则称f为一个线性算子；如果对任一正数$\varepsilon > 0$如总存在一个实数$\delta(\varepsilon)$使得

$$\left\|{G_1}^{L_1} - G_0^{L_0}\right\| < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow\ \left\|f\left(G^L\right) - f\left(G_0^{L_0}\right)\right\| < \varepsilon, \tag{10.27}$$

则称算子f在连续流$G_0^{L_0}$处连续；如存在一个常数$\xi \in [0, \infty)$使对任一连续流$G^L \in \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$有$\left\|f\left(G^L\right)\right\| \leq \xi \left\|G^L\right\|$，则称$f$有界。更进一步，如对任意$G_1^{L_1}, G_2^{L_2} \in \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$均有

$$\left\|f\left(G_1^{L_1}\right) - f\left(G_2^{L_2}\right)\right\| \leq \xi \left\|G_1^{L_1} - G_2^{L_2}\right\|, \ \ \xi \in [0, 1) \tag{10.28}$$

则称f为流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上的一个收缩子。这样，欧阳博士告诉惠子，Banach 空间中关于线性算子的一些重要结论可以由G-同构算子拓广到流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上。例如，对流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上的$G$-同构收缩子拓广Banach 空间上的不动点定理，即有对任一个连续的G-同构收缩子$f: \mathscr{G}_{\mathscr{B}} \to \mathscr{G}_{\mathscr{B}'}$存在唯一一个连续流$G^L \in \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$使得$f\left(G^L\right) = G^L$。

那么，怎样判断一个G-同构线性算子的连续性呢？与一般Banach空间上线性算子的连续类似，欧阳博士解释说，一个G-同构线性算子$f: \mathscr{G}_{\mathscr{B}} \to \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$连续当且仅当$f$有界。更进一步，如果$f$还是$1-1$的，则$f$的逆算子$f^{-1}$也是一个$G$-同构连续算子。同时，一个$G$-同构线性算子$f: \mathscr{G}_{\mathscr{B}} \to \mathscr{G}_{\mathscr{B}}$的图像Grap$f$定义为

$$\mathrm{Grap} f \ = \ \left\{ \left(G^L, f\left(G^L\right)\right) \Big|\, G^L \in \mathscr{G}_{\mathscr{B}} \right\}, \tag{10.29}$$

如果f的图像Grap$f$是一个闭空间，则称f是一个闭算子。这样，类似于Banach空间上的闭算子，有如果一个G-同构线性算子$f:\mathscr{G}_{\mathscr{B}}\rightarrow\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$是闭算子则$f$连续的结论。

泛函可视为是函数上的函数，是对客观事物认知中的一种定量分析方法。那么，怎样拓广Banach空间上的线性泛函到Banach流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上呢？欧阳博士告诉惠子，如果一个$G$-同构线性算子$f:\mathscr{G}_{\mathscr{B}}\rightarrow\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$，则称$f$为一个流泛函。这当中，一个基本问题是Banach流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上是否真的存在连续的线性流泛函呢？答案是肯定的！欧阳博士解释说，可以拓广Banach空间上的泛函延拓定理，即Hahn-Banach定理到Banach流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上而得到流泛函存在的结论。这时，假设$\mathscr{H}_{\mathscr{B}}$为Banach流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上的一个子空间，$F:\mathscr{H}_{\mathscr{B}}\rightarrow\mathbb{C}$为$\mathscr{H}_{\mathscr{B}}$上的一个连续线性泛函，则存在一个连续的线性泛函$\widetilde{F}:\mathscr{G}_{\mathscr{B}}\rightarrow\mathbb{C}$满足条件：①如果$G^L\in\mathscr{H}_{\mathscr{B}}$则$\widetilde{F}\left(G^L\right)=F\left(G^{L^2}\right)$；②$\|\widetilde{F}\|=\|F\|$。特别地，如果$\mathbf{O}\neq G_0^{L_0}\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$，则存在一个连续的线性泛函$F$使得$\|F\|=1$且$\left\|F\left(G_0^{L_0}\right)\right\|=\left\|G_0^{L_0}\right\|$。应用Banach流空间上的这一延拓定理可知，如果对任一个$G^L\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$，$F\left(G^L\right)=0$对$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上的所有线性泛函$F$成立，则一定有$\overrightarrow{G}^L=\mathbf{O}$。

欧阳博士告诉惠子，当Banach空间$\mathscr{B}$为一个完备的内积空间即Hilbert空间$\mathcal{H}$时，对应的Banach流空间$\mathscr{G}_{\mathcal{H}}$亦是一个Hilbert空间，称为Hilbert流空间。注意，Hilbert空间上的Fréchet和Riesz表示定理解决了其上Hermitian算子的存在性问题，进而实现对量子态的本征值进行测量。同样地，如果用连续流G^L表征量子态，是否在流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$上这样的表示定理仍成立呢？答案是肯定的！欧阳博士解释说，这时，设$f:\mathscr{G}_{\mathscr{B}}\rightarrow\mathbb{C}$为一个连续的线性泛函，则对任一个连续流$G^L\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$，存在唯一的一个连续流$\widehat{G}^{\widehat{L}}\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$使得$f\left(G^L\right)=\left\langle G^L,\widehat{G}^{\widehat{L}}\right\rangle$。这样，即便是量子有内蕴组合结构$G$，对量子测量的假设1-假设3仍然成立。

第4节 流元稳态

系统认知一件事物T的状态或行为有两种表示方法，一种是流元法，即在事物T内蕴的拓扑结构G的节点和边上标定向量，且在边端算子作用下满足节点守恒律，构造连续流G^L并作为Banach空间上的一种数学元，即流元刻画事物T；另一种是算子方程，由事物T内蕴拓扑结构G^L上的节点守恒方程(10.11)，即

$$\sum_{u\in N_G^-(v)}L^{A_{uv}^+}(u,v)-\sum_{u\in N_G^+(v)}L^{A_{uv}^+}(u,v)\ =\ L(v),\quad v\in V(G)$$

构成的算子方程刻画事物T。那么，这两种表示方法对事物T状态和行为的认知是否一致呢？答案在逻辑上是肯定的！欧阳博士解释说，流元法是基于一件事物T内蕴的组合结构G的节点、边上标定向量形象地模拟事物T的状态或行为，是对事物T的

一种系统认知；相应地，算子方程是对事物T基元间的相互作用在各基元或节点上的守恒关系。二者刻画的是同一件事物T的状态或行为，仅是表现形式上的不同，逻辑上没有实质上的差异。那么，这样一来，是否可以凭算子方程认知一件事物的状态或行为呢？答案是肯定的，只要算子方程对应的是流元G^L上的节点守恒方程。欧阳博士告诉惠子，两种表示方法虽然在逻辑上一致，都是在刻画事物T的状态，但其中仍有些区别。流元法基于事物T的内蕴结构，直觉上形象些，这也是为什么将连续流视为一个数学元并在其上构建Banach流空间的原因；算子方程定量刻画基元间的作用，是直觉上的一种符号抽象，与变量选择和定量刻画的准确性有关，是对事物认知的惯用技巧，但如果偏离了与流元G^L上节点守恒方程的对应关系，算子方程并不能准确模拟事物状态或行为。特别地，同一个变量在不同的节点方程中的内涵与外延是否一致，以及由节点守恒得到的算子方程是否可解，不可解又意味着什么等。这当中，关键是选择变量对事物基元状态或行为刻画的一致性，这是在对事物观测基础上引入哪种变量或哪些变量需要解决的问题，因为只有正确区分事物变化的不同影响因素并引入变量模拟事物状态，才能准确把握事物真实。同时，这也是人对事物认知中最困难的一件事。例如，对图10.15中有不同出行需求人群行为的刻画，以及为什么波姆对量子纠缠中的“超距作用”用隐变量解释等，均表明人对生物或类生物群体行为把握的不确定性，特别是在量子纠缠的变量模拟中给不出实证，只能用一个“隐”字指代。这在一定程度上蕴意着人对万物认知上的局限性，不能用一种统一规则模拟并把握事物行为。



图10.15 三个女人一台戏

理论上，如果变量对事物T的基元与基元间的作用刻画准确，无论是用流元法G^L还是节点对应的算子方程，刻画的都是事物T的状态或行为。这时，由《道德经》中的“天地不仁，以万物为刍狗”的哲学含义，算子方程的解即还原万物本真，一定存在对应于基元与基元间作用的流元解G^L。那么，为什么一些模拟事物状态或行为的算子方程会出现矛盾或不可解呢？欧阳博士告诉惠子，出现这种情形，是人对基元或基元间作用的不恰当抽象，即将两个不同内涵的基元或基元作用由同一个变量模拟。这时，需要的是重新引入模拟事物基元、基元间作用状态或行为变量。

惠子问欧阳博士：“爸爸，既然两种方法都是认知一件事物的系统方法，哪种方法更有利于认知事物真实呢？”欧阳博士告诉她，选用哪种方法认知事物真实并没

有统一的规则。流元法便于对事物状态或行为进行系统认知，算子方程以方程的解模拟事物状态，对那些能求出精确解的情形有利。但两种认知事物真实的方法又都存在一定难度或缺陷。这当中，流元法需要准确认知事物基元和基元间的相互作用，对那些超越人精准观测能力的事物，如宏观世界中人观测不及的遥远星系、微观世界中那些与人的观测行为构成一个相互影响的二元系统的粒子等，只能凭借科学假说对事物真实进行推断；算子方程同样是建立在对事物系统认知上，还受算子方程中引入的变量与事物基元状态或行为的对应和算子方程解法上的限制，包括不同算子对应的不同方形式，如代数方程、微分方程、积分方程和泛函方程等。此外，即便算子方程的解存在，怎样求解，以及求出的解是否能确定事物状态或行为仍是一个未知数，这又回到了毕达哥拉斯那句“万物皆数”的名言上，即人真的可以用一个方程刻画宇宙万物的状态或行为吗？欧阳博士告诉惠子：“认为可用一个方程刻画宇宙万物的想法源于一些人唯心地认为人是宇宙主宰，万物均按人定规则运行。这种观点即便是放在中国古代也不为人接受，因为中国古哲人认可的是天人合一。”那么，人又应当怎样把握一件事物的真实呢？欧阳博士解释说，既然人对事物的认知是局部真实，一件事物的真实在人看来就应当是“多彩多姿”的，即展现在人面前的是多种表象或组合真实。这样，一件事物T对应的算子方程解的稳定性或同步应当等同于流元的稳定性或同步，因为二者都是在刻画事物T的稳定或同步态。

4.1.基元动态方程. 在一个n-维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中，假设事物T的基元状态及基元间的作用可用向量$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$刻画，且各基元均遵从一个时间参数$t$同步演化。这时，对任一点$v\in V(G)$和边$(v,u)\in E(G)$，标号映射$L:v\to\dot{\mathbf{x}}_v\in\mathbb{R}^n$，$L:(v,u)\to\mathbf{x}_{vu}\in\mathbb{R}^n$。欧阳博士告诉惠子，利用边端算子$A_{vu}^+$和$A_{uv}^+$，可以进一步假定基元$v$对基元$u$的作用和基元$u$对基元$v$的作用为$\mathbf{x}$，即$\mathbf{x}_{vu}=\mathbf{x}_{uv}=\mathbf{x}$。这样，基元$v$对基元$u$的作用在节点$u$上的表现为$A_{vu}^+(\mathbf{x})$，基元$u$对基元$v$的作用在节点$v$上的表现为$A_{uv}^+(\mathbf{x})$，如图10.16所示。

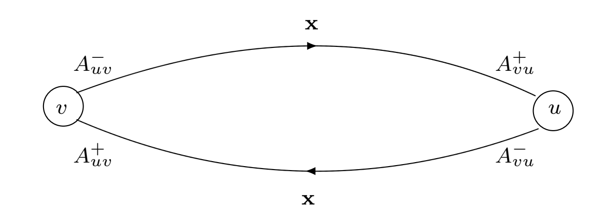


图10.16 欧氏空间中的基元作用

这时，流元G^L上节点守恒方程对应的算子方程为

$$\dot{\mathbf{x}}_v=\sum_{u\in N_G^-(v)}A_{uv}^+(\mathbf{x})-\sum_{u\in N_G^+(v)}A_{uv}^+(\mathbf{x}),\quad v\in V(G),\tag{10.30}$$

共有$n|G|$个方程。例如，对图10.16所示的由基元v和u构成的2-元系统中的算子方程有2个，即

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\mathbf{x}}_v &=& A^+_{uv}(\mathbf{x}) - A^-_{uv}(\mathbf{x}),\\ \dot{\mathbf{x}}_u &=& A^+_{vu}(\mathbf{x}) - A^-_{vu}(\mathbf{x})。\end{array}\right. \tag{10.31}$$

这里，变量$\mathbf{x}$包括$\mathbf{x}$以及其对时间t的导数$\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}, \cdots$ 等。

一般地，假设线性算子A^+_{vu}, A^+_{uv}对任一边$(v,u)\in E(G)$都是连续的，且$A^+_{vu}(\mathbf{0}) = A^+_{uv}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，则方程(10.30)和(10.31) 均为自治方程。这样，用泰勒级数将$A^+_{vu}(\mathbf{x})$在$\mathbf{0}$点附近展开，有

$$A^+_{vu}(\mathbf{x}) = \left.\frac{\partial A^+_{vu}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \mathbf{x}^t + \alpha_{vu}(\mathbf{x})。 \tag{10.32}$$

这当中，$\alpha(\mathbf{x})$为$A^+_{vu}(\mathbf{x})$关于$\mathbf{x}$次≥ 2的余项且如设边端算子

$$A^+_{vu}(\mathbf{x}) = \left(A^{+1}_{vu}(\mathbf{x}), A^{+2}_{vu}(\mathbf{x}), \cdots, A^{+n}_{vu}(\mathbf{x})\right),$$

则有

$$\left.\frac{\partial A^+_{vu}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=0} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial A^{+1}_{vu}}{\partial x_1} & \frac{\partial A^{+1}_{vu}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial A^{+1}_{vu}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial A^{+2}_{vu}}{\partial x_1} & \frac{\partial A^{+2}_{vu}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial A^{+2}_{vu}}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial A^{+n}_{vu}}{\partial x_1} & \frac{\partial A^{+n}_{vu}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial A^{+n}_{vu}}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{\mathbf{x}=0} = \left(a^{ij}_{vu}\right)_{n\times n} = \mathbf{A}_{vu}\ 。$$

这样，如取$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$且忽略$\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \cdots$，则有

$$\left.\frac{\partial A^+_{vu}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \mathbf{x}^t = \mathbf{A}_{vu}\mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} a^{11}_{vu}x_1 + a^{12}_{vu}x_2 + \cdots + a^{1n}_{vu}x_n \\ a^{21}_{vu}x_1 + a^{22}_{vu}x_2 + \cdots + a^{2n}_{vu}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^{n1}_{vu}x_1 + a^{n2}_{vu}x_2 + \cdots + a^{nn}_{vu}x_n \end{pmatrix},$$

即

$$A^+_{vu}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{vu}\mathbf{x}^t + \alpha_{vu}(\mathbf{x})。 \tag{10.33}$$

将$A^+_{vu}(\mathbf{x})$的展开式(10.33)代入方程(10.30)，则对任一节点$v\in V(G)$有

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_v &= \sum_{u\in N^-_G(v)} A^+_{uv}(\mathbf{x}) - \sum_{u\in N^+_G(v)} A^+_{uv}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{u\in N^-_G(v)} \mathbf{A}_{vu}\mathbf{x}^t - \sum_{u\in N^+_G(v)} \mathbf{A}_{vu}\mathbf{x}^t + \sum_{u\in N^-_G(v)} \alpha_{vu}(\mathbf{x}) - \sum_{u\in N^+_G(v)} \alpha_{vu}(\mathbf{x})。\end{aligned}$$

记上式中的系数矩阵和余项分别为

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{uv} &= \sum_{u\in N_G^-(v)}\mathbf{A}_{vu}-\sum_{u\in N_G^+(v)}\mathbf{A}_{vu}=\left(b_{vu}^{ij}\right)_{n\times n},\\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) &= \sum_{u\in N_G^-(v)}\alpha_{vu}(\mathbf{x})-\sum_{u\in N_G^+(v)}\alpha_{vu}(\mathbf{x})=\left(r_1(\mathbf{x}),r_2(\mathbf{x}),\cdots,r_n(\mathbf{x})\right),\end{aligned}$$

则任一基元$v\in V(G)$的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{B}_{vu}\mathbf{x}^t+\mathbf{R}(\mathbf{x})。\tag{10.34}$$

这样，假设基元v的态函数为$\mathbf{x}_v=(x_{v1}(\mathbf{x}),x_{v2}(\mathbf{x}),\cdots,x_{vn}(\mathbf{x}))$，则基元$v$动态方程(10.34)的分量形式为

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}_{v1}(\mathbf{x}) &= b_{vu}^{11}x_1+b_{vu}^{12}x_2+\cdots+b_{vu}^{1n}x_n+r_1(\mathbf{x}),\\ \dot{x}_{v2}(\mathbf{x}) &= b_{vu}^{21}x_1+b_{vu}^{22}x_2+\cdots+b_{vu}^{2n}x_n+r_2(\mathbf{x}),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \dot{x}_{vn}(\mathbf{x}) &= b_{vu}^{n1}x_1+b_{vu}^{n2}x_2+\cdots+b_{vu}^{nn}x_n+r_n(\mathbf{x})。\end{aligned}\right.\tag{10.35}$$

特别地，如果$x_{v1}(\mathbf{x}),x_{v2}(\mathbf{x}),\cdots,x_{vn}(\mathbf{x})$是线性函数，如$x_{v1}(\mathbf{x})=x_1,x_{v2}(\mathbf{x})=x_2,\cdots,x_{vn}(\mathbf{x})=x_n$时，则微分方程(10.35)表示为

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}_1 &= b_{vu}^{11}x_1+b_{vu}^{12}x_2+\cdots+b_{vu}^{1n}x_n+r_1(\mathbf{x}),\\ \dot{x}_2 &= b_{vu}^{21}x_1+b_{vu}^{22}x_2+\cdots+b_{vu}^{2n}x_n+r_2(\mathbf{x}),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \dot{x}_n &= b_{vu}^{n1}x_1+b_{vu}^{n2}x_2+\cdots+b_{vu}^{nn}x_n+r_n(\mathbf{x})。\end{aligned}\right.$$

更进一步，如果忽略(10.35)中$\mathbf{x}$的高次项$r_1(\mathbf{x}),r_2(\mathbf{x}),\cdots,r_n(\mathbf{x})$，由(10.35)得到常系数线性微分方程

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}_1 &= b_{vu}^{11}x_1+b_{vu}^{12}x_2+\cdots+b_{vu}^{1n}x_n,\\ \dot{x}_2 &= b_{vu}^{21}x_1+b_{vu}^{22}x_2+\cdots+b_{vu}^{2n}x_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \dot{x}_n &= b_{vu}^{n1}x_1+b_{vu}^{n2}x_2+\cdots+b_{vu}^{nn}x_n。\end{aligned}\right.\tag{10.36}$$

一般地，如果$x_{v1}(\mathbf{x}),x_{v2}(\mathbf{x}),\cdots,x_{vn}(\mathbf{x})$是非线性函数，可类似地用泰勒级数展开，取其线性部分近似而得到类似于(10.36) 的常系数线性系统。这时，(10.36)的稳定性由特征方程$|\mathbf{B}_{vu}-\lambda I_n|=0$根的性质判定平衡点$\mathbf{0}$是否稳定。例如，当方程$|\mathbf{B}_{vu}-\lambda I_n|=0$所有根的实部均为负数时平衡点$\mathbf{0}$是渐近稳定的；当$|\mathbf{B}_{vu}-\lambda I_n|=$

0存在实部为正值的根时平衡点$\mathbf{0}$是不稳定的等。这当中还有一个问题，即在什么条件下非线性系统(10.34)与线性系统(10.36)稳定与否一致呢？欧阳博士解释说，系统稳定性理论中有这样的结论，如果$A_{vu}^{+}(\mathbf{x})$是双曲型的，即$|\mathbf{B}_{vu}-\lambda I_n|=0$没有实部为0的根，则非线性系统(10.34)与线性系统(10.36)在$\mathbf{0}$点的稳定性一致，可由线性系统(10.36)得到非线性系统(10.34)的稳定性。

4.2.流元稳定态. 事物T的状态或行为采用算子方程认知时，由方程(10.34)的性状判定流元G^L的稳定性极大地依赖于对基元v状态的观测与假设。同时，并非对v任一状态都能判断v的稳定与否，特别是基元间作用为非线性的情形。那么，是否存在一种不依赖于方程(10.34)而由流元G^L性状判定基元是否稳定呢？答案是肯定的! 欧阳博士解释说，这正是构造Banach流空间的意义，即将G^L视为Banach空间中的一个元直接判定。

那么，一个动态流元$G^L[t]$稳定或渐近稳定是什么意思呢？欧阳博士解释说，对任一初值为G^{L_0}且标号$L: v\to\dot{\mathbf{x}}_v(t)$的流元$G^L[t]$，如果对另一初值$G'^{L'_0}$和给定的正数$\varepsilon>0$总是存在一个实数$\delta>0$使得$\left\|G^{L_0}-G'^{L'_0}\right\|<\delta$时有

$$\left\|G^L[t]-G'^{L'}[t]\right\|<\varepsilon \quad 或者 \lim_{t\to 0}\left\|G^L[t]-G'^{L'}[t]\right\|=0, \tag{10.37}$$

则称流元$G^L[t]$是稳定的或渐进稳定的。

由定义，流元G^L上的边端算子均为作用在Banach空间$\mathscr{B}$上的线性算子。这时，欧阳博士告诉惠子，如果边端算子是连续的，则对任一边$(v,u)\in E(G)$或$(v,u)\in E(G')$存在常数c_{vu}和c'_{vu}使得对任一向量$\mathbf{x}\in\mathscr{B}$有$\|A_{vu}^{+}(\mathbf{x})\|\leq c_{vu}^{+}\|\mathbf{x}\|$和$\left\|A'^{+}_{vu}(\mathbf{x})\right\|\leq c'^{+}_{vu}\|\mathbf{x}\|$。这样，由流元范数的定义知

$$\begin{aligned}\left\|G^L-G'^{L'}\right\| &= \left\|(G\setminus G')^L\right\|+\left\|\left(G\bigcap G'\right)^{L-L'}\right\|+\left\|(G'\setminus G)^{-L'}\right\| \\ &= \sum_{(v,u)\in E(G\setminus G')}\left\|L^{A_{vu}^{+}}(v,u)\right\|+\sum_{(v,u)\in E(G\bigcap G')}\left\|\left(L^{A_{vu}^{+}}-L'^{A'^{+}_{vu}}_{vu}\right)(v,u)\right\| \\ &\quad +\sum_{(v,u)\in E(G'\setminus G)}\left\|-L'^{A'^{+}_{vu}}(v,u)\right\|。\end{aligned}$$

注意，上式中的范数$\|\cdot\|\geq 0$，由$\left\|G^L-G'^{L'}\right\|<\varepsilon$知对图$G\setminus G'$，$G\bigcap G'$或$G'\setminus G$中的任一边$(v,u)$分别有$\|L^{A_{vu}^{+}}(v,u)\|<\varepsilon$，$\|(L-L')^{A_{vu}^{+}}(v,u)\|<\varepsilon$和$\|L^{A_{vu}^{+}}(v,u)\|<\varepsilon$。注意算子$A_{vu}^{+}$是连续的，故有$\|L(v,u)\|<\varepsilon'$，$\|(L-L')(v,u)\|<\varepsilon'$和$\|L(v,u)\|<\varepsilon'$。反之，对图$G\setminus G'$，$G\bigcap G'$或$G'\setminus G$中的任一边$(v,u)$和正数$\varepsilon'>0$，如分别有$\|L_1(v,u)\|<$

ε'，$\|(L-L')(v,u)\|<\varepsilon'$和$\|L(v,u)\|<\varepsilon'$。定义常数

$$c_{GG'}^{\max} = \left\{\max_{(v,u)\in E(G)} c_{vu}^{+}, \max_{(v,u)\in E(G')} c_{vu}^{+}\right\},$$

则有

$$\begin{aligned}\left\|G^L - G'^{L'}\right\| &= \sum_{(v,u)\in E(G\setminus G)} \left\|L^{A_{vu}^{+}}(v,u)\right\| + \sum_{(v,u)\in E(G\bigcap G')} \left\|\left(L^{A_{vu}^{+}} - L_{vu}^{A_{vu}'^{+}}\right)(v,u)\right\| \\ &\quad + \sum_{(v,u)\in E(G'\setminus G)} \left\|-L^{A_{vu}'^{+}}(v,u)\right\| \\ &\le \sum_{(v,u)\in E(G\setminus G')} c_{vu}^{+}\|L(v,u)\| + \sum_{(v,u)\in E(G\bigcap G')} c_{vu}^{+}\|\left(L-L'\right)(v,u)\| \\ &\quad + \sum_{(v,u)\in E(G'\setminus G)} c_{vu}^{+}\|-L(v,u)\| < \left|G\bigcup G'\right| c_{GG'}^{\max}\varepsilon'。\end{aligned}$$

特别地，取$\varepsilon' = \varepsilon/\left(|G\bigcup G'|\, c_{GG'}^{\max}\right)$则有$\left\|G^L - G'^{L'}\right\| < \varepsilon$，即不等式$\left\|G^L - G'^{L'}\right\| < \varepsilon$等价于对图$G\setminus G'$，$G\bigcap G'$或$G'\setminus G$中的任一边$(v,u)$分别有$\|L(v,u)\| < \varepsilon$，$\|(L-L')(v,u)\| < \varepsilon$和$\|L(v,u)\| < \varepsilon$。这样，就有判定一个流元$G^L[t]$稳定的局部化条件，即流元$G^L[t]$在初值$G^L[t_0]$处是稳定的或渐进稳定的当且仅当对任一边$(v,u)\in E(G)$，$L(v,u)[t]$在初值$L(v,u)[t_0]$处是稳定的或渐进稳定的。

4.3.流元同步态. 对一个节点标号$L: v \to \dot{\mathbf{x}}_v$的流元$G^L[t]$，如果存在一个流元$G_0^{L_0}[t] \neq G^L[t]$使得

$$\lim_{t\to\infty}\left\|G^L[t] - G_0^{L_0}[t]\right\| = 0, \tag{10.38}$$

则称流元$G^L[t]$是G-同步的。这时，应用算子方程(10.34)已知的一些同步结论，可以判定流元$G^L[t]$同步的一些特殊情形。欧阳博士告诉惠子，对$G^L[t]$上的边端算子为连续线性算子的情形还有更便捷的判别准则。

由定义，如果一个流元$G^L[t]$是G-同步的，则一定存在流元${G_0}^{L_0}$和正数$N(\varepsilon)$，使得$t \ge N(\varepsilon)$时有$\left\|G^L - {G_0}^{L_0}\right\| < \varepsilon$，即对图$G\setminus G_0$，$G\bigcap G_0$或$G_0\setminus G$中的任一边$(v,u)$分别有$\|L^{A_{vu}^{+}}(v,u)\| < \varepsilon$，$\|(L-L_0)^{A_{vu}^{+}}(v,u)\| < \varepsilon$和$\|L_0^{A_{vu}^{+}}(v,u)\| < \varepsilon$。这样一来，对任一点$\forall v\in V(G)$有

$$\|L(v)\| = \left\|\sum_{u\in N_G(v)} L^{A_{vu}^{+}}(v,u)\right\| \le \sum_{u\in N_G(v)} \left\|L^{A_{vu}^{+}}(v,u)\right\| \le |N_G(v)|\varepsilon。$$

这样，当$t \geq N\left(\dfrac{\varepsilon}{|N_G(v)|+|N_G(u)|}\right)$时，对任意点$v,u \in V(G)$有

$$\begin{aligned}\|L(v)-L(u)\| &\leq \|L(v)\|+\|L(u)\| \\ &< (|N_G(v)|+|N_G(u)|) \times \frac{\varepsilon}{|N_G(v)|+|N_G(u)|}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即方程(10.34)中的变量$\mathbf{x}_v$对任意节点$v \in V(G)$同步。反之，如果算子方程(10.34)中的变量$\mathbf{x}_v$对任一点$v \in V(G)$是同步的，即对任一给定的正数$\varepsilon > 0$，存在一个正数$N(\varepsilon)$使得$t \geq N(\varepsilon)$时，对任意点$v,u \in V(G)$有$\|L(v)-L(u)\| < \varepsilon$，即$\lim\limits_{t\to\infty} L(v) = \lim\limits_{t\to\infty} L(u) = \mathbf{v}_0$。不失普遍性，记为$\lim\limits_{t\to\infty} G^L[t] = G^{L_0}$，则有

$$\begin{aligned}\left\|G^L - G^{L_0}\right\| &= \sum_{(v,u)\in E(G)} \left\|\left(L^{A^+_{vu}} - L_0^{A'^+_{vu}}\right)(v,u)\right\| \\ &= \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} \|(L-L_0)(v))\| \leq \frac{|G|}{2}\varepsilon,\end{aligned}$$

即流元$G^L[t]$是G-同步的。这样，就得到一个流元$G^L[t]$是G-同步的当且仅当算子方程(10.34)中的变量$\mathbf{x}_v$对任意节点$v \in V(G)$是同步的结论。

这样，定义$\Delta = G^L[t] - G_0^{L_0}$，如果$G^L[t]$是$G$-同步于$G_0^{L_0}$，则$t\to\infty$时有$\|\Delta\| = \left\|G^L - G^{L_0}\right\| \to 0$，记$\Delta$为$\mathbf{O}(t^{-1}G)$，即边上向量为关于$t$的高阶无穷小，则类似于单个基元的同步轨道，一般地有

$$G^L[t] = G_0^{L_0} + \mathbf{O}\left(t^{-1}G\right), \tag{10.39}$$

注意，(10.39)式可用于一般地构造G-同步流元$G^L[t]$。

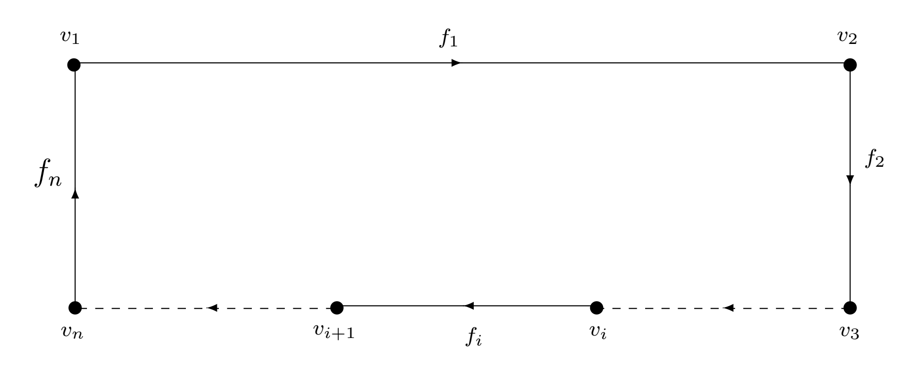


图10.17 圈C_n上的G-同步

例如，对图10.17中的圈C_n定义边端算子$A^+_{v_iv_{i+1}} = 2$, $A^+_{v_iv_{i-1}} = 1$，且对任一整数$1 \leq i \leq n$，定义边向量

$$L:\ (v_i, v_{i+1}) \to \frac{(2^{i-1}-1)\,F(t)}{2^{i-1}} + \frac{n!}{2^{i-1}t^2},\quad F: t \to \mathbb{R},$$

记所得流元为$G^L[t]$。相应地，G^{L_0}中的边向量定义为$f_i=\frac{(2^{i-1}-1)\,F(t,\mathbf{x})}{2^{i-1}}$,则$\Delta=G^L[t]-G^{L_0}=G^{L_\Delta}$。这里，对任一整数$1\leq i\leq n$，当$t\to\infty$时有$L_\Delta(v_i,v_{i+1})=n!/2^{i-1}t^2\to 0$，即$\Delta=\mathbf{O}(t^{-1}C_n)$，由(10.39)式知$G^L[t]$为一个$G$-同步流元且节点向量标号均为$F(t)$，即$C_n$上的节点同步，这与主函数法判断的结论不同。那里，是从图结构上分析节点变量的同步，结论是C_n上的节点变量$\mathbf{x}_v$同步的可能性极小。

第5节 系统力学

任何一件事物T状态的变化都可视为一种力学行为。在这一点上，质点力学将一个物体M抽象为一个有质量但没有体积或形状的质点M，假设作用于质点系的外力和系统内非保守力对质点系作功的代数和等于质点系机械能增量，并在此基础上刻画质点系的变化特征和规律；刚体力学假设一个物体T为刚体，在运动中或受力作用后大小和形状不变，进而刻画物体的变化特征与规律，这两者都是认知宏观物体的理想模型。现代科学中，场论是将一件事物T抽象为某种物理量，如标量或向量且假设其在整个空间上的分布，称为场，进而认知事物T的变化特征和规律。与宏观物体不同，场是一种看不见、摸不着的客观实在，如引力场、电磁场，以及图10.18中所示的地磁场等，实则是事物作用效应的外在表现。这当中，质点力学和刚体力学基于事物的确定性和可知性，对宇宙中的非均匀系统，如生物群体或细胞组织的认知束手无策；场则是一种对事物基元间作用效应的系统认知，对宇宙中那些超出人观测能力的事物，如宇宙本体、微观粒子等事物的认知中表现出了强大功用。同样地，某一物理量或作用效应在空间$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$上无处不在是一种理想假设，与粒子划分及其作为物质基本单元构成的思想并不匹配。

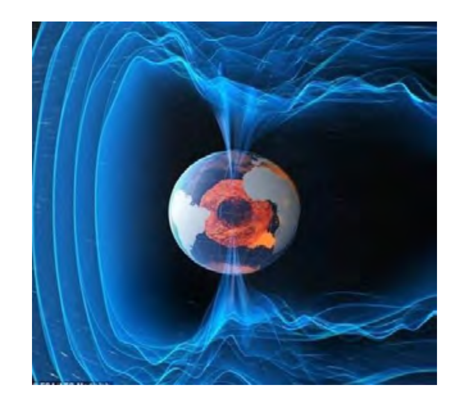


图10.18 地磁场

这样，一种自然的想法是基于事物内蕴结构或流元G^L的动态行为构建*系统动力学*，认知事物状态及变化。对此，欧阳博士解释说，一件事物状态的变化是一种客观实在，对应于其内蕴结构G^L上的基元及基元间作用的变化，是一种动力学过程，可以进行动力学模拟。对此，经典力学中的质点力学、刚体力学或场论等都是对某类事物或事物某种局部特征的刻画，人对事物状态或行为的认知需要有这样一种系统理论。同时，流元G^L作为Banach流空间$\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$中的向量，可以系统模拟基元及基元间作用的动态行为，无需将事物抽象为质点或是假设事物是一个刚体，也无需区分

事物是一个宏观物体还是微观粒子，而是在事物内蕴组合结构G^L上构建动力方程刻画事物状态的变化，是一种刻画事物状态变化的系统理论。

那么，应怎样在事物内蕴结构G^L上构建系统动力学呢？欧阳博士解释说，在牛顿第二定律基础上，经典力学针对质点运动有一个方程，称为Lagrange方程，后被人推广到引力场、量子场上导出爱因斯坦引力场方程和一些量子方程，成为一个一般性的动力学方程。一个流元G^L代表的，是一个事物T在内蕴结构上的表现实在，理论上，无论是将事物T视为一个质点系还是一个场，都可以应用Lagrange方程推导流元G^L遵从的力学规律，构建系统动力学。

5.1.Lagrange方程. Lagrange方程是在牛顿第二定律基础上，对场作用效应的一种刻画。我们知道，一个质量为m的质点A在一个势能为$\mathcal{V}(\mathbf{x})$的保守力场$\mathbb{R}^n$作用下的运动方程$\mathbf{F}=m\ddot{\mathbf{x}}$，写成分量形式为

$$\left(-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_1},-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_2},\cdots,-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_n}\right)=(m\ddot{x}_1,m\ddot{x}_2,\cdots,m\ddot{x}_n)。\tag{10.40}$$

这里，$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，作用力$\mathbf{F}$在$\mathbb{R}^n$中的第$i$个分量为$\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_i}$，$1\leq i\leq n$。对(10.40)的两端用微分向量$d\mathbf{x}=(dx_1,dx_2,\cdots,dx_n)$做内积，得到

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_i}dx_i=\sum_{i=1}^{n}m\ddot{x}_i dx_i\ 。\tag{10.41}$$

现在，假设$\mathbf{q}=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$是质点$A$在时刻$t$的广义坐标，即对任一整数$1\leq i\leq n$有$x_i=x_i(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，则有

$$dx_i\ =\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}dq_k,\tag{10.42}$$

这样一来，

$$\sum_{i=1}^{n}m\ddot{x}_i dx_i\ =\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}m\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}dq_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}m\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}dq_k\ 。\tag{10.43}$$

另一方面，由(10.42)知

$$d\mathcal{V}\ =\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_i}dx_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}dq_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q_k}dq_k\ 。\tag{10.44}$$

将(10.43)和(10.44)代入到(10.41)中有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}m\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)dq_k=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q_k}dq_k\ 。\tag{10.45}$$

注意，dq_k，$k=1,2,\cdots,n$是相互独立的。这样，在等式(10.45)中必有

$$\sum_{i=1}^{n} m\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q_k},\quad k=1,2,\cdots,n。\tag{10.46}$$

由函数积的求导知

$$\sum_{i=1}^{n} m\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)-\sum_{i=1}^{n} m\dot{x}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\tag{10.47}$$

并代入到等式(10.46)中，则对任一整数$k=1,2,\cdots,n$有

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)-\sum_{i=1}^{n} m\dot{x}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q_k}dq_k。\tag{10.48}$$

注意，$\partial x_i/\partial q_k$与$\dot{q}_k$独立，有

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k,\quad \frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} &= \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\partial q_l}\dot{q}_l=\frac{\partial}{\partial q_l}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l=\frac{\partial}{\partial q_k}\dot{x}_i,\end{aligned}$$

代入(10.48)式中，有

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)-\sum_{i=1}^{n} m\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_k}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q_k}dq_k。\tag{10.49}$$

此外，已知质点A的动能$\mathcal{T}$为$\mathcal{T}=\dfrac{1}{2}m\mathbf{v}^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2$。这样，

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{n} m\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_k},\quad \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}_k}=\sum_{i=1}^{n} m\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k}\ 。\tag{10.50}$$

对(10.49)和(10.50)式进行比较，就有

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_k}=-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q_k},\quad k=1,2,\cdots,n.\tag{10.51}$$

注意，质点A是在一个保守力场$\mathcal{V}(\mathbf{x})$中运动，势能$\mathcal{V}(\mathbf{x})$与$\dot{q}_k$无关，故有$\partial\mathcal{V}/\partial\dot{q}_k=0, k=1,2,\cdots,n$。这样，定义质点$A$上的Lagrange量$\mathcal{L}=\mathcal{T}-\mathcal{V}$，则有

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}=\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_k}-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q_k},\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}=\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\dot{q}_k}$$

并代入到(10.51)式中，即有Lagrange方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n。 \tag{10.52}$$

那么，怎样认识Lagrange量与场论的关系呢？欧阳博士解释说，Lagrange量$\mathcal{L}$是一个描述物理系统状态或场的函数，即质点A的动能与点位上的势能差。这当中，动能$\mathcal{T}$的参数为广义坐标的导数$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n)$，势能$\mathcal{V}$的参数为广义坐标$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$和时间$t$。这样一来，Lagrange量$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$在$\mathbb{R}^{2n+1}$上的分布构成一个Lagrange场。故此，Lagrange方程(10.52)是质点在保守力场遵循的规律。

5.2.最小作用量原理. 最小作用原理反映的是自然事物演化中遵循的规则，即以最小的能量消耗维系其自身的生存、变化与发展，其表现形式采用的是泛函上的变分。那么，什么是泛函上的变分呢？欧阳博士告诉惠子，变分是函数微分在泛函上的推广。一般地，假设K是赋范空间$\mathscr{B}$中的一个闭集，函数$F: K \to \mathbb{R}$构成的集合记为$C(K)$，则一个泛函$J: C(K) \to \mathbb{R}$是将闭集K上的函数映射为一个实数，即函数的函数，记J为$J[F]$。这样，对任一个函数$F_0 \in C(K)$，泛函差$F(K) - F_0(K)$称为$F(K)$在$F_0(K)$处的变分，记为

$$\delta F(K) = F(K) - F_0(K)。 \tag{10.53}$$

例如，当闭集$K = [a, b]$ 为一个闭区间时，函数$F, F_0 \in C[a, b], x \in [a, b]$。这时，$F$的变分$\delta F = F(x) - F_0(x)$且满足$\delta F(a) = \delta F(b) = 0$。注意，微分算子$d/dt$是线性的。这样一来，有

$$\delta\frac{df}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{df_0}{dx} = \frac{d}{dx}\delta f,$$

即变分δ与微分d/dt运算次序可以交换而不影响结果。

一般地，人们根据对事物T的测量结果，采用变量x、因变量$y(x)$和导数$y'(x)$对T状态和行为进行刻画，即函数$F(x, y(x), y'(x))$。这时，对一个线性泛函

$$J[y(x)] \;=\; \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

计算泛函差$\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)]$，并将其泰勒展开式中的一次项，即

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y')dx。 \tag{10.54}$$

称为$J[y(x)]$的变分δJ。特别地，如果$F(x, y(x), y'(x))$是一个无穷可微函数，则有

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x, y(x) + \delta y(x), y'(x) + \delta y'(x)) - F(x, y(x), y'(x)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \cdots, \end{aligned}$$

即$F(x,y(x),y'(x))$的变分

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'。$$

这样，(10.54)式可以改写为

$$\delta J=\delta\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))dx=\int_{x_0}^{x_1}\delta F(x,y(x),y'(x))dx。\tag{10.55}$$

一般地，如果函数$F,y_i,y_i',1\leq i\leq n$可微，则泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')dx$$

的变分为

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\delta Fdx=\int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i'\right)dx。\tag{10.56}$$

注意，变分运算与微分运算规则类似，不过需要在变分运算中将微分d替换为变分符号δ。例如，对给定的泛函F,F_1,F_2，有

$$\delta(F_1+F_2)=\delta F_1+\delta F_2,\quad \delta(F_1F_2)=F_1\delta F_2+F_2\delta F_1,\quad \delta(F^n)=nF^{n-1}\delta F。$$

那么，一个线性泛函$J[y(x)]$在什么条件下能达到极大或极小值呢？欧阳博士告诉惠子，泛函达到极值与函数极值的条件很相像，不过需要采用变分δ取代微分d/dt，即一个线性泛函$J[y(x)]$如果在$y(x)$处达到极值，则变分$\delta J[y(x)]=0$。这是一个线性泛函达到极值的一般条件，适用于任一个由$F(x,y(x),y'(x))$刻画的场。特别地，Lagrange场上的$F(x,y(x),y'(x))$为$\mathcal{L}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))$。这时，泛函$J[\mathcal{L}(t)]$定义为Lagrange场上的作用量$\mathcal{S}$，即

$$\mathcal{S}\ =\ \int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))dt。\tag{10.57}$$

那么，在什么条件下Lagrange场的作用量最小呢？欧阳博士解释说，由线性泛函S达到极值的一般条件，即有如果一个Lagrange场的作用量$\mathcal{S}$达到最小则泛函$\mathcal{S}$上的变分$\delta\mathcal{S}=0$，称为最小作用量原理。这时，经过推导，Lagrange量满足的条件恰是Lagrange方程(10.52)，即

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}=0,\quad k=1,2,\cdots,n。$$

5.3.Lagrange流元方程. 如果将一件事物T系统模拟中的基元状态$\mathbf{x}_v[t]$视为基元v的场效应，那么，基元间v与u间的作用则表现为场$\mathbf{x}_v[t]$与场$\mathbf{x}_u[t]$间的作用效应，

即流元$G^L[t]$。另一方面，流元$G^L[t]$作为Banach空间中的一个向量，其刻画的恰是事物T的状态及变化，应当遵从最小作用量原理。这样，可对事物的动态行为进行系统刻画。例如，对人或动物体组成的自组织系统，基元v的状态由Lagrange场$\mathcal{L}(v)[t]$标定，基元v与基元u间的作用由Lagrange场v对场u的作用$\mathcal{L}(v,u)[t]$对边$(v,u)\in E(G)$标定。这时，任一个节点v上的作用遵从能量守恒定律，得到的恰是一个流元$G^{\mathcal{L}}[t]$。

那么，怎样对流元的动力学行为进行刻画呢？欧阳博士解释说，假设映射$\mathscr{L}:(v,u)\in E(G)\rightarrow\mathscr{L}\left[\mathcal{L}(t,\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))(v,u)\right]$可微泛函且与边端算子$A_{vu}^{+}$可交换，则由于$G^{\mathcal{L}}[t]$是一个流元，$G^{\mathscr{L}}\in\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$仍是一个流元。一个流元$G^{\mathscr{L}}[t]$上的作用量及其变分分别定义为

$$J\left[G^{\mathscr{L}}[t]\right]=\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}G^{\mathscr{L}[\mathcal{L}(t,\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))]}dt\right|,\quad\delta J\left[G^{\mathscr{L}}[t]\right]=\left|\delta\int\limits_{t_1}^{t_2}G^{\mathscr{L}[\mathcal{L}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))]}dt\right|。\tag{10.58}$$

这里，变分$\delta:\mathscr{G}_{\mathscr{B}}\rightarrow\mathscr{G}_{\mathscr{B}}$为一个$G$-同构算子。由变分运算规则，有

$$\begin{aligned}\delta J\left[G^{\mathscr{L}}[t]\right]&=\left|\delta\int\limits_{t_1}^{t_2}G^{\mathscr{L}[\mathcal{L}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))]}dt\right|\\&=\left|G^{\delta\int\limits_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}[\mathcal{L}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))]dt}\right|=\left|G^{\int_{t_1}^{t_2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i dt}\right|。\end{aligned}\tag{10.59}$$

这时，由最小作用量原理有$\delta J\left[G^{\mathscr{L}}[t]\right](v,u)=0$和Banach流空间上范数的性质，知对任一边$(v,u)\in E(G)$有

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\bigg|_{(v,u)}\right)\delta q_i dt=0。\tag{10.60}$$

注意，$\delta q_i, 1\leq i\leq n$是相互独立的。这样，(10.60)式成立的条件是其中δq_i的系数均为0，即对任一边$(v,u)\in E(G)$有

$$\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\bigg|_{(v,u)}=0,\quad 1\leq i\leq n。$$

这样，欧阳博士告诉惠子，就得到流元$G^{\mathscr{L}}[t]$上的Euler-Lagrange方程

$$\frac{\partial G^{\mathscr{L}}}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial G^{\mathscr{L}}}{\partial\dot{q}_i}=\mathbf{O},\quad 1\leq i\leq n。\tag{10.61}$$

特别地，对任一边$(v,u)\in E(G)$在方程(10.60)中取$\mathscr{L}:(v,u)\rightarrow\mathcal{L}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))$得到Lagrange场上的流元方程

$$\frac{\partial G^{\mathcal{L}}}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial G^{\mathcal{L}}}{\partial\dot{q}_i}=\mathbf{O},\quad 1\leq i\leq n。\tag{10.62}$$

注意，欧阳博士解释说，(10.62)式是Lagrange场上流元$G^{\mathcal{L}}[t]$的Euler-Lagrange方程。一般地，流元$G^{\mathscr{L}}[t]$的动态行为遵从方程(10.61)。例如，定义一个独立于边$(v,u)\in E(G)$的Lagrange量

$$\mathscr{L}\left[\mathcal{L}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))\right](v,u) \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_i\dot{q}_i^2 - \sum_{1\le i\ne j\le n} c_{ij}q_iq_j,$$

则有

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i} \;=\; 2c_i\ddot{q}_i - \sum_{j\ne i} c_{ij}q_j。$$

这时，由方程(10.61)得到n个微分方程

$$\begin{cases} 2c_1\ddot{q}_1 - \sum\limits_{j\ne 1} c_{1j}q_j \;=\; 0, \\ 2c_2\ddot{q}_2 - \sum\limits_{j\ne 2} c_{2j}q_j \;=\; 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ 2c_n\ddot{q}_n - \sum\limits_{j\ne n} c_{nj}q_j \;=\; 0。\end{cases}$$

那么，Euler-Lagrange方程在什么条件下退化为Lagrange方程(10.52) 呢？欧阳博士告诉惠子，一般地，流元$G^{\mathcal{L}}[t]$上的Lagrage 量$\mathcal{L}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))$有赖于边$(v,u)\in E(G)$。但如果$\mathcal{L}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))$不依赖$G$中的边，即各边$(v,u)\in E(G)$上的Lagrage量一致，则方程(10.62)退化为Lagrange方程(10.52)。这时，各节点变量$\mathbf{x}_v$在$t\to\infty$时趋于同一个变量$\mathbf{x}$，即流元$G^{\mathcal{L}}[t]$是G-同步的。换言之，Lagrange方程(10.52)刻画的是各基元$v\in V(G)$上变量$\mathbf{x}_v$同步的系统动力学行为。特别是，一个质量为m的质点A在保守立场中的动力学行为。

既然流元$G^{L}[t]$在系统认知一件事物T中有着这样重要的作用，惠子有些疑惑地问欧阳博士：“那这样一来，是不是方程(10.61)或(10.62)可以刻画任一事物T的动力学行为，构建人类对万物认知的统一理论了呢？”理论上可以这样认为！欧阳博士解释说，但人们至今也没有发现一种确定Lagrange量的统一方法，仅是对保守力场由$\mathcal{L}=\mathcal{T}-\mathcal{V}$的定义确定Lagrange量，对其他类别的物理场，人们在多数情形是依模型特点用技巧拼凑$\mathcal{L}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))$，甚至在任一个物理场上是否一定存在Lagrange量$\mathcal{L}$也仍是一个未解决的问题，并不代表自然真实一定如此。即便如此，方程(10.61)或(10.62)的确为系统认知事物T的状态与变化行为提供了一个理论框架，这在哲学上，一定程度上蕴意着人类对万物真实的认知永无止境，需要不断地去探索与发现。

第6节 注释评论

6.1. 网络流应用于事物认知需要进一步推广，因其节点、边上标号为实数而事物的发展往往是多维度的。2014年，完成非数学上的数学[Mao31]那篇富有哲学意味的综述后，我将网络流边上的流量替换为向量，要求其在任一节点上流入与流出的向量相等，称为G-流，并尝试着刻画网络流节点和边不发生变化的情形下网络流的整体变化，在线性空间上推广网络流。这时，网络流的变化与向量变化类似，只不过是在向量的分量间存在一种固定的组合结构G且可以证明，如果网络流边上的向量属于同一个Banach或Hilbert空间，则这样的网络流也构成一个Banach或Hilbert空间，并可以类似于泛函分析，见文献[Con]和[GZF]中的做法，在其上引入线性算子与线性泛函，推广泛函分析中的一些著名结论，如不动点定理、Fréchet-Riesz表示定理等。特别地，当边流量为Hilbert空间中的元时可以在其上引入微分、积分运算，讨论代数方程、一些经典的偏微分方程，如波动方程、热传导方程的组合解等，这就是发表后很短时间内就有人引用的开创性论文[Mao33]。

6.2. 网络流刻画事物真实的局限不单是其节点、边的标号为实数，还表现在其组合结构G在演化过程中固定不变，以及对任一节点，边上的输入流与在节点上的观测量一致，这不完全符合物质，特别是微观物质的输运状况。2015年，应邀出席印度加尔各答数学会（亚洲第一、全球第十三个数学会）组办的"全国数学与数学科学进展趋势学术交流会"(NCETMMS-2015，2015年12月17-19日)作Plenary报告前，我将此前研究过的非均匀系统的组合解与G-流进行了统一思索，从事物的系统认知出发，在G-流上引入边端算子，即边上的流经算子作用后在节点遵从物质守恒定律，对应于基元的状态方程，即文献[Mao38]引入的，后在文献[Mao38]-[Mao54]中讨论的连续流。对应地，非均匀系统的组合解不过是双向图上的连续流。同时，为模拟物质演化中基元的变化问题，由图的并、差运算引入连续流上的加法、点乘和数乘运算，并将连续流整体视为一个数学元。这样，连续流的节点可视为系统的基元，边上的流刻画基元间作用量的大小，边端算子为作用量在被作用基元端的映射或变换。与网络流类似，得到连续流的Banach或Hilbert流空间，并在其上推广泛函分析中的不动点定理、连续映照定理、闭图像定理和Hahn-Banach定理等，且量子力学中的量子假设为有内蕴结构时不会影响量子力学中对微观粒子的行为假设，可以进一步刻画粒子行为，见文献[Mao34]、[Mao36]、[Mao45]和[Mao48]等。这当中，[Mao45]是自提出数学组合猜想到2017年截至，我发表的组合思想及认知自然真实的一系列论文，从中可以看出我的数学哲学观，文献[Mao34]和[Mao36]中对微观粒子的认知观点后为Jean de Climont编辑的大型科学手册《*The Worldwide List of*

Alternative Theories and Critics》（2018版）所收录，见文献[Cli]。

平衡流是连续流的一种特殊情况，即节点、边上的标号为复向量的情形。如果取复向量的虚部为**0**，则平衡流退回到一般实向量标号的连续流，但按照中国古哲学，平衡流具有生命意义，可应用于刻画“阴阳平衡”的生命体。平衡流的提出见文献[Mao46]，是源于我2018年7月到8月生病期间，研读《黄帝内经.素问》和《黄帝内经.灵枢经》产生的感悟，发现中医理论中的人体十二经脉学说恰是一种平衡流，为2015年我在[Mao38]中定义的连续流找到中国古人的一个应用实例。

6.3. 类似于网络流微积分，Hilbert空间上连续流的微积分运算是在[Mao42]-[Mao43]、[Mao49]和[Mao51]中构建的。这当中的一个基本问题，是作用于连续流上的算子与一般Banach空间元的算子是否一致？答案是否定的！因为作用于连续流上需要保持组合结构，即文献[Mao51]中定义的G-同构算子。



世途倚伏都无定，尘网牵缠卒未休。

— 唐.白居易《放言五首》

$C_{\mathscr{M}}$
万物组合

第 11 章
华人识物

****

大风泱泱，大潮滂滂。
洪水图腾蛟龙，烈火涅槃凤凰。
文明圣火，千古未绝者，唯我无双；
和天地并存，与日月同光。
中华文化，源远流长；
博大精深，卓越辉煌。
信步三百米甬道，阅历五千年沧桑。

— 朱相远《中华世纪坛序》

第1节 天人合一

人在对事物的认知中，是人在对事物进行认知，是人基于对事物可为人感知的个别属性或特征，经由大脑的感觉、知觉、记忆、思维和想象等形式，形成对事物的概念“名”或性质、关系以区别于其他事物。这当中，人是认知的主体而事物是客体。那么，什么是天人合一呢？欧阳博士解释说，“天人合一”是中国古哲学中关于人与自然关系的一种学说，认为人与天构成一种共生的二元生态系统，以强调天道与人道、自然与人为的相对和统一关系，体现在中国古哲学代表《易经》中天、地、人三者间的辩证关系，以纯阳、纯阴的乾、坤两卦为基，如图11.1所示，融合各爻的阴阳变化，演绎出六十四种卦象模拟事物状态及变化规律，是中国古哲人对宇宙万物状态变化规律的认知。这在今天看来，是对万物状态演化的一种系统认知。

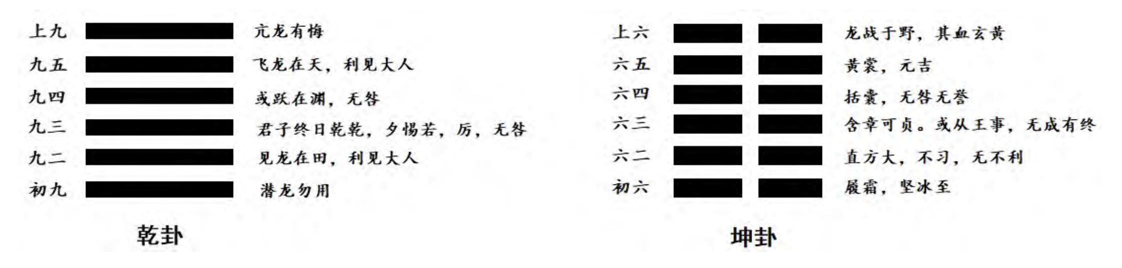


图11.1 乾坤卦象

这当中，乾卦纯阳象征天或自然变化态势，象征宇宙“天行健”万物“阳”的一面，即刚健、中正和自强不息；坤卦纯阴象征大地“地势坤”万物“阴”的一面，即柔顺和包容，滋养万物在大地上生长。孔子在其为《易经》作的《象传》中，概括为人效法天道应是“天行健，君子以自强不息”，因为乾卦的态势是“刚健中正，纯粹精也”，即促使事物变化的一股刚健、居中且守正的事物元气；效法地道应是“地势坤，君子以厚德载物”，因为“坤”字代表事物变化阴柔的一面，即“坤道其顺乎，承天而时行”，象征顺应、顺承宇宙法则行事，是在概括人效法天道、地道应有的处事品德，即人应效法天道、地道修德，一方面应像天一样，自我不断地追求进步，刚毅坚卓、发奋图强；另一方面应象大地一样，增厚美德、包容万物，因为只有这样，人类才能生生不息地与宇宙共存。

这时，惠子心中仍有些疑问，问欧阳博士：“既然人与自然构成一个二元生态系统，那么，人在这个二元系统中处在什么位置上呢，是与自然平起平坐吗？”欧阳博士回答说，如果人与自然处在一种平起平坐的角色，在二元系统中与自然就是一种相互影响、相互作用的角色，可以呼风唤雨、操控自然。可实际上，即便是生活在

地球上，人类对地球自转与公转速度，以及地球上的四季交替都影响不了，但自然的任何一次异常活都对人类的影响极大。例如，地震或海啸。这说明了什么？说明人在自然中地位是如此的渺小！惠子又问："既然人对自然的影响，即便是对地球的作用也是微乎其微，甚至可忽略不计，那不是可用一元系统刻画人与自然的关系吗，又为什么要强调人与自然是二元系统呢？"欧阳博士解释说，这当中，自然对人类的影响是即时发生的，但人类对自然的影响则是一种延迟现象，是在人类对自然的影响累积到一定程度后才会启动自我调节，但这时带给人类的一定是自然灾害。为此，中国古人说天人合一或人与自然构成一个二元系统，如图11.2所示地球上的生态系统，旨在强调人类可持续发展需要顺应自然，按万物生存之道效法自然行事，即老子《道德经》中主张的"无为"而治，即"道"在人身上的体现"德"。注意，老子讲的"道德"是宇宙万物的"道德"，孔子讲的"道德"是"人德"，与老子讲的"道德"不同。这当中还有两个问题需要解决，一是自然或万物的生存与发展之道，二是人类生存与发展的自我约束。惠子听后有些感悟，问欧阳博士："这里的第一个问题不就是正是科学的宗旨吗？"欧阳博士告诉惠子，第一个问题核心在于对自然真实的认知，可以视为是科学的宗旨！但时至今日，人类构建的大多科学体系是对自然某些规律的局部认知或条件成立，且大多忽略了人的因素，特别是应用这些成果时忽略其条件造成对自然影响的累积效应。例如，这些年一些城市雾霾的频繁出现，与近三百多年来人类生产和生活中二氧化碳的超量排放不无关系，而雾霾频繁现身恰是自然的一种自我调节，重回人与自然和谐共存的过程。惠子仍有些疑惑，问欧阳博士："这里说的'超量排放'是什么意思？"欧阳博士告诉她，这里的"超量排放"是指超过自然界中的"光合作用"等自然消纳二氧化碳量的上限排放。人类并不清楚这个上限值是多少，仅是按照人类的认知和对各类地球资源的普查有一个估值。惠子点了点头又问："那么，人在与自然协调共生中又怎样做到自我约束呢？"欧阳博士解释说，这正是中国古哲学解决的问题，体现在老子《道德经》第二十五章中的"人法地，地法天，天法道，道法自然"，即人道受地球的制约，需效法地球、效法天、效法道，直至效法自然行事，"修身养德"进行自我约束，因为"自然"承载"道"的本体，"道"是自然展现出来的规律或表象。



图11.2 地球生态系统

1.1.中国古哲学宇宙观. 中国古哲学中的"天"即"宇宙"或"万物"。这当中，"人"虽然是认知的主体，但仍包含在这里的"万物"之中。老子《道德经》中的"道"即是宇宙、自然或万物含有的生成或运行法则，不能用某一个或某一类事

物运行规则取代。那么，在中国古哲人的心中，宇宙是怎样形成的，又是怎样一幅图案呢？欧阳博士解释说，关于宇宙的形成，老子在《道德经》第四十章中概括“天下万物生於有，有生於无”。这里，“有”和“无”是人类的感知，即人类感知到的为“有”，感知不到的为“无”，意思是天下万物由人类感知而存在，是因人类感知而无中生有。对天下万物这种“无中生有”的生成之道，《道德经》第四十二章中进一步刻画为“道生一，一生二，二生三，三生万物”，如图11.3 所示。

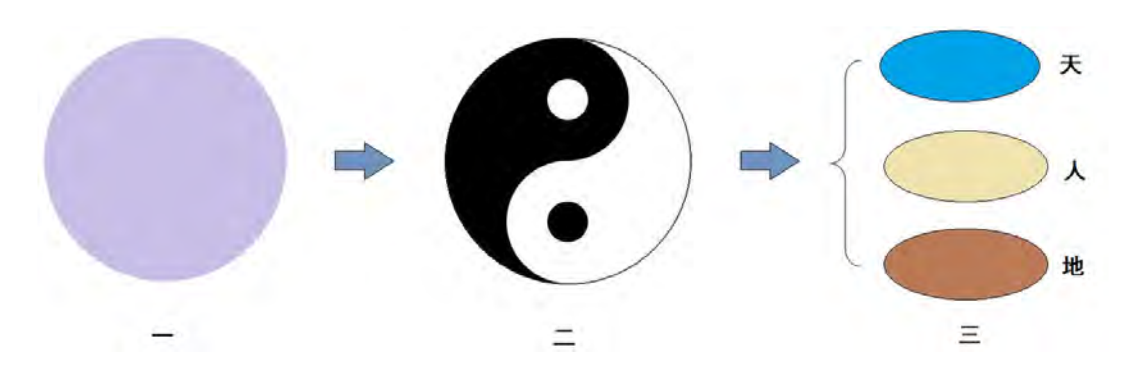


图11.3 万物生成图

那么，为什么宇宙创始遵循“道生一，一生二，二生三，三生万物”的演化规则呢？欧阳博士解释说，这是老子在哲理上为宇宙创世画的一幅演化图，因为人是在“三生万物”环节中产生的，不可能跳到宇宙外观测创世过程，只能是先立一个“道”生出“一”即混沌宇宙，由“一”推演“二”即体现“清浊”的阴阳宇宙，再由阴阳宇宙“二”推演“三”生出宇宙万物。这当中，“一、二”和“三”在老子为宇宙创世绘出的图景中的含义如下：

（1）“道生一”中的“一”属于人理性认知万物中“无中生有”的结果，是人对宇宙原初状态认知的起点，因为“天下万物生于有”，“一”是人理性认知“有”的起点，即宇宙原初的一种混沌状态，因为“人”处在“三生万物”的“万物”之中。那么，这个“一”处在一个什么样的状态呢？欧阳博士解释说，自然作为“道”的承载体，既然是“道生一”，其从无到有展现出人类可知的宇宙状态正是“一”，可以经由老子对“道”的描写把握。对此，《道德经》第二十一章是这样描写的：“道之为物，惟恍惟惚。惚兮恍兮，其中有象；恍兮惚兮，其中有物。窈兮冥兮，其中有精；其精甚真，其中有信”，意思是“道”作为一种自然“物”表现为飘忽不定、稍纵即逝。惚惚恍恍中可感知到一定的形象，恍恍惚惚中又涌现出一些实物，幽冥晦暗中出现一些精微之气，既纯真又飘渺，让人深信“道”的存在，这同时是在人的认知范围内人对宇宙创世之初的形象刻画，即是“惟恍惟惚”与“恍兮惚兮”的飘忽不定，并非是一个人可以感知或确定的形象物。同时，“道生一”并非是在空无一物状态下的“生”而是“其中有物”的生，只是有点“恍兮惚兮”，即不确定或混沌。对此，《道德经》

第二十五章中的"有物混成，先天地生。寂兮寥兮，独立不改，周行而不殆，可以为天下母"进一步描写"一"的状态，即是"有物混成"而非空无一物。同时，"一"是"先天地生"，因为天地是"一生二"后的产物。这当中，"寂兮寥兮，独立不改，周行而不殆，可以为天下母"进一步描写人类可知宇宙在"一"的状态，即在清虚寂静中按"道"恒久地运行，演化出宇宙万物。

（2）"一生二"中的"二"即中国古哲学中的"阴阳观"或太极图，是事物演化中的"正反"两个方面的势力。那么，宇宙为什么会由混沌状态演化成阴阳态呢？，中国古哲学认为任何一件事物的演化源于事物中的阴阳两种势力或"矛盾"，是事物中的阴阳在推动事物演化，又称为事物演化的"原动力"或"道"。对此，老子在《道德经》第四十章中的"反着道之动"中指明这种阴阳间的循环往复，即太极图中蕴含的哲学思想是事物演化的内因，第七十七章"天之道，损有余而补不足"指明天道的运行规律是"损有余而补不足"，维持宇宙演化中的协调或平衡发展。《道德经》第四十二章中"道生一，一生二，二生三，三生万物"后面紧跟着的是"万物负阴而抱阳，冲气以为和"，旨在指明任何一件事物中存在正反两个方面，正面向阳而背面为阴，事物是在阴阳二气的互相激荡、作用中的一种和谐统一体。

（3）"二生三"中的"三"并非数学中的"三"，中国古哲学中的"三"是多数的一种泛指，即"三及三以上的多数"，包括人类自己，即人的产生不是在"一"或"二"而是在"三"中，是随着"万物"的产生而出现的。这表明，人类对万物的产生只能经由假说理性认知，不可能得到实在证明。中国古哲学认为"人聚天地之灵气"，万物的产生不能没有人的身影。中国古文化中有个"盘古开天地"的传说，认为盘古出生在宇宙处在混沌即"一"的状态，是盘古拔下口中一颗牙齿并将其变为一把神斧抡着砍向混沌宇宙，使其一分为二，轻者上升形成天，浊着下落结为地，盘古则站在中间，即顶天立地。后女娲造人，在宇宙中形成天地人或"三才"的格局，即图11.3中"三"对应情形。类似地，中国道教中的"三清圣人"，即元始天尊、灵宝天尊和道德天尊是宇宙创世中"一、二"和"三"环节中的神，三位天尊分别掌管着道生一、一生二和二生三的过程。注意，图11.4中三位天尊的排序是按中国古文化由右到左的排序规则。这当中，道德天尊的化身即是人间的老子，因为道教认为老子传下道家经典《道德经》，是一位"天尊"但在人间行走，指点了道教的创立，故尊奉其为道教的太上教主。







图11.4 三清圣人

那么，"老子《道德经》中的'三生万物'是怎样的一种'生'，又是经由什么途径的'生'呢？"《道德经》第六章中的"谷神不死，是谓玄牝。玄牝之门，是谓天地根。绵绵若存，用之不勤"刻画的正是"三生万物"的过程和方式。这当中的"谷神"指"道"物的属性即"自然"，因为"道"虚无缥缈称其为谷，因其蕴育着万物演化的规则且持之以恒，故称为"谷神不死"；"玄牝"中的"玄"字作元始、元来、根元中的"元"字解释。这样，"三生万物"类似于生物繁衍的过程，即天地中存在一个类似的生殖器，称为"玄牝"在那里生生不息地繁衍着宇宙万物。在此之后，万物按《道德经》第十六章中的"夫物芸芸，各复归其根"，即万物虽然种类、数量繁多但均是在以"落叶归根"的模式"循环往复"回归其原初态繁衍以维持续物种的延续。

欧阳博士告诉惠子，理论物理学中"宇宙大爆炸说"遵循的正是老子的"道生一，一生二，二生三，三生万物"这种朴素的演化规则，只不过是将混沌宇宙"一生二"的过程中，"一"如何生"二"假说为在"一"中发生了一次"不明原因"的宇宙大爆炸，按大爆炸这种常人能理解的情形为时间起点，并假想在大爆炸后最初的几秒原初宇宙在空间上的暴涨、伴随着爆炸温度下降强作用、弱作用和电磁作用的分

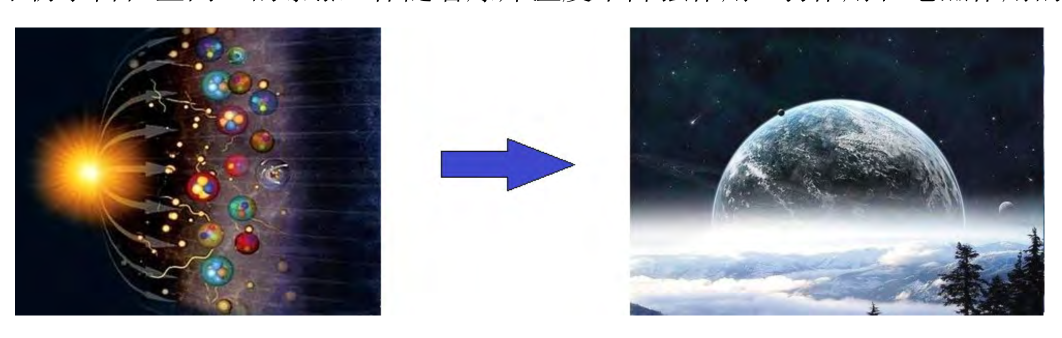


图11.5 大爆炸创生万物

离、基本粒子、反粒子的碰撞和能量转化，即生"三"，进而按不同类别物的"道"组合成原子、分子和天体，演化出生命等"芸芸众生"，再现"三生万物"的物理组合过程。但是，欧阳博士告诉惠子，宇宙大爆炸说中仍有一个问题无法自圆其说，即大爆炸所依赖的那个混沌宇宙'一'从何而来？答案仍只能是老子的"道生一"，因为"一"是人认知宇宙的起点。这一点同时表明，宇宙大爆炸说及其衍生的一些创世学说，是在人的可知范围内还原宇宙万物的演化过程，是人对宇宙创世的理解与认知，这在一定程度上造成了人类无法对宇宙大爆炸前的状态进行认知，即大爆炸之前的宇宙状态是什么样子，是一个直径无限小的质点还是充满人类不可知物的空间或球体等超出了人类的认知能力的问题，可能除假说外永远没有答案。

这时，惠子心中对老子的"三生万物"和"宇宙大爆炸说"中的"阴阳"产生一个疑惑，问欧阳博士："爸爸，'阴阳观'不是中国古哲学的基础吗，可在'三生万物'环节和'宇宙大爆炸说'中好像都没有体现出来呢？"欧阳博士对惠子能想到这个问

题表示赞许，解释说按老子《道德经》中的哲学思想，宇宙在“道生一，一生二，二生三，三生万物”创生中由“一生二”出现“阴阳”后，并非仅是由“阴阳”即“二”生出“三”了事。这当中还有两个“生”的蕴意：一是“阴阳”即“二生三”或者形象一点是由阴阳生出“天地人”即三才，进而“三生万物”；二是在宇宙创生中，“阴阳”贯穿于“二”之后的每一个环节或任一事物产生和变化之中。为什么这样说呢？欧阳博士解释说，因为“二生三”的本意是“阴阳”体现在“三”中每一部分的构成中，即天、地、人中均有“阴阳”两种势力促使其变化，对应地，由此演化出的万物中也必然存在“阴阳”两种势力推动着事物的变化，以实现《道德经》第四十二章万物创生中的“万物负阴而抱阳，冲气以为和”状态，以及事物“反者道之动，弱者道之用”的变化原动力，即事物的正反两个方面中的弱者总是在顺应强者中运动并在顺应中逐渐强大，循环往复以至无穷，按《道德经》第七十七章中“天之道，损有余而补不足”的规则运行。

那么，宇宙大爆炸说中是否融入了中国古哲学中的阴阳观呢？答案是否定的！欧阳博士告诉惠子，宇宙大爆炸说中，虽然体现了老子的宇宙由“一”到“三”的演化过程，但并没有柔入中国古哲学中的阴阳观，无法解释事物变化中的原初动力问题。中国古哲学中的阴阳观可采用向量进行定量刻画。这时，假设向量$\mathbf{v}^-$表示一件事物T变化中的“阴势力”，$\mathbf{v}^+$表示事物变化中的“阳势力”。这样，按中国古哲学的观点，推动事物T变化的动力为满足$\mathbf{v}^- + \mathbf{v}^+ = \mathbf{c}$，即阴阳势力的和为一个常向量$\mathbf{c}$，$\|\mathbf{c}\|$为太极图对应球$\mathbb{B}^n, n \geq 1$的直径。这里，$n$为在时刻$t$已知的事物$T$的特征$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$的个数。这样，“事物$T$如融入了中国古哲学中‘阴阳观’的认知模型是什么样子呢？”一般地，欧阳博士解释说，系统认知事物T的模型是一个连续流G^L，而融入了“阴阳”两种势力后，事物T的认知恰是第10章第2节流元模型中的平衡流G^{L^2}，即对任一点$v \in V(G)$、边$(v,u) \in E(G)$有$L^2 : v \to L(v) + iL'(v)$，$L^2 : (v,u) \to L(v,u) + iL'(v,u)$且满足$L(v) + L'(v) = \mathbf{c}_v \in \mathscr{B}$和$L(v,u) + L'(v,u) = \mathbf{c}_{vu} \in \mathscr{B}$。这里，$\mathbf{c}_v$和$\mathbf{c}_{vu}$为Banach空间$\mathscr{B}$中的常向量。

1.2.天人合一场方程. 将“天”和“人”视为场，则中国古哲学中的“天人合一”可以采用一个2阶完全图K_2上的标号图，即二元系统K_2^L刻画。这里，假设完全图K_2的顶点集$V(K_2) = \{v, u\}$，边集$E(K_2) = \{(v,u), (u,v)\}$，标号映射$L$将点$v, u$分别映射为一个场$\mathcal{F}$中的元$L(v)$和$L(u)$，且元$L(v)$和$L(u)$间的作用$L(v,u) = -L(u,v)$，

图11.6 二元系统作用

即$L(v)$和$L(u)$间的作用呈反对称态，则该二元场的作用与方程(10.31)类似，为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_v &= L^{A^+_{uv}}(u,v) - L^{A^-_{uv}}(v,u), \\ \dot{\mathbf{x}}_u &= L^{A^+_{vu}}(v,u) - L^{A^-_{vu}}(u,v)。 \end{cases} \tag{11.1}$$

注意，方程(11.1)是在系统$\mathcal{F}$外观测$\mathcal{F}$中的两个相互作用元v,u的算子方程。这当中，元v,u的状态及变化不依赖于人的观测。例如，在猫和老鼠构成的二元系统中，用x_v,x_u分别表示猫和老鼠的种群规模，则猫和老鼠的种群规模不因人的观测而改变，对应的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_v &= x_v(-\mu + cx_u), \\ \dot{x}_u &= x_u(\ \lambda\ - bx_v)。 \end{cases} \tag{11.2}$$

即在图11.6中，节点标号$L(v)=\dot{x}_v, L(u)=\dot{x}_u$，边$L(v,u)=x_v$，$L(u,v)=x_u$，边端算子$A^+_{uv}=cx_v, A^-_{uv}=\mu$，$A^+_{vu}=\lambda, A^-_{uv}=bx_u$。这里，$-\mu$是猫在没有老鼠时的平均增长率，$\lambda$是老鼠在没有猫时的平均增长率且$b$和$c$均为常数。

那么，在“天人合一”系统中是否可以套用方程(11.1)给出系统状态方程呢？答案是否定的！欧阳博士解释说，这时，人作为观测者处在系统之中，如图11.7所示。这样一来，观测结果受人观测行为的影响仅是一种近似值。严格意义上说，只能刻画“天人合一”这个二元系统的状态变化。这时，假设元$L(v)$和$L(u)$处在一个Lagrange场中，Lagrange量为$\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$，则从时刻$t_1$到$t_2$该二元系统上的作用量



图11.7 天人合一场

$$J\left[K_2^L[t]\right] = \left|\int_{t_1}^{t_2} K_2^{\mathcal{L}}[t]dt\right|, \quad L(v,u) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \tag{11.3}$$

且取边端算子$A^+_{uv} = A^-_{uv} = A^+_{vu} = A^-_{vu} = 1_{\mathscr{B}}$。这样，由最小作用量原理，知变分$\delta J\left[K_2^L[t]\right]=0$，系统$K_2^L[t]$在Lagrange 场中的Euler-Lagrange方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K_2^{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K_2^{\mathcal{L}}}{\partial q_k} = \mathbf{O}, \quad k=1,2,\cdots,n。 \tag{11.4}$$

注意，在图11.6所示的二元系统K_2^L中，如果节点v代表的是人类，u代表的是自然或宇宙，则边向量$L(v,u)$是人类活动对自然或宇宙的影响。但是，人类活动对自然的影响能为人类自己观测到吗？欧阳博士告诉惠子，北宋文学家苏轼在《题西林

壁》中的“不识庐山真面目，只缘身在此山中”写得好，即当人身处庐山之中时看到的仅是局部。换言之，人在庐山中与庐山构成一个二元系统，看到的是相对于人可视范围内的庐山景物，不是全貌或真面目。类似地，“天人合一”中的“人”对宇宙的观测也是相对的。这当中，自然对人类的作用$L(u,v)$是即时的，如地震、飓风、海啸等自然灾害可以即时摧毁人类建造的任一座高楼大厦，但人对自然的作用效应$L(v,u)$是延时的，加之人对自然的认知又是局部认知，导致在$|t_2-t_1|$很小时几乎察觉不到对自然的影响，造成在过去很长一段时间里人们错误地认为人类活动对自然的影响$L(v,u)$可以忽略不计，用一元系统K_1^L取代二元系统K_2^L分析人与自然的关系，认为自然或“天”可以包容人类对其产生的一切影响而忽略自然不能完全消纳时的累积效应。例如，“火”是人类文明的起源，是碳与氧之间发生化学反应释放出燃烧能的表现，但碳的燃烧过程，即化学反应$C+O_2=CO_2$和$2C+O_2=2CO$的同时会产生一氧化碳、二氧化碳等废弃物，污染大气环境，影响人类的生存。

那么，自然消纳二氧化碳的过程有哪些呢？欧阳博士告诉惠子，自然消纳方式主要有三种，即陆地、水域中绿色植物光合作用、溶于水生成碳酸或是与土壤中的钙离子发生反应$2Ca+O_2+2CO_2=2CaCO_3$生成碳酸钙等，以维持二氧化碳的自然平衡。人类是在这种自然平衡机制下伴随“三生万物”产生的，并未给予人类特殊的生存能力，因为“天地不仁，以万物为刍狗”中包括人类自己。这样，空气中许可人类生存的二氧化碳含量存在一个阈值R_{human}，即只有在空气中的二氧化碳含量R_{air}满足$R_{air}\leq R_{human}$时人类才可能生存。这样，当自然不足以消纳人类活动排放的二氧化碳时，冗余的二氧化碳即漂浮在空气中，需要人为减少二氧化碳排放以满足$R_{air}\leq R_{human}$的生存条件。否则，在$|t_2-t_1|\to\infty$时二氧化碳的累积量$R_{air}\to\infty$，一旦超过了R_{human}则地球便不适合生存，并推动人类最终走向灭亡。





图11.8 碳超限排放恶果

在这种自然调节中，即便是$R_{air}\leq R_{human}$但空气中的二氧化碳累积到一定量也会引发大气臭氧层的破坏，导致地球气温上升、冰盖融化、海平面上升、极端天气、干旱，以及病毒变异等自然现象，如图11.8所示。这种自然灾害的实质，是自然适应其运行法则的一种自主调节，是对人类活动影响累积到一定程度后的反作用，以回归自然新的平衡点。在这种情形下，人需要正确认知与自然的关系，主动回归到中国古哲学中的“天人合一”，即遵从二元系统K_2^L规则以实现人与自然的协调共生。

第2节 万物法则

宇宙中，任何一件事物的生存与变化遵从一种固有法则。例如，“水往低处流”是“水”展现出的一种规则，蕴意着“水”的至善至柔、谦卑无争和包容万物等哲学本性，在于水具有质量，受到地球引力的作用在向靠近地心的方向运动，如图11.9所示。那么，水的这种规则是否可以视为是一种万物法则呢？当然不能！欧阳博士解释说，水的这种特性是“水”在地球上展现出的一种规则，不适用于其他事物，也不适用于地球外的其他场合，如水在太空中失重的状态下。那么，什么是万物法则呢？万物法则是万物生存与变化遵从的一般性法则，这种法则是万物与生俱来，是在“三生万物”中内蕴的事物生存与变化的自然规则。欧阳博士问惠子：“这里，万物法则的内涵是否与现如今人们口中的‘科学’一词一致呢？”惠子想了一会儿回答说：“虽然科学的宗旨是在揭示万物法则，但似乎不能认为科学是万物法则，不过我解释不清楚这当中的原因。”欧阳博士对惠子的看法表示认同，解释说科学是人对某些或某类事物规则的认知，是在人力所能及的范围内对事物规则的认知，不能认为是万物法则，原因在于，科学的宗旨是揭示某些或某类事物的自然真实，并非是万物遵从的法则。同时，科学是人在揭示某些或某类事物的规则，是人在对事物表象观测的基础上，由分析和归纳得出的结论，且对科学结论重复试验或检验的也是人，与得出结论时的观测条件和人的认知能力有关，即便是所有人在某一时间段均认可的一项科学结论也不一定是自然真实，更不是万物法则。例如，关于宇宙中心问题，欧阳博士解释说，古希腊人的“地心说”直到十五世纪哥白尼提出“日心说”才否决，而“日心说”伴随着人类航天能力的提高，发现也不正确，人类可能永远也确定不了宇宙中心的具体位置。实际上，如果宇宙大爆炸说是正确的，大爆炸发生的那个原初位置就是宇宙中心，但这仅是人类对宇宙创世“道生一”中“一”的一种假说，是否是宇宙创世的本来面目无法得到实证。顿了顿，欧阳博士告诉惠子，佛学经典《般若波罗蜜多心经》中有一句名言，即“色即是空，空即是色”指的正是人对万物认知中的这种局限性。这里的“色”是指万物展现在人面前的表象，是人对万物认知赋予的“色”，并非万物本性，因为万物本性的“空”恰是事物不为人觉察的本质特征。在这方面，中国古哲人对万物法则的认知较之其他民族或“科学”深刻，有着一种自成体系的



图11.9 水往低处流

创世观和认知观，即“道生一，一生二，二生三，三生万物”中的“道”象与人对万物认知中的“名”象，以及事物相生相克的关系。

2.1.万物法则. 中国古哲人认为，万物法则是“道”，是“道”在“道生一”的“一”中产生的“混沌宇宙”，是“道”在“一生二，二生三，三生万物”，然后“万物负阴而抱阳，冲气以为和”。那么，什么是科学呢？欧阳博士解释说，科学是人类发现的某些物上的法则，是在某些物上“道”的表现，是万物法则中的部分或局部知识体系。换言之，万物法则是科学的终极目标！为什么这样说呢？欧阳博士告诉惠子，科学是在人力所能及的范围内认知万物真实，是一种局部认知，距离揭示万物真实是一个无限的认知过程。这当中，一是“万物”在数量上众多，未知事物时有出现，人们只是对事物一件一件的认知，过程趋于无限；二是人在认知能力上的局限，不一定能感知所有事物。同时，人对万物的认知是在“三生万物”之后，并不知晓“道”，对“一生二，二生三”中的“一”和“二”只是在假说下的推导，是人在对事物演化规律认知，结论不一定是事物的“道”而仅是人对“道”的局部认知。

听完欧阳博士这样的解释，惠子对“道”在人类认知中的哲学意义有些感悟，问欧阳博士：“爸爸，那什么是‘道’呢？”欧阳博士解释说，除将“道”视为万物法则外，很难给“道”下一个准确的定义。“为什么是这样呢？”欧阳博士说，人对万物的认知离不开语言，因为语言是人类表现万物规则的基础。一般地，人认知一件事物需要对其内涵和外延界定，用语言给它起个抽象的“名”以区别于其他事物。然而，任何一种语言都需在特定的文化背景、特定的情境场合等条件下才能准确地表达含义。否则，可能很难确定一个词或一句话的准确意思，甚至会在一定程度上造成语意的误解。对人类的认知过程，老子在《道德经》开篇是这样论述的：“道可道，非常道；名可名，非常名。”意思是人可以用语言表述出来的“道”一定不是永恒的“道”，是人类自己的认知；可以用“名”即语言界定的事物并非事物本身，是人类自己对事物的界定。接着，《道德经》第一章对人类认知万物论述到“无名天地之始，有名万物之母”。这里，“天地”一词是泛指“万物”，因为万物在“道生一，一生二，二生三，三生万物”的创生中是无名的，仅是按“道”的本性在进行繁衍，是人类对万物的界定，用语言给其起“名”，以形成人类对万物认知的表达范式，进而知晓万物，起到“母”字的繁衍作用。

那么，人应该怎样认知万物法则或‘道’呢？欧阳博士解释说，既然“万物”是承载“道”的本体，人又只能在其力所能及的范围内感知万物，人在对“道”的认知过程中，就只能由万物展现出来的局部特性“悟道”。老子在《道德经》中即是采用一些物的特性在阐释“道”的本性。例如，第四章中阐释的“道，冲而用之或不盈。渊兮似万物之宗。挫其锐，解其纷，和其光，同其尘。湛兮似或存”即是人在用宇宙

创世“一”的状态感悟“道”，意思是“道”隐含在万物中，虽是虚而不见但作用如渊深远，似万物的本源；它收敛锐气，排除纷杂，蕴蓄着光芒，混同尘垢，是那样幽隐，仿佛是在恍恍惚惚中存在。接着,《道德经》第八章中以“水”喻“道”，称“水善利万物而不争，处众人之所恶，故几於道”，意思是水滋养万物，不与万物争夺并主动往低处流，聚汇在多数人不喜欢的低洼之处，其本性接近于“道”等，都是在用“物”的特性比喻“道”的本性。

这样一来,“道”既然是隐含在万物中，而万物又处在不停地运动之中,“道”的本性应该包括“动”，即《道德经》第二十五章中的“寂兮寥兮，独立不改，周行而不殆”中的“周行而不殆”的行为，即在人看来,“道”表现为万物在清虚寂静中恒久而不止息地一种运运状态。那么，推动‘道’周行而不殆的原动力是什么呢？欧阳博士解释说，这就是《道德经》第四十章中的“反者道之动，弱者道之用”。这当中的“反”即是“周行而不殆”的原动力，即在“阴阳”或正反两方面势力推动事物变化与发展中，如图11.10中地球的春、夏、秋、冬四季变化，是“反”的一面在推动着事物的循环变化，是“弱”的一面在展现着“道”的功用，因为《道德经》第三十六章中已阐释了“柔弱胜刚强”，是“刚强”的一面希望维持事物现状而“柔弱”的一面要改变现状，即胜“刚强”的原动力在推动事物变革。这种原动力表现在天道上，即是老子在第七十七章中的“天之道，损有馀而补不足”。这里的“天之道”指“自然法则”，即自然法则是损减有余的以补充不足的，实现“天地视万物为刍狗”的公平，以维持万物间的和谐与共生。

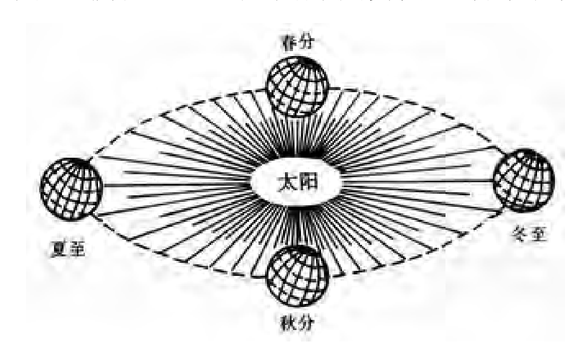


图11.10 四季循环图

2.2.组合力场. 在物质是连续分布的假设下，万物间已知的基本作用力有四种，即引力和电磁力、强核力和弱核力，分别体现在太阳系、银河系等天体构成的宏观宇宙和基本粒子构成的微观世界。这当中，牛顿发现的万有引力与万物对应，即任何两个存在质量m_1, m_2的物体间均存在一个与m_1m_2成正比，与它们间的距离r成反比的引力**F**作用，但一直找不到引力的传递媒介即物理实在，不得已将其归为物质间的一种超距作用。欧阳博士告诉惠子，一些学者曾将古希腊亚里士多德假想的“以太”视为引力的传递介质，赋予其在宇宙中“没有质量、绝对静止”和“均匀分布”的特性，但又找不到存在证据而不为科学界认同，直到爱因斯坦将引力看作一种场效应，将引力解释为一种空间弯曲的场效应才从根本上回答了引力的本性，也解释了为什么在人看来引力是一种超距作用。那么，古希腊哲人眼中的‘以太’与老子

创世说‘有物混成’中的‘物’是否一样呢？答案是否定的！欧阳博士解释说，老子创世说中的“物”是在“道生一，一生二，二生三，三生万物”过程中形成万物的“元物质”，是一种物理实在，处在创世“一”的环节；亚里士多德的“以太”是一种遍布空间的虚幻物，古希腊人以其泛指青天或上层大气而非宇宙中的“元物质”。按老子的创世说，“以太”即便存在，也是在“三生万物”中产生的，与老子“有物混成”中说的“物”不在同一个层次。

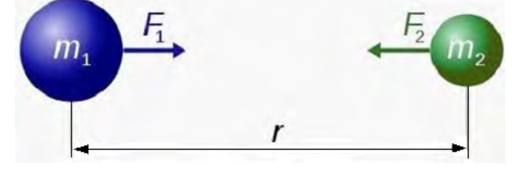


图11.11 牛顿引力

（1）**组合引力场.** 牛顿万有引力定律表明，质量物体间存在引力作用，即“三生万物”后的一种自然规则。在欧氏空间$\mathbb{R}^3$中，质量为m_1位于点$\mathbf{x}$ 的质点P与质量为m_2 位于点$\mathbf{y}$的质点P'间的引力作用是一种相互作用，如图11.11所示。其中，质点P, P'间的距离$r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = |\mathbf{y}-\mathbf{x}|$，引力

$$F_1(\mathbf{y}) \ = \ -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}\mathbf{I}_{\mathbf{xy}}, \quad F_2(\mathbf{x}) \ = \ -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\mathbf{I}_{\mathbf{yx}}。 \tag{11.5}$$

这当中，$G = 6.673\times 10^{-8}cm^3/gs^2$ 为万有引力常数，$\mathbf{I}_{\mathbf{xy}}, \mathbf{I}_{\mathbf{yx}}$分别为$\overrightarrow{\mathbf{xy}}$和$\overrightarrow{\mathbf{yx}}$方向上的单位向量，即$\mathbf{I}_{\mathbf{xy}} = (\mathbf{y}-\mathbf{x})/|\mathbf{y}-\mathbf{x}|$，$\mathbf{I}_{\mathbf{yx}} = (\mathbf{x}-\mathbf{y})/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$。注意，引力势$\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$与引力$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$的关系为

$$\mathbf{F}_1 = -\left(\frac{\partial\mathcal{V}_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial\mathcal{V}_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial\mathcal{V}_1(\mathbf{x})}{\partial x_3}\right), \quad \mathbf{F}_2 = -\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial\mathcal{V}_2(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial\mathcal{V}_2(\mathbf{x})}{\partial x_3}\right)$$

有引力势

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{x}) \ = \ -\frac{Gm_1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad \mathcal{V}_2(\mathbf{y}) \ = \ -\frac{Gm_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}。 \tag{11.6}$$

这样，由引力势(11.6)质点P与P'之间的引力$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$可以看作是质点$P'$在质点$P$形成的引力场$\mathcal{V}_1(\mathbf{x})$中位于点$\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$处的作用力，也可以看作是质点$P$在质点$P'$形成的引力场$\mathcal{V}_2(\mathbf{x})$中位于点$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$处的作用力。换言之，质点$P$和$P'$在空间$\mathbb{R}^3$各自形成一个引力势为$\mathcal{V}_1(\mathbf{z})$或$\mathcal{V}_2(\mathbf{z}), \mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$的引力场。欧阳博士告诉惠子，质点$P$和$P'$各自形成的引力场$\mathcal{V}_1$，$\mathcal{V}_2$及其相互作用可视为图11.6所示的二元场$K_2^L[\mathbf{x}]$。这时，$L(v) = \mathcal{V}_1$，$L(u) = \mathcal{V}_2$且$L(v,u) = \mathbf{F}_1$，$L(u,v) = \mathbf{F}_2$。

一般地，对任一整数$n\geq 1$，假设在空间$\mathbb{R}^n$中有n个质量分别为$m_1, m_2, \cdots, m_n$，位于$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n\in\mathbb{R}^3$的质点$P_1, P_2, \cdots, P_n$，一个质量为$M$的质点$P$位于$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$。那么，按牛顿的万有引力定律，质点$P_1, P_2, \cdots, P_n$作用于质点$P$上的引力是多少呢？欧阳博士解释说，如果把牛顿引力视为一种真实的“向量”，假设质点$P_1, P_2, \cdots, P_n$作用于质点P上的引力分别为$\mathbf{F}_{\mathbf{x_1x}}, \mathbf{F}_{\mathbf{x_2x}}, \cdots, \mathbf{F}_{\mathbf{x_nx}}$，则由向量的线性叠加原则，质点$P_1$,

$P_2,\cdots,P_n$作用于质点P上的引力为

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= -(\mathbf{F_{x_1x}}+\mathbf{F_{x_2x}}+\cdots+\mathbf{F_{x_nx}}) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{GMm_i}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}|^2}\mathbf{I_{x_ix}} = -GM\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|^3}(\mathbf{x}_i-\mathbf{x})\ 。\end{aligned}$$

这里，对任意整数$1\leq i\leq n$，$\mathbf{I_{x_ix}}=(\mathbf{x}_i-\mathbf{x})/|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}|$为$\overrightarrow{\mathbf{xx_i}}$方向上的单位向量。这时，类似于两个质点的情形，引力势

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = -G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|}\ 。\tag{11.8}$$

注意，质点模型是在物体的大小、形状不起作用、可忽略不计或是各组分同步时的一种抽象模型。那么，如果一个物体P不满足这个条件则不能抽象为质点。这时，是否仍可以在牛顿万有引力定律基础上构建引力组合场呢？答案是肯定的！欧阳博士解释说，这时需要用到“微分积分”的思想，假设$\rho(\mathbf{x}')$是物体连续分布的质量密度，对物体P进行细分，含有$\mathbf{x}'$的单元$U(\mathbf{x}')$，则在$\mathrm{diam}U(\mathbf{x}')\to 0$时有$U(\mathbf{x}')\to\mathbf{x}'$。这样，可以近似地假设$U(\mathbf{x}')$为位于$\mathbf{x}'$处质量为$\rho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$的质点。这里，$\mathrm{diam}U(\mathbf{x}')$表示$U(\mathbf{x}')$ 的直径，即$U(\mathbf{x}')$中两点间的最大距离，则类似于(11.8)式的推导，质量密度连续分布的物体P形成一个牛顿引力场，其任一点$\mathbf{x}\in P$处的引力势为

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = -G\int_P\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}d^3\mathbf{x}'。\tag{11.9}$$

由引力势(11.8)−(11.9)式，n个质量密度分别为$\rho_1(\mathbf{x}),\rho_2(\mathbf{x}),\cdots,\rho_n(\mathbf{x})$的物体$P_1$, $P_2,\cdots,P_n$作用于一个质量物体P上的引力$\mathbf{F}$可视为P在$P_1,P_2,\cdots,P_n$各自引力场形成的一个组合场，即Smarandache重叠场K_n^L中受到的引力。为什么$P_1,P_2,\cdots,P_n$的引力场形成一个组合场呢？欧阳博士解释说，假设完全图K_n的顶点集$V(K_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，定义

$$\begin{aligned} L:\quad v_i \quad &\to\quad \mathcal{V}_i(\mathbf{x}) = -G\int_{P_i}\frac{\rho_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}d^3\mathbf{x}', \\ L:\ (v_i,v_j)\ &\to\quad \mathbf{F}_{v_iv_j} = G\int_{P_i}\int_{P_j}\frac{\rho_i(\mathbf{x}_i)\rho_i(\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|^2}d^3\mathbf{x}_jd^3\mathbf{x}_i,\quad 1\leq i,j\leq n \end{aligned}$$

则K_n^L中的顶点v_i对应于物体P_i形成的引力场，边(v_i,v_j)对应于P_i,P_j引力场间的引力。在K_n^L这个引力组合场中，任一点$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$处的引力势$\mathcal{V}(\mathbf{x})$由

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = -G\sum_{i=1}^{n}\int_{P_i}\frac{\rho_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}d^3\mathbf{x}'\tag{11.10}$$

确定。特别地，当$n\to\infty$时，(11.10)确定的引力组合场K_∞^L即是牛顿万有引力给出的引力场。这时，一个质量为m的质点在组合场K_∞^L中受到的引力为$\mathbf{F}(\mathbf{x})=m\mathcal{V}(\mathbf{x})$，一个质量密度为$\rho(\mathbf{x})$的物体$P$在组合场$K_n^L$中受到的引力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=\int_P\rho(\mathbf{x})\mathcal{V}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}=-G\int_P\rho(\mathbf{x})\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\int_{P_i}\frac{\rho_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}d^3\mathbf{x}'\right)d^3\mathbf{x}。\quad(11.11)$$

（2）**爱因斯坦引力场.** 牛顿将引力视为一种向量，可以按“力”的性质分析引力特点，便于实际应用，但却找不到力的传递介质，与人对力的体验大相径庭，总让人感觉在理论上似乎有些欠缺。那么，是否对任一种力都可以找到传递介质呢？答案是否定的！欧阳博士解释说，对生活中一些常见的作用力很容易找到传递介质。例如，图11.12中，人挑担子的作用力向上，这种力通过扁担和绳索传递到稻谷上，以抵消稻谷重力完成运输。这当中，稻谷重力是地球对稻谷引力，但找不到中间传递介质，即引力子。但将牛顿万有引力看作是一种场效应，即任一点$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$有赋值$\mathcal{V}(\mathbf{x})$的保守力场$\mathbb{R}^3(\mathcal{V})$，一种欧氏空间$\mathbb{R}^3$上的Smarandache几何可以很好地解决这个疑惑。注意，牛顿引力场中的时间t独立于空间$\mathbb{R}^3$而存在。爱因斯坦的狭义相对论表明，时间t不能独立于物理实在而存在，需用4-维欧氏空间$\mathbb{R}^4=\{(t,x_1,x_2,x_3)|t,x_i\in\mathbb{R},1\leq i\leq 3\}$刻画物体运动状态。这里，$t$为时间，$(x_1,x_2,x_3)$为空间坐标。爱因斯坦引力场的实质，在于将牛顿引力场中的场效应转化为一个4-维欧氏空间$\mathbb{R}^4$上的几何效应，即对点$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4$赋值引力势$\mathcal{V}(\mathbf{x})$的一个引力场$\mathbb{R}^4(\mathcal{V})$。这时，由于在任一点$\mathbf{x}$上有赋值$\mathcal{V}(\mathbf{x})$，引力场$\mathbb{R}^4(\mathcal{V})$对应的Smarandache几何不再是平直空间而是一个弯曲空间。



图11.12 挑担子

那么，怎样在几何上看待弯曲空间$\mathbb{R}^4(\mathcal{V})$呢？欧阳博士解释说，首先，由定义引力势$\mathcal{V}(\mathbf{x})$的图为$\Gamma[\mathbf{x},\mathcal{V}(\mathbf{x})]=\{(\mathbf{x},\mathcal{V}(\mathbf{x})|\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4\}$，即任一点$\mathbf{x}$均存在一个邻域$U(\mathbf{x})$同胚于4-维欧氏空间$\mathbb{R}^4$，即为一个4-维流形$M^4$。这时，引力$\mathbf{F}(\mathbf{x})$对应于流形$M^4$在点$\mathbf{x}\in M^4$的切向量。这样，应用相对性原理，即描写一个客观事物发展规律的方程式应当在所有的坐标系中具有相同的表现形式，爱因斯坦假设这时的弯曲空间或Smarandache几何$\mathbb{R}^4(\mathcal{V})$是度量为

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(\mathbf{x})dx^\mu dx^\nu \quad(11.12)$$

的黎曼空间。这里，$0\leq\mu,\nu\leq 3,x^0=t,x^1=x_1,x^2=x_2,x^3=x_3$且(11.12)式中用了爱因斯坦求和约定，即对上下标相同的参数μ,ν求和。同时，物质分布在引力场

中的能量动量张量为$\mathcal{T}_{\mu\nu}$；其次，在几何学中度量一个几何体弯曲程度的指标称为曲率。一般地，一段弧线$p'p$ 的切线转角$\Delta\alpha$ 与对应弧长Δs比的绝对值$|\Delta\alpha/\Delta s|$称为弧线$p'p$的平均曲率$\overline{K}_{p'p}$。这时，当$p' \to p$时如果平均曲率的极限$\lim\limits_{p'\to p} \overline{K}_{p'p}$存在，则称为该曲线在点$p$ 处的曲率，记为$K(p)$，即曲率$K(p)$越大表示曲线在点p处的弯曲程度越大。这样，由黎曼空间中二阶协变量的不变性，以Ricci张量$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}$和Ricci曲率标量$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$对黎曼度量所决定的几何体偏离相应的欧氏空间程度进行度量，爱因斯坦提出了著名的引力场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = \kappa\mathcal{T}_{\mu\nu}\ 。\tag{11.13}$$

这里，$\kappa = 8\pi G/c^4 = 2.08\times 10^{-48}cm^{-1}\cdot g^{-1}\cdot s^2$，$\lambda$称为宇宙因子，$\lambda g_{\mu\nu}$是一个小量，是爱因斯坦为得到一个静态宇宙而引入的一项，常取$\lambda = 0$，且$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \mathbf{0}$时对应的是真空引力场。

取爱因斯坦引力场中的Lagrange量$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\,(L_G - 2\kappa L_F)$，作用量

$$J[\mathcal{L}] = \int \sqrt{-g}\,(L_G - 2\kappa L_F)\,d^4x,\tag{11.14}$$

且能量动量张量

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}L_F}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{\partial\sqrt{-g}L_F}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}}\right]\right\}。\tag{11.15}$$

这里，$L_G = R$，$L_F = L_F(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_{,\alpha})$且$f_{,\alpha} = \partial/\partial x^{\alpha}$。这时，作用量$J[\mathcal{L}]$上的变分

$$\delta J[\mathcal{L}] = \int \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \kappa T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}d^4x,$$

即最小作用量原理$\delta J[\mathcal{L}] = 0$对应于引力因子$\lambda = 0$时的爱因斯坦引力场方程(11.13)。

那么，怎样依赖人的观测结果求爱因斯坦引力场方程(11.13)在真空状态下的解呢？ 欧阳博士解释说，方程(11.13)是一个二阶偏微分方程组，人对宇宙的观测表明，在尺度为1亿光年，即$9.46\times 10^{20}km$范围内的点等同为一点的条件下，在任意时刻t和在尺度1亿光年条件下，宇宙中不同的点和同一个点不同的方向上不存在任何差别，是均匀和同向性的，称为宇宙学假设，即假设宇宙物质呈现球对称分布。这时，可以用球坐标(r,θ,ϕ) 刻画时空中点的位置，且黎曼度量(11.12)表示为

$$d^2s = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2,\tag{11.16}$$

其中的$A(r), B(r)$为待定函数，代入爱因斯坦引力场方程(11.13)中解知

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = \frac{1}{1 - 2Gm/r},\quad B(r) = 1 - \frac{2Gm}{r}\ 。\tag{11.17}$$

这样，对应于真空状态下的球对称黎曼度量(11.12)为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mG}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2mG/r} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 。 \quad (11.18)$$

一般地，宇宙学中的均匀和同向性假设对应的物质分布空间是一个曲率为常数K的空间。相应地，$K = 0, > 0$或< 0分别称为欧氏、椭圆或双曲空间。这时，球对称情形下的黎曼度量(11.12)可以表示为

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\left(\frac{d^2 r}{1 - Kr^2} + r^2\left(d^2\theta + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right), \quad (11.15)$$

称为Robertson-Walker度量，其中的$a(t)$是个待定尺度因子，代入$\lambda = 0$时真空状态下的爱因斯坦引力场方程(11.13)可以确定，得到的解称为Friedmann宇宙或标准宇宙模型，并视$\dot{a}(t) = 0, < 0$或> 0分别称宇宙处在静态、收缩或膨胀期，可分别对静态宇宙、收缩宇宙和膨胀宇宙状态在假设条件下进行刻画与模拟。

这时，惠子想到一个问题问欧阳博士："爸爸，爱因斯坦引力场与牛顿引力场在$n \to \infty$时刻画的引力场情形一样。那么，为什么还要研究爱因斯坦引力场？它里面的符号和偏微方程都很复杂呢！"欧阳博士告诉惠子，牛顿万有引力定律是对引力局部表现的认知，在人类的正常活动范围内，牛顿引力场与爱因斯坦引力场的计算结果差异很小，可以忽略不计，这也是为什么人类在地球或地球的临近空域上活动，如向太空发射人造卫星、探测器等仍在使用牛顿万有引力定律计算发射速度的原因，因为牛顿引力刻画的是质量物体间的引力作用，是一种局部作用而非万物作用。与牛顿引力场刻画引力的局部行为不同，爱因斯坦引力场刻画的是万物间的引力作用，是"万物引力场"，其重要性在于揭示了在万物引力的作用下，人在地球上感知的欧氏平直空间是一种局部感知，在万物引力作用下并不真实地存在，万物在宇宙运动中遵从的是人未能感知的弯曲空间或Smardache重叠空间。这样一来，人在宇宙范围活动就需进一步对万物引力场中的运动规则进行认知。

听到这里，惠子问欧阳博士："爸爸，标准宇宙模型是否能作为万物引力场的定量刻画呢？"欧阳博士解释说，爱因斯坦引力场方程是牛顿引力场$\mathcal{V}(\mathbf{x})$在$n \to \infty$时的情形，接近于老子创世中"一"时的情形，但因物质分布的能量动量张量$\mathcal{T}_{\mu\nu}$是个未知数，得不出爱因斯坦引力场方程在一般情形下的解。标准宇宙模型虽然可以求解，但却是在宇宙学假设和$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \mathbf{0}$条件下刻画宇宙创世"一"的情形。这当中，条件$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \mathbf{0}$实则是假设老子创世中"一"处在真空状态没有"物"或没有能量动量$\mathcal{T}$，与老子的"有物混成，先天地生"并不一致。那么，宇宙创世在状态'一'时的能量动量张量$\mathcal{T}_{\mu\nu}$到底是多少呢？欧阳博士解释说，由能量守恒定律，能量动量$\mathcal{T}$应该是个恒定量，但人类能测出宇宙中的$\mathcal{T}$吗？人类对宇宙中心、形状这类问题都回答不

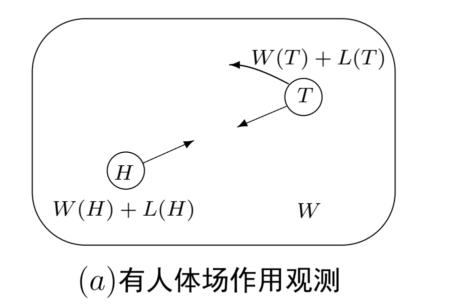
了，又怎能测出宇宙中的$\mathcal{T}$呢！这又回到了老子那句"道可道，非常道；名可名，非常名"的论述，人谈论的宇宙是人对宇宙的认知，并非是宇宙的本来面目。

（3）**人体场作用.** 人体是地球上的一种由基本粒子→原子→生物大分子→人体组织和器官→人体，具有较高意识能力的高级生物，一种由多种场效应组成的生物复杂场，包括可观测与不可观测两种特性。这里，可观测特性，指人体场可由科学仪器检测出的场效应，如人体电流、人体中的电磁材料、体内残留的磁性物质等产生的电磁场效应、静电效应和热效应等，见图11.13；不可观测特性是指科学仪器尚不能觉察的场效应，部分与大脑的意识引导有关，如人的气质与神色、人对某一事件的"第六感"，以及气功等在中国古哲学"天人合一"引导下与万物场间的"吐纳"和信息交换，维持人体内气血运行的一种人体调身、调息、调心的心身修行等。既然是人在对万物认知，认知的主体是人，就不能回避万物认知中的一个基本问题，即"人是独立于万物存在的吗？"欧阳博士解释说，在老子的"三生万物"中，人属于万物的一部分，即人不能脱离万物而存在。那么，"在哲学上又为什么说客观规律不以人的意志为转移呢，这二者看似不是有些矛盾吗？"答案是否定的！这当中的"客观规律"是指那些不以人的意志为转移的客观存在规则或在物上体现的"道"，旨在强调客观规律的"存在"独立于人的主观"意识"。

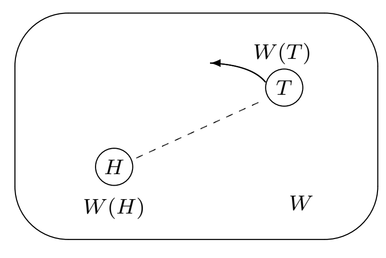


图11.13 人体生物场

注意，人对万物的认知离不开人的观测行为，与存在和意识的关系不同，一个更直接的问题是"人可以独立于一件事物对其进行观测吗？"欧阳博士解释说，既然人不能脱离万物而存在，一个人H对一件事物T的观测就必然形成一个二元系统$\{H,T\}$或二元场K_2^L，是一种如图11.14(a)所示的在场作用情形下的观测行为。



(a)有人体场作用观测



(b) 无人体场作用观测

图11.14 场作用下的观测

这当中，$W(T),W(H)$是事物或人在万物场作用下的运行规则，$L(T),L(H)$是人对事物T或事物T对人的场作用影响。一般地，受人体场的作用影响，人对事物T的观

测结果是$W(T)+L(T)$，但人们普遍认为对事物T的观测结果是$W(T)$或人体场对事物T的作用$L(T)=\mathbf{0}$，即人独立于事物T在观测，处在图11.14(b) 所示的那种观测情形。那么，在什么条件下$L(T)=\mathbf{0}$呢？欧阳博士告诉惠子，万物间既然存在普遍联系或相互作用，理论上一定有$L(T)\neq\mathbf{0}$，即不存在$L(T)=\mathbf{0}$的情形。这样，只能是源于认知对观测精度的要求认为$L(T)\approx\mathbf{0}$。一般地，用$|W(T)|/|L(T)|\geq 10^k$提出观测精度或数量级要求，即$|W(T)|/|L(T)|\geq 10^k$时认为人对事物T观测影响可以忽略不计，这当中的k是按观测精度设置的一个正实数。例如，在引力观测中取$k=10$，假设一个人的体重或质量为$80kg$，地球质量$M=5.975\times10^{24}kg$，与人对其他物体引力的比值为$5.975\times10^{24}/80=7.4568\times10^{22}$，相差$k=22>10$，即人对其他物的引力影响远小于地球。这样，人与地球对其他物体引力相比可以忽略不计。

听完欧阳博士对二元场相互作用的解释，惠子对微观粒子有些感悟，问欧阳博士："爸爸，量子力学中的测不准原理和双缝实验是不是与人对事物的观测构成一个二元系统有关，是人体场作用于粒子影响观测结果所致呢？"欧阳博士对惠子能想到场作用这一层关系表示赞许，告诉她四种基本作用力中，引力和电磁力属于长程力，强核力和弱核力属于短程力。在同等条件之下，强核力、电磁力和弱核力分别是引力的$10^{38}, 10^{36}$和10^{32}倍，即在微观世界中，引力对粒子的作用远小于强核力、电磁力和弱核力，可以忽略不计。这时，人与观测粒子在观测中构成一个二元系统，人体场对粒子的作用影响观测结果，如人体电磁场对带电粒子的作用影响等。这时，对粒子的观测结果为$W(T)+L(T)$，且不能忽略人对粒子运动的作用影响，即不能认为$L(T)\approx\mathbf{0}$。例如，对电子速度的测量，第一次是0.91m/s，第二次是1.12m/s，第三次又变成1.02m/s等，这是量子力学中提出粒子的位置与动量不可同时被确定，即测不准原理，双缝实验中人是否观测穿过小孔S_1或S_2的光线得到干涉或不干涉现象的原因。当然，人们至今尚不清楚人体场是怎样一个场，因为科学尚无法对人体场中的一些异常效应进行解释，但在中国古哲学"天人合一"的思想引导下，人体是宇宙运行的自然缩影。对人类来说，认知"人体"与认知"宇宙"是同一件事情。

2.3.道法自然. 那么，人类真能认知万物，由科学把握万物法则或"道"吗？对此，中国古哲学给出的答案是否定的，即老子的"道，可道，非常道"，欧阳博士解释说，因为人对万物或自然的认知始终是一种局部认知，得到的是人对某些"物"体现出的规律认知，且还受人在认知能力上的约束。在这种情形下，人类应当怎样感悟"道"或万物法则呢？对此，欧阳博士解释说，老子在《道德经》第二十五章中阐释的"人法地，地法天，天法道，道法自然"是对这个问题的回答，也是对科学发展的指引和人类发展的约束。

（1）**科学发展之道.** 科学是发现某些"物"上展现出的"道"或规则，"人法地，

地法天，天法道，道法自然”是人认知万物法则“道”的一个过程，一种渐进的科学范式。首先，需要辨识这当中的“地、天、道”和“自然”的含义。这当中，“地、天”不是老子创世说“二”中的“阴阳”，也不是盘古创世说中盘古用一把斧子劈开混沌世界“阳清为天，阴浊为地”中的“天、地”。否则，天地作为“一生二”的平等产物，逻辑上就解释不清为什么是“地法天”而不是“天法地”，因为天地间并无先后之分，不符合“道生一，一生二，二生三，三生万物”的宇宙万物演化规则，而“道生一，一生二，二生三，三生万物”阐释的是“道”的“生”，即是“道生一”，是“道”生“二”生“三”，直至“万物”。这里的“一、二、三”和“万物”是“道”的载体，强调的是人在由“物”的规则悟“道”；“法”是效法、约束的意思；“自然”并非“自然界”中的“自然”二字而是指自然或万物的本性。这样，“人法地，地法天，天法道，道法自然”的意思，是人遵从地球上的物“道”并受地的约束，地球上的物遵从地外物“道”并受其约束，地外物“道”遵从万物法则“道”，“道”是依附于万物或自然本性的体现；其次，人把握万物法则“道”，构建人对万物认知的知识体系需由地球上的物“道”认知万物之“道”，因为人生存在地球上，受地球上的物“道”约束。换言之，人之所以出现在地球上，是因为地球上有适合人生存的条件“道”。这样，认知地球上的物“道”即可悟出与人相关的“道”，知人应遵从的规则，即“人道”，因为“人法地，地法天，天法道，道法自然”，地球上的物“道”是在人力所能及范围内能感知的“道”，是“道”附着在地球上物的体现。这样，科学应首先是对地球上“物道”的认知，即把握地球上的物态以服务于人类自己；其次，应以地球上“物道”认知地球外的“物道”，并以此之道认知宇宙万物，悟得万物的本性即“道”，即由人类自我→地球上“物道”→地球外“物道”→ 悟“道”即万物法则。这是一个渐进且漫长乃至无限的认知过程，因为老子在《道德经》中已断言“道可道，非常道”。

（2）**人类自我约束.** 人在经由“物”的规则悟“道”构建科学体系过程中有一个基本问题，即“科学的宗旨是什么，是让人成为万物的统治者吗？”当然不是！欧阳博士解释说，科学的宗旨在于让人与自然和谐共生，遵从“人道”或《道德经》中的“德”行事，即第三十七章中的“道常无为，而无不为”。这在“天人合一”二元系统K_2^L中表现在两个方面：一是人类在其力所能及范围内依“物道”构建科学的目的是为人类自己的“生生不息”，表现在“道”赋予人类认知“道”的能力或构建的科学是人类对“物道”的局部知识，即老子断言的“道可道，非常道”。在这一点上，人类只能顺应“道”行事，与万物共生而非主宰万物，即为“有德”。相应地，顺应“道”与万物共生的行为称为“无为”；二是人类遵从“道”时与万物是一种共生关系。反之，人类背离“道”时，万物会遵“道”进行自我调整，以适应人类背“道”而回归协调，万物的这种遵“道”自我调整累积到一定程度，即是人眼中的自然灾害。

那么，人类应怎样自我约束而与万物和谐共生呢？欧阳博士解释说，这需要在“天人合一”思想下进一步理解“人法地，地法天，天法道，道法自然”对人类遵“道”而“生”的意义，即人在经由地球上的“物道”悟“道”构建科学体系的同时，需要自我约束，遵从、效法地球上的“物道”行事，顺应“地道”、“天道”和万物法则行事。例如，老子在《道德经》第十二章中的“五色令人目盲，五音令人耳聋，五味令人口爽，驰骋畋猎令人心发狂，难得之货令人行妨。是以圣人，为腹不为目，故去彼取此”是老子在告诫人对于声、色、货、利以及口腹之欲要加以自我约束，即遵“道”而“生”不因“五色”、“五音”、“五味”或是“驰骋畋猎”令人“目盲”、“耳聋”、“口爽”或是“心发狂”而偏离“人道”，需要学习遵“道”而“行”之人的品行，戒除人主观意念中的“贪”，舍弃那些看似光鲜的浮华，是在进一步阐释“人道”需要效法、遵从“道”行事时人类需要的自我约束。历史的经验表面，那些给人类造成巨大损失的自然灾害，如地震、海啸、飓风、水患、泥石流和传染病等，诱因是人类在违背“道”行事，看似“天灾”实是“人祸”，而中国古哲学引导的“天人合一”实质是遵“道”而“行”，即人与自然协调共生或“德”的表现。

第3节 人体经脉

中国古哲学中的“阴阳”说，即“一阴一阳之谓道”和阴阳间“此消彼长”的太极图孕育的即是事物从出现到消亡或循环往复“生”的原动力，其基于万物基本构成中的“金、木、水、火、土”五种基元，称之为“五行”间的相生相克哲学。这当中，相生是指金、木、水、火、土五行间存在着一种有序的资生、助长的循环推动作用，即金生水、水生木、木生火、火生土、土生金；相克是指金、木、水、火、土五行之间存在着一种有序的克制、制约的循环抑制作用，即金克木、木克土、土克水、水克火、火克金。注意，相生与相克是一件事物变化中不可或缺的两个方面势力。同时，正是事物间这种相生和相克作用维持着万物间的协调或生存，即老子在《道德经》第七十七章中阐释的“天之道，损有馀而补不足”需要人类效法，“孰能有馀以奉天下，唯有道者”，因为在中国古哲人看来，人体是天地或“宇宙”的一个浓缩版，人体自身遵“道”而“行”，维持生命的根本在于效法“天道”中的“损有馀而补不足”，即维持人体生理平衡，这是中国传统医学的哲学基础，即《黄帝内经.素问》阴阳应象大论篇中皇帝说的：“阴阳者，天地之道也。万物之纲纪，变化之父母，生杀之本始，神明之府也。治病必求于本。”这当中，“治病必求于本”即是指治病应回归“天道”中的阴阳协调。

这时，惠子想到一个问题问欧阳博士：“元素周期表中列出了118种物质构成元

素，中国古哲人仅用金、木、水、火、土间的相生相克刻画事物状态及行为是否太少？这样刻画事物状态及行为是否太笼统让人有‘玄’的感觉？”欧阳博士反问她：“系统认知一件事物是不是选取的基元越多，对事物划分得越细越有利于把握事物的状态或行为呢？”惠子回答说：“对事物划分得越细不是越有利于把握事物细微状态和行为吗！”欧阳博士告诉她，这种认知观点并不一定正确！对这个问题回答“是”或“否”映射出的恰是西方文化与中国文化的差异，即西方文化认知一件事物讲求细微和精准，进而产生西方的“科学”；中国文化则认为凡事讲求一个“度”，过度会引发事物朝着相反方面发展，需“适可而止”，即适用、满足需求即可，不主张无限细分事物基元的认知方法。例如，在《庄子.天下》篇中的“一尺之捶，日取其半，万世不竭”即是在阐释这种细分是无限的，剩余尺长形成一个无限数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_1^\infty$，见图11.15，这当然不是人类应采取的认知事物方法。这样，中国古哲人认知事物用的是一种系统方法，是在阴阳和五行相生相克的变化中系统认知事物的状态及行为，即西方“科学”中的“系统科学”。这在一定程度上表明，系统认知一件事物T并不是一定要将T分解为基本粒子或细胞，因为细分为基本粒子或细胞并不一定有利于对事物T的认知，甚至会增加认知的复杂性，这也是系统认知中为什么将认知单元称为“基元”的原因，这一点在中医理论中表现尤为突出，即不是用人体中数量级在10^{14}的细胞而是用人体气血运行的十二条经脉和任督二脉模拟人体运行，并应用十二条经脉上的310个和任督二脉上的52个，共计362个穴位调理人体内的阴阳协调，以实现人体康复，恰是“天人合一”思想的体现。这当中，如果将这362个穴位抽象为节点，把人体十二经脉和任督二脉上的气血运行抽象为连线或边，对应的恰是一个362个节点的平衡流G^L，其节点数较之人体细胞组成的网络节点数差12个数量级。

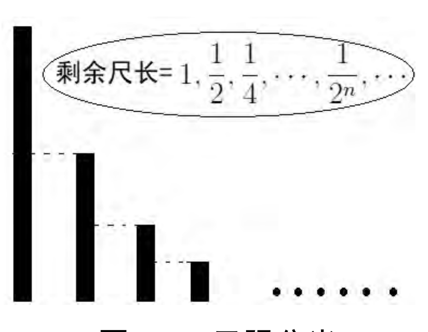


图11.15 无限分半

3.1.人体运行表象. 人作为“三生万物”中的“物”之一，人体自然遵“道”运行。否则，“道”不会在“三生万物”中产生人类。换句话说，人类之所以出现是自然使然，这当中蕴含着“人择原理”，可由人体运行悟“道”，构建科学知识体系。同时，由“天道”认知“人道”，因为“人法地，地法天，天法道，道法自然”。欧阳博士告诉惠子，中医正是基于这样一种哲学思想，表现在《黄帝内经.素问》和《黄帝内经.灵枢》中，即依“天道”调理人体气血运行，以实现人的救死扶伤。

（1）**人天表征对应.** 人体与天地间在运行上存在的一种表征对应，体现在《黄帝内经.灵枢》邪客篇中，伯高在回答皇帝提出的一个问题中的一段话，即“天圆地

方，人头圆足方以应之；天有日月，人有两目；地有九州，人有九窍；天有风雨，人有喜怒。天有雷电，人有音声；天有四时，人有四肢；天有五音，人有五藏；天有六律，人有六府；天有冬夏，人有寒热；天有十日，人有手十指；辰有十二，人有足十指、茎、垂以应之；女子不足二节，以抱人形；天有阴阳，人有夫妻；岁有三百六十五日，人有三百六十节；地有高山，人有肩膝；地有深谷，人有腋腘；地有十二经水，人有十二经脉；地有泉脉，人有卫气；地有草蓂，人有毫毛；天有昼夜，人有卧起；天有列星，人有牙齿；地有小山，人有小节；地有山石，人有高骨；地有林木，人有募筋；地有聚邑，人有䐃肉。岁有十二月，人有十二节；地有四时不生草，人有无子。此人与天地相应者也”，即是在阐释“人体”与“天体”运行的一种表象对应关系。

（2）**人天运行对应.** 人与天地运行对应表现《黄帝内经.素问》和《黄帝内经.灵枢》阐释的，正是人体与天地运行的对应和阴阳调理。例如，《黄帝内经.灵枢》五十营篇中岐伯说的“天周二十八宿，宿三十六分；人气行一周，千八分，日行二十八宿。人经脉上下、左右、前后二十八脉，周身十六丈二尺，以应二十八宿；漏水下百刻，以分昼夜。故人一呼脉再动，气行三寸；一吸脉亦再动，气行三寸；呼吸定息，气行六寸。十息气行六尺，日行二分；二百七十息，气行十六丈二尺，气行交通于中，一周于身，下水二刻，日行二十五分；五百四十息，气行再周于身，水下四刻，日行四十分；二千七百息，气行十周于身，水下二十刻，日行五宿二十分；一万三千五百息，气行五十营于身，水下百刻，日行二十八宿，漏水皆尽，脉终矣。所谓交通者，并行一数也，故五十营备，得尽天地之寿矣，凡行八百一十丈也”是在阐释人体吐纳、气血运行与太阳运行、寒暑昼夜交替的对应；藏气法时论篇岐伯说的“肝主春，$\cdots$；心主夏，$\cdots$”和“病在肝，愈于夏，夏不愈，甚于秋，秋不死，持于冬，起于春；病在心，$\cdots$”是在阐释人的五脏与一年四季的对应关系和疾病变化规律等。

（3）**人天五行对应.** 中国古哲学认为万物由“五行”构成，“五行”中的相生相克是“道”的一种体现。这样，人的五脏六腑与“五行”间存在一种自然对应，体现在《黄帝内经.素问》金匮真言论、阴阳应象大论等篇中，按“金、木、水、火、土”分别归类，即金$\leftrightarrow$ {肺、大肠}，木$\leftrightarrow$ {肝、胆}，水$\leftrightarrow$ {肾、膀胱}，火$\leftrightarrow$ {心、小肠}，土$\leftrightarrow$ {脾、胰、胃}，体现在《黄帝内经.素问》中，是基于事物内在的运动方式、状态或显象的同一性，来识别同类运动方式的共同特征和相互作用规律，如图11.16所示。例如，由五行间的相生关系，即金生水、水生木、木生火、火生土、土生金对应到人



图11.16 五脏六腑生克关系

的五脏六腑，即有肺、大肠功能强→肾、膀胱功能强，肾、膀胱强功能→肝、胆功能强，肝、胆功能强→心、小肠功能强，心、小肠功能强→脾、胰、胃功能强，脾、胰、胃功能强→肺、大肠功能强相生关系；由五行间的相克，即金克木、木克土、土克水、水克火、火克金对应到人的五脏六腑，即有肺、大肠功能弱→肝、胆功能弱，肝、胆功能弱→脾、胰、胃功能弱，脾、胰、胃功能弱→肾、膀胱功能弱，肾、膀胱功能弱→心、小肠功能弱，心、小肠功能弱→肺、大肠功能弱的相克关系。

3.2.人体十二经脉. 中医在人体遵“道”而“行”的哲学思想指引下，不仅是构建了人体与“天地”运行表象上的对应关系，更在于深刻揭示了人体运行的实质是人体十二条经脉上的“气血”遵“天道”运行与五脏六腑上疾病的对应关系。

（1）**十二经脉分布.** 人体十二经脉分布于人体的四肢的内测和外侧，与人的五脏六腑对应。分布在上肢内侧的称为手三阴经，即“手太阴肺经（LU）、手少阴心经（HT）和手厥阴心包经（PC）”，下肢内侧的称为足三阴经，即“足太阴脾经（SP）、足少阴肾经（KI）和足厥阴肝经（LR）”，分布于上肢外侧的称为手三阳经，即“手阳明大肠经（LI）、手太阳小肠经（SI）、手少阳三焦经（SJ）”，分布于下肢外侧的称为足三阳经，即“足阳明胃经（ST）、足太阳膀胱经（BL）、足少阳胆经（GB）”，具有运行气血、联接脏腑内外、沟通上下等功能，如图11.17所示。





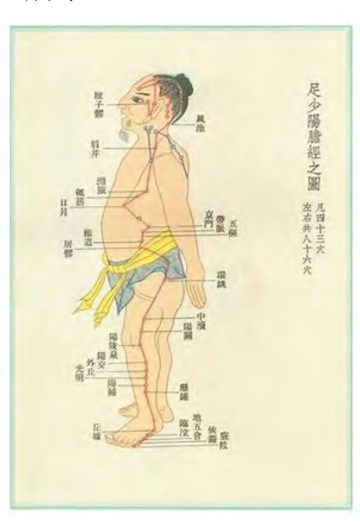


图11.17 十二经脉示意

这里，经脉上的“气血”并非人眼所见的口中之气或人体血液而是中医理论中刻画人体运行的一个专业术语，指分别行于脉中或脉外的“营气”和“卫气”，类似于在人体中沿经脉运行的“能量”。对此，《黄帝内经.灵枢》营卫生会篇中有“人受气于谷，谷入于胃，以传于肺，五脏六腑，皆以受气，其清者为营，浊者为卫，营在脉中，卫在脉外，营周不休”的阐述；而“血”是营气卫气的物质体现，营卫生会篇中有“营卫者，精气也；血者，神气也，故血之与气，异名同类焉”的论述。正是这十二

经脉上的气血运行支撑着人体机能，使其成为一个“人”而非他物。那么，“什么是穴位呢？”欧阳博士解释说，“穴位”又称“腧穴”，是经脉上一些敏感的点区部位，对其刺激可改变经脉上气血运行状态。例如，图11.17中的手阳明大肠经上有2×20个穴位，足少阴肾经上有2×27个穴位，足少阳胆经上有2×44个穴位等。

（2）**十二经脉气血运行.** 人体十二经脉中每一条经脉上的气血都有固定的运行规则。例如，图11.17中的手阳明大肠经起于食指桡侧尖端，沿食指桡侧上行，经过第一、二掌骨之间进入拇长伸肌腱和拇短伸肌腱之间，沿人体上肢外侧前缘上行到肩部，过肩部后行至项颈后的第七颈椎棘突向下前行进入锁骨上窝，网络于肺，再下行通过横膈，属大肠。

那么，人体十二经脉上的气血整体上是怎样运行的呢？欧阳博士解释说，人体十二经脉中的气血运行遵循手三阴经从胸走手，手三阳经从手走头，足三阳经从头走足，足三阴经从足走胸的走向，从肺经开始逐经相传，至肝经而终，再由肝经复传入肺经，如图11.18所示，即手太阴肺经→ 手阳明大肠经→ 足阳明胃经→足太阴脾经→手少阴心经→手太阳小肠经→足太阳膀胱经→足少阴肾经→ 手厥阴心包经→ 手少阳三焦经→ 足少阳胆经→ 足厥阴肝经→ 手太阴肺经。注意，图11.18是十四经脉气血运行图，包括任脉和督脉，其中任脉起于胞中会阴，止于下颌承浆，共24个穴位，行于腹部正中为阴；督脉分布于人体后正中线及头面正中，起于长强，止于龈交，共28个穴位，行与背部正中为阳。任督二脉对人体阴经、阳经脉气有总揽、总任的作用。这样，“人法道”，人体十二经脉上的气血依“道”形成的天地间十二个时辰，周而复始地运行着，以维持人体的“生”。

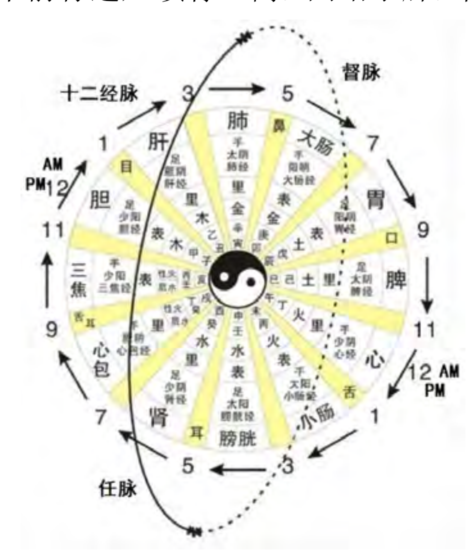


图11.18 十二经脉气血运行

（3）**十二经脉气血平衡.** 人作为“道”的产物，人体十二经脉上的气血运行是在遵“道”而“行”，是“一阴一阳之谓道”或“阴阳”平衡的体现。这样，维持人体在气血运行中的阴阳平衡，即人体的阳气与阴精（精、血、津、液）间的平衡是人体“生”的根本。反之，人体患病要么是外感“风、寒、暑、湿、燥、火”六淫，要么是体内受“喜、怒、忧、思、悲、恐、惊”七情影响影响人体阴阳平衡，见《黄帝内经.素问》阴阳应象大论篇中皇帝的“暴怒伤阴，暴喜伤阳。厥气上行，···，故重阴必阳，重阳必阴。”从而，中医采用“辨证施治”方法调理人体的阴阳平衡，即由“望、闻、问、切”四诊辨明疾病起因、性质、部位、经脉和邪正关系，确定用药、针灸、拔火

罐或综合治疗方法。

中医的辨证施治中，辩证的目的是为了对患者施治，以实现“治病救人”的根本。那么，中医是怎样对患者进行施治呢？欧阳博士告诉惠子，中医施治严格遵从“天之道”中的“损有馀而补不足”，即对人体中的阳气与阴精中多的一方减少，少的一方补充，以重回阴阳平衡状态。为此，中医有两种方法让人体回归这种阴阳平衡，一种是中药，一种是针灸。这当中，中药以天然植物为主，动物、矿物为辅，其实质在于针对病症，综合多种药材的药性，以对病患体实施“减阳补阴”或“减阴补阳”，使病患体回归阴阳平衡；针灸是针法和灸法的合称，是在适用药缺失情形下或是直接使十二经脉上的气血回归阴阳平衡的一种方法，如图11.19 所示，体现在《黄帝内经.灵枢》九针十二原篇中皇帝问岐伯说的“余欲勿使被毒药，无用砭石，欲以微针通其经脉，调其血气，营其逆顺出入之会。···，愿闻其情”，意思是皇帝想让其子民免受药物、砭石的伤害，要求仅用微小的针刺人体的肌肤，实现疏通经脉、调和气血，使气血在人体经脉中逆顺运行，问岐伯应怎样做到，岐伯回答说“往者为逆，来者为顺，明知逆顺，正行无问。逆而夺之，恶得无虚，追而济之，恶得无实，迎之随之，以意和之，针道毕矣。”，意思是气已去的脉气虚而小，为逆；气已来的脉气平而和为顺。这样，按经气的循行方向，朝着经气来的方向进针则与它的来势相逆，用泻法夺其有余，邪气由实变虚。反之，按经气去的方向进针，和它的去势相顺，用补法济其不足，正气由虚转实，“损有馀而补不足”即可回归人体的阴阳平衡状态。



图11.19 针灸

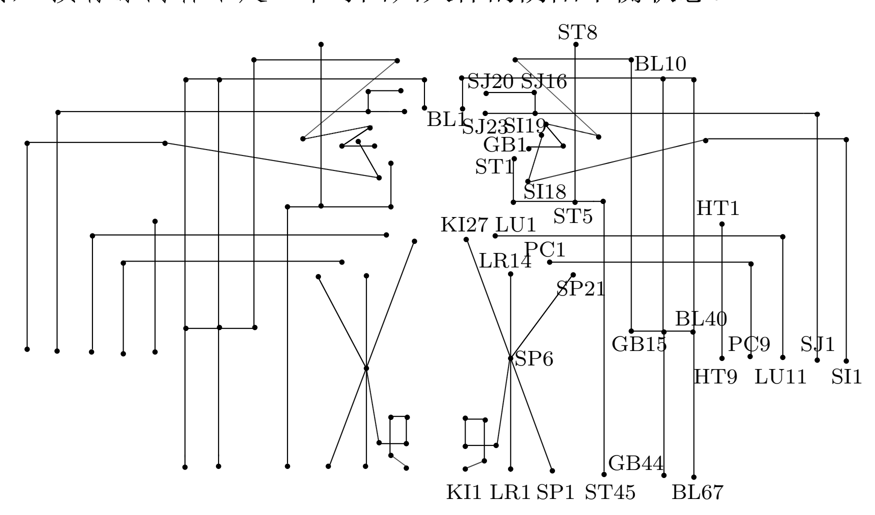


图11.20 十二经脉对应的平衡流G^{L^2}

3.3.人体流元模型. 中医理论认为，人体上十二经脉与任督二脉上的气血运行对应一个人的“生”。欧阳博士告诉惠子，人体十二经脉上的气血运行可以抽象为一个平衡流$G^{L^2}[t]$，如图11.20所示，即以人体十二经脉上的穴位为节点，以穴位间经脉为边形成一个图G，标号映射$L^2: v \in V(G) \to L(v) + iL'(v)$，$L: (v,u) \in E(G) \to L(p) + iL'(p)$。这里，$p$为穴位$v$到$u$在经脉上的一点，$L(p), L'(p)$分别为点$p$处的阳气和阴精量。由中医理论，阳气和阴精在人体十二经脉上任一穴位$v \in V(G)$处自然遵从连续流守恒定律。

（1）**十二经脉运动方程.** 在人体十二经脉对应的平衡流$G^{L^2}[t]$中，对任一点$v \in V(G)$，边$(v,u) \in E(G)$，$L(v)$和$L(v,u)$是经脉上点位p和时间t的函数，而十二经脉上任一点p可由欧氏空间$\mathbb{R}^3$中的坐标$\mathbf{x}$刻画。这样，一个人在引力场，特别是地球引力场中的状态可由人体十二经脉形成的平衡流$G^{L^2}[\mathbf{x}, t]$ 刻画。这时，假设人在引力场中的Lagrange量为$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$，则由Lagrange场上的流元方程，人体十二经脉在引力场中的动态行为由方程

$$\frac{\partial G^{\mathcal{L}^2}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G^{\mathcal{L}^2}}{\partial \dot{q}_i} = \mathbf{O}, \quad 1 \leq i \leq 3 \tag{11.16}$$

刻画。这里，$G^{\mathcal{L}^2}$为人体十二经脉对应的平衡流。特别地，把一个人抽象为一个质点P，则对应于质点在引力场中的Lagrange方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \mathbf{0}, \quad 1 \leq i \leq 3。\tag{11.17}$$

一般地，如果“人法地”，人的活动范围近似为地球引力场。这时，欧阳博士告诉惠子，选用球坐标(r,θ,ϕ)，则人体十二经脉方程(11.16)可以简化为十二经脉上一点p的二阶常微分方程。首先，如图11.21 所示，坐标系$\{O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$中位于点$P$ 的一个矢量$\mathbf{r}$，$d\mathbf{r}$ 在点P 的局部坐标$\{P; \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$中展开为$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\phi r \sin\theta d\phi$，该式两边除以$dt$有$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\theta r\dot{\theta} + \mathbf{e}_\phi r \sin\theta \dot{\phi}$；其次，计算表明，人体十二经脉上任一点$p$处阳气和阴精的动能$\mathcal{T}_p^2 = \mathcal{T}_p^+ + i\mathcal{T}_p^-$、势

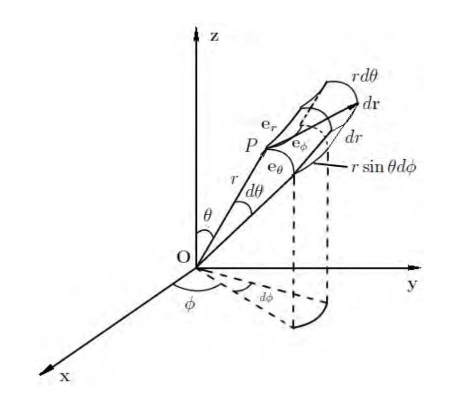


图11.21 球坐标中的微分元

能$\mathcal{V}_p^2 = \mathcal{V}_p^- + i\mathcal{V}_p^-$和Lagrange量$\mathcal{L}_p^2 = \mathcal{L}_p^+ + i\mathcal{L}_p^-$中的$\mathcal{T}_p^+, \mathcal{T}_p^-, \mathcal{V}_p^+, \mathcal{V}_p^-$和$\mathcal{L}_p^+, \mathcal{L}_p^-$分别为

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_p^+ &= \frac{1}{2}m_p^+\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}m_p^+\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right), \quad \mathcal{V}^+ = m_p^+gr,\\
\mathcal{T}_p^- &= \frac{1}{2}m_p^-\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}m_p^-\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right), \quad \mathcal{V}_p^- = m_p^-gr,\\
\mathcal{L}_p^+ &= \mathcal{T}_p^+ - \mathcal{V}_p^+ = \frac{1}{2}m_p^+\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - m_p^+gr,\\
\mathcal{L}_p^- &= \mathcal{T}_p^- - \mathcal{V}_p^- = \frac{1}{2}m_p^-\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - m_p^-gr。
\end{aligned}$$

这里，m_p^+, m_p^-分别为点p处阳气和阴精的质量。则有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}_p^+}{\partial\dot{r}} &= m_p^+\dot{r}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_p^+}{\partial\dot{\theta}} = m_p^+r^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_p^+}{\partial\dot{\phi}} = m_p^+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_p^+}{\partial\phi} = 0,\\
\frac{\partial\mathcal{L}_p^-}{\partial\dot{r}} &= m_p^-\dot{r}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_p^-}{\partial\dot{\theta}} = m_p^-r^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_p^-}{\partial\dot{\phi}} = m_p^-r^2\sin^2\theta\dot{\phi}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_p^-}{\partial\phi} = 0,\\
\frac{\partial\mathcal{L}_p^+}{\partial r} &= m_p^+r\dot{\theta}^2 + m_p^+r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - m_p^+g, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_p^+}{\partial\theta} = m_p^+r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2,\\
\frac{\partial\mathcal{L}_p^-}{\partial r} &= m_p^-r\dot{\theta}^2 + m_p^-r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - m_p^-g, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_p^-}{\partial\theta} = m_p^-r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2,
\end{aligned}$$

代入(11.16)中，则在地球引力作用下十二经脉上任一点p的阳气和阴精运动方程为

$$\left\{\begin{aligned}
\left(m_p^+ + im_p^-\right)\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + g\right) &= 0,\\
\left(m_p^+ + im_p^-\right)\left(r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)\right) &= 0,\\
\left(m_p^+ + im_p^-\right)\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right) &= 0
\end{aligned}\right.$$

或进一步简化为

$$\left\{\begin{aligned}
\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + g &= 0,\\
r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) &= 0,\\
\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right) &= 0。
\end{aligned}\right. \tag{11.18}$$

注意，方程(11.18)是人体十二经脉上任一点在地球引力场而非万物引力场作用下的运动方程，即是在局部引力作用下的运动方程。

(2) **十二经脉针灸模拟.** 人体十二经脉运行是平衡流G^{L^2}的一个例子。欧阳博士解释说，人体遵“道”而“行”的根本在于十二经脉中阳气和阴精的阴阳平衡。这样，中医针灸是一种自然回归人体阴阳平衡的方法。那么，中医针灸这种‘损有余而补不足’是否可由平衡流G^{L^2}定量刻画或模拟呢？答案是肯定的！欧阳博士解释

说，正常人体十二经脉上任一点的阳气和阴精是阴阳平衡的。这样，如果在十二经脉上的某一点不平衡，可以用微针在相应经脉上的穴位刺入，调整经脉中的气血运行。一般地，微针尖顺着经脉的走向而刺是“补”；微针尖逆着经脉的走向而刺是“损”或“泻”。同时，针刺深浅应适度。《黄帝内经.素问》刺要论篇中，黄帝想了解针刺要领，岐伯回答说“病有浮沉，刺有浅深，各至其理，无过其道。过之则内伤，不及则生外壅，壅则邪从之。浅深不得，反为大贼，内动五藏，后生大病”，意思是病位有在表在里之分，对应有针刺浅刺深的不同，病位在表的应当浅刺，在里应当深刺，均应刺到病位所在一定的深度。针刺得太深会损伤内脏；针刺得太浅不仅达不到病位，反而会使气血壅滞，给病邪入侵造成可乘之机，给人体带来更大危害，五脏功能紊乱，继而发生更严重的疾病。这时，假设在十二经脉上某一点处阳亏（或阳胜）量为$\mathbf{A}$，则该点上阴胜（或阴亏）量一定是$-\mathbf{A}$，需要增补（或减损）的量为$A-iA$才能回归阴阳平衡。中医针灸中的这种补损方法可以一般化，即在流元G^L的任一点$v\in V(G)$上定义输入运算$O(v)=\mathbf{A}-i\mathbf{A}$或输出运算$O(v)=\mathbf{A}-i\mathbf{A}$，以调整节点$v$处的阳气和阴精量，如图11.22所示。

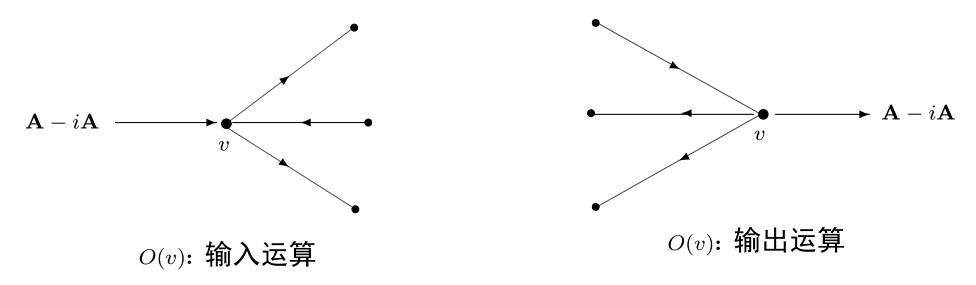


图11.22 流元输入输出运算

这里，输入、输出既可以视为针刺，也可以刻画外邪侵入人体。这样，如果G^L是由平衡流G^{L^2}中s个节点$v_i\in V(G)$，$1\le i\le s$上施以输入（输出）运算O而得的一个连续流，输入（输出）量分别为$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_s$，则在理论上，只需在节点$v_i\in V(G)$，$1\le i\le s$上施以输出（输入）运算$O$，输出（输入）量分别为$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_s$即可使$G^L$回归为平衡流$G^{L^2}$。如果记所需$O$运算的最小次数为$\varpi\left(G^L\right)$，则有$\varpi\left(G^L\right)\le s$。

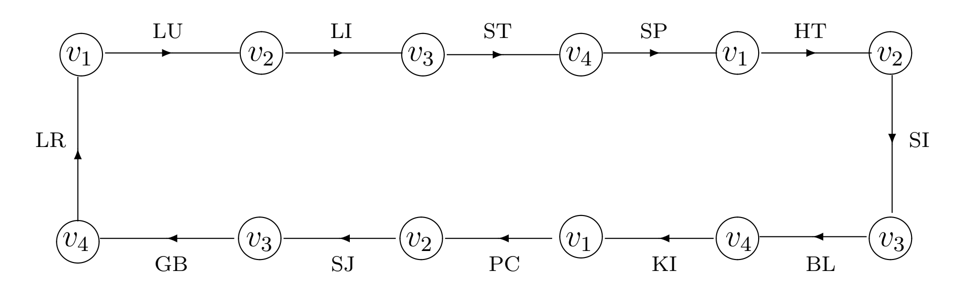


图11.23 十二经脉气血走向

注意，人体十二经脉中的气血运行遵循的走向，是手三阴经从胸走手，手三阳经从手走头，足三阳经从头走足，足三阴经从足走胸的走向，从肺经开始逐经相传，至肝经而终，再由肝经复传入肺经。这样，一个人的胸部、手部、头部和足部是十二经脉间相互搭接或周转场，定义节点v_1 =人的胸部, v_2 =人的手部, v_3 =人的头部和v_4 =人的足部，则十二经脉气血在人体上的走向如图11.23所示。将人体十二经脉上的穴位视为节点，气血走线视为边，图11.20中的十二经脉经在引入节点$v_1 - v_4$后对应于一个连通图G，且由十二经脉的气血分布和结构形式可进一步确定图G的结构。为此，注意手太阴肺经（LU）、手少阴心经（HT）、手厥阴心包经（PC）、足太阴脾经（SP）、足少阴肾经（KI）、足厥阴肝经（LR）、手阳明大肠经（LI）、手太阳小肠经（SI）、手少阳三焦经（SJ）、足阳明胃经（ST）和足少阳胆经（GB）经脉的气血运行对应的结图构是路，足太阳膀胱经（BL）的气血运行对应的图结构是一个圈上附着两条路。故此，人体十二条经脉间的气血运行对应的图G结构见图11.24，其中的P_k表示长度为$k-1$的路。

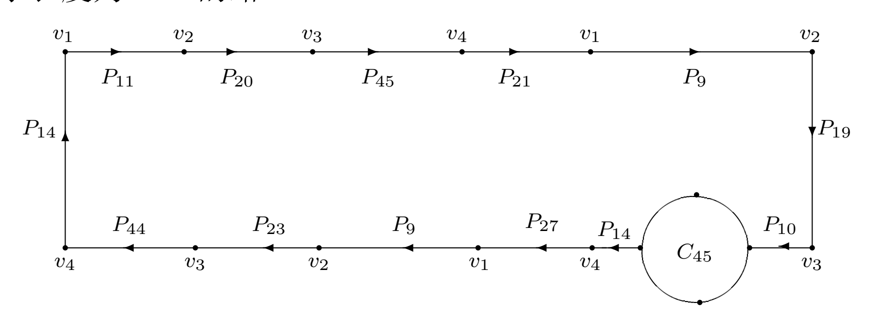


图11.24 十二经脉气血输运图

那么，是否可由十二经脉气血输运图G确定输入、输出运算O的次数$\varpi(G^{L^2})$以使G^L回归一个平衡流呢？答案是肯定的！欧阳博士解释说，一次输入输出运算O对应的恰是一次针刺，可由图G的结构确定$\varpi(G^{L^2})$。例如，$\varpi(P_n^{L^2}) = 1$，$\varpi(C_n^{L^2}) = 1$但$\varpi(K_n^{L^2}) = n-2$，即对n阶完全图$K_n, n \geq 3$最多进行$n-2$次输入输出运算O即可使K_n上的一个非平衡流成为平衡流$K_n^{L^2}$。一般地，假设G是一个阶数≥ 3的连通图。对任一顶点$v \in V(G)$，$[v]_p$表示G中连接点v的路导出的子图。这时，如果G^L是由运算O作用一个平衡流G^{L^2}得到的连续流且存在顶点$v^1, v^2, \cdots, v^{k_0} \in V(G)$使得

$$G \setminus \left\{ \left[v^1\right]_p, \left[v^2\right]_p, \cdots, \left[v^{k_0}\right]_p \right\} = \left(\bigcup_{i=1}^{k_1} C_{n_i} \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{k_2} P_{n_j} \right) \bigcup \left(\bigcup_{l=1}^{k_3} K_1 \right), \quad (11.19)$$

即在图G中去掉顶点$v^1, v^2, \cdots, v^{k_0}$及其关联的路后为$k_1$个圈、$k_2$条路和$k_3$个孤立顶点的并图，则有

$$\varpi\left(\overrightarrow{G}^{L_2}[t]\right) \leq k_0 + k_1 + k_2 \text{。} \quad (11.20)$$

欧阳博士告诉惠子，由11.24可知人体十二经脉气血输运图是两个圈重合一段弧的并图。这样，由(11.20)对十二经脉图G有$\varpi(G^{L^2})\leq 4$的结论，即理论上，选择十二经脉上的四个穴位针刺可使气血阴阳不平衡转为平衡。实践中，一些医生更愿遵从《黄帝内经.灵枢》中的指引，对病位所在经脉手足上的穴位，即“手不过肘、足不过膝”分别刺针，针刺点位可能大于4但疗效更显著。

惠子小时候嫌中药苦，长大后内心对中医药一直有些排斥，听了欧阳博士的解释后恍然大悟：“爸爸，把人体运行看作一个平衡流G^{L^2}有点神奇，您能告诉我古人是怎么发现这种对应关系的吗？”欧阳博士告诉她，中医药是中国古人在“天人合一”思想指引下遵“道”而“行”的产物，是中国古人长期“人法地”、“神农尝百草”和效法其他动物“道”的产物。即便如此，人体十二经脉和奇经八脉是怎样发现的仍是个谜！有人说是中国古人“以痛为腧”经年累积，不断总结的产物；也有人说道家修炼入定后能内视到十二经脉上的气血运行，没有普遍认可的答案，因为即便是在现代科学仪器下也观测不到十二经脉和奇经八脉上的气血走向，似不是一种“物理实在”但又在真实地影响人“生”，这又回到人类认知中的一个基本问题，即“是不是只有那些能为人感知的事物才是物理实在？”答案似乎又不是这样！否则，又怎样解释量子纠缠中的隐变量，怎样理解引力场、电磁场的作用效应呢！故此，中华五千多年的文明史表明，人体十二经脉与奇经八脉是一种物理实在，只是需要当代人给出进一步的科学解释，因为在万物组合思想的指引下，人体十二经脉不过是图11.24所示阶数$|G|=309-12=297$的一个平衡流G^{L^2}。顿了顿，欧阳博士问惠子：“你认为爱因斯坦引力与牛顿引力之间是什么关系呢？”惠子回答说：“牛顿引力是一种真实的力但爱因斯坦引力是空间弯曲效应，不是一种真实的力。”欧阳博士告诉惠子:“这是对引力的一种误解，难不成牛顿与爱因斯坦两人中有一个人的理论是错的？当然不是！牛顿引力是按力作用引入的，与量子纠缠中的信息传递一样具有超距作用性质，遵从一般的向量运算规则，好理解；爱因斯坦引力的实质是在解释牛顿引力中的超距作用，即万物在牛顿引力的作用下，空间不是人在地球表面感知的平直空间而是弯曲空间，这种弯曲效应是牛顿引力导致的，就连光线也不例外！两人的引力理论都是在阐释万物间的同一种作用效应。”惠子仍有些不解：“这两者的差距为什么那么大呢？”欧阳博士解释说，这二者仅是表现形式不同而已！牛顿引力是两个物体间的作用力，是一种局部理论；爱因斯坦引力是物体数$n\to\infty$的情形，是在万物作用下引力的整体理论。中医和西医的关系与此类似，即中医是关于人体运行的整体理论而西医是局部理论。在应用上，一般是局部理论好用、疗效快但难免顾此失彼；整体理论复杂、见效慢但更符合“道”，这与中国古人对人与自然的关系，即“天人合一”的认知和人文环境相适应。

第4节 农耕文明

人认知万物的宗旨是与自然和谐共生，遵“道”而有德，构建人类文明。这当中,“文明”中的“明”是前提，是“明白、显示”的意思；“文”是本质，是物象之本，其形式表现是文化，即指人类由科学、技术等手段适应自然，由社会行为规范调节人的行为，以最大限度地满足人的生存需要，与自然和谐共生的文化体现。那么，老子在《道德经》中为什么阐释“人法地，地法天，天法道，道法自然”呢？欧阳博士解释说，因为老子认为，人遵“道”而“行”的根本在于与效法地球上的生物而“生”，而人与地球上其他生物的区别在于人在满足“生”的需求时具有主观能动性。人的这种主观能动性不一定是遵“道”而“行”，需要加以自我约束。农耕文明的本质，是人在行事时的“日出而作，日入而息，凿井而饮，耕田而食”，如图11.25 所示，是中国古人遵“道”而“行”地在顺应天地之“道”，即中国古人的法地、法天、法道而“生”的体现。那么，为什么说中国农耕文明是人遵“道”有德的体现呢？欧阳博士解释说，因为中国农耕文明是人遵从天道中的“时令”和农作物生长之“道”，在田园上辛勤劳作而“生”，是一种自给自足、无需商品交换的人类文明，体现的是“天人合一”的人“生”之道。



图11.25 水稻田

4.1.地球生物之道. 地球上的生物，包括动物、植物和微生物大约200万种。这当中，动物大约150万种，植物大约35万种，是人肉眼所见的主要生命形态，绝大多数生物生存在地球陆地之上和海洋表面之下大约100m厚范围内。一般地，将地球上有生命活动的领域及其居住环境称为“生物圈”，范围大约在海平面以上10000m至海平面以下11000m，即大气圈的下层、岩石圈的上层、整个土壤圈和水圈。注意，人眼所见的主要生命形态是地球上的动物和植物。这样，遵从“人法道”而“生”是人效法地球上其他生物的“生”，因为一方面，人是“道”在地球上“三生万物”的产物，受限于地球；另一方面，地球上的其他生物不具有人的主观能动性，它们的“生”是顺应“道”而“生”，人的应“道”而“生”需要效法其“生”以顺应自然。

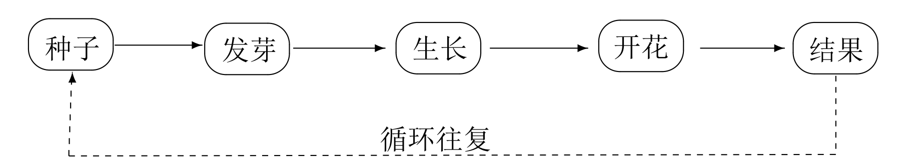


图11.26 草本植物生长

(1) **植物生存之道.** 一般地，植物的生长离不开充足的阳光、适宜的温度和土

壤。这当中，光与绿色植物间的光合作用产生叶绿素，促使植物生长；适宜的温度能促进光合作用；而土壤为农作物提供根系的生长环境，以储存水分、空气和矿质元素等农作物生长所需条件。植物叶子在果实成熟后“叶落归根”，一段时间后腐烂融入土壤，为植物生长提供营养；种子成熟后掉在地上或是为其他动物食物而迁移到他处生根发芽，进行下一次的生命轮回，如图11.26所示。不同植物有不同的环境、土壤条件和生长周期。草本植物依四时变化为三季生物，遵循“春发芽、夏生长、秋结果、冬储藏”的唯象规律。老子的“人法地”意味着人可以模拟野外草本植物的生长，在同样的气候、环境条件下有计划地种植“五谷”等草本植物， 由野外采集发展为人有计划地批量种植与供给。

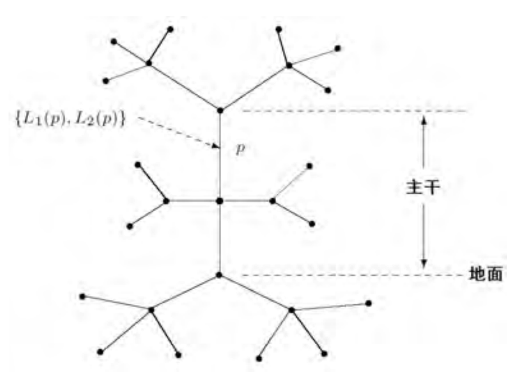


图11.27 植物营养输运流T^L

植物中同样存在着维系植物“生”的营养输运系统。一般地，植物茎叶所需要的水分、矿物质和养料等源于土壤，由地下的根从土壤中吸收并输送；叶靠茎、枝的支持在空间伸展，以充分进行光合作用；根依靠叶的光合作用获得其所需的有机养料，与人体经脉上的气血输运类似，形成植物上特有的营运输送系统，即树图T上的连续流T^L，如图11.27所示。这当中，点集$V(T)$中的节点为植物的叶子、主干、茎枝分叉点和根系末梢，边集$E(T)$为植物的主干、茎枝和根系，且对任一节点$v \in V(T)$和边$(v, u) \in E(T)$，映射$L : v \to \{L_1(v), L_2(v)\}$，$L : (v, u) \to \{L_1(p), L_2(p)\}$。这里，$p$为节点$v$与$u$间主干、茎枝或根系上的一点，$L_1(p), L_2(p)$为点$p$处的上行、下行营养量，不一定平衡，分别由植物根系由地下和叶子由地上的光合作用吸收。不同树上的叶子、分叉和支杆不一定相同，对应的树T不一定同构。同时，与人体十二经脉上的气血运行不同，树T上的节点系树上分叉点的抽象，并非人体经脉上固定的穴位点，且随着时间t的增长不断增加，直至生命的终结。欧阳博士告诉惠子，由中国古哲学的阴阳理论，一颗树体上也应存在着与人体经脉上气血运行类似的经脉气血运行和穴位点，以维系着这颗树的生命运行。

(2) **动物生存之道.** 一种动物，无论卵生还是胎生都是“三生万物”中“道”的产物。不同生物间由一系列吃与被吃的关系联系在一起，构成食物链或动物“生”的营养链，如以植物为食的兔子、牛、羊，以肉食为食的狼、老虎、狮子，以碎食为食的鸟、鱼、虾，以及跳蚤、细菌、病毒等寄生物，均以固定的途径获取身体所需营养遵“道”而“生”。在不违反动物生存之道的前提下，人可以对野生动物驯化，如牛、马、羊、猪等哺乳类、鸟类、鱼类等由野生驯化为家畜，使其野性逐渐改变并顺

从人的驱使。这当中，一是对动物生存、习性和繁衍规律的把握；二是对动物生存环境、条件的模拟。可有计划地分类驯化、批量饲养和育种，以满足人类所需。同时，保护自然界中一些濒危动物，实现生物的多样性。

任一个动物的生存离不开觅食获取营养物，包括水、糖类、蛋白质、脂类、维生素和矿物质。针对不同的食物，不同动物的消化过程略有不同，但本质上，都是经由食物吸取营养，以提供动物所需的能量而“生”，表现出的觅食、贮食、攻击、防御、领域、繁殖、社会、通讯等行为特征，是在人眼中，动物为适应环境所表现出的唯象行为，是人掌握动物生存条件和习性，进行生存环境模拟，有计划地组织饲养的前提。一般地，食物进入动物口腔由牙齿磨碎混合，吞咽入胃，在胃酸和胃肠蠕动的作用下对食物给予初步溶解，进入小肠，吸收水、电解质、蛋白质、脂肪等营养物，提供身体不同器官营养所需，最后将废弃物排出体外。

那么，动物体上是否也有十二经脉气血运行呢？欧阳博士解释说，动物体与人体一样是“道”的产物，只要动物和人体一样有五脏六腑，其饮食中的营养也是经由胃、脾、肺等脏腑消化、吸收将所需营养输送全身。这样，中医关于人体运行理论，即《皇帝内经.素问》经脉别论篇中刻画人体的营养输送，即“饮入于胃，游溢精气，上输于脾；脾气散精，上归于肺；通调水道，下输膀胱；水精四布，五经并行。合于四时，五脏阴阳，揆度以为常也”就可适用于动物体，即动物体上也存在对应的十二经脉和奇经八脉。中医中的兽医正是基于这种哲学思考，提出了牛、羊、马、狗等牲畜体上的十二经脉和奇经八脉。例如，狗体上的足太阴脾经（GB）见图11.28。这样，按中医中的兽医理论，动物体的实质是其十二经脉和任督二脉上的气血运行，对应于一个节点数为362的平衡流G^{L^2}，满足Euler-Lagrange方程

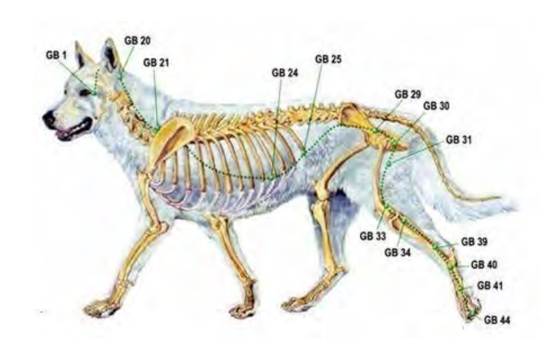


图11.28 狗体足太阴脾经

$$\frac{\partial G^{\mathcal{L}^2}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G^{\mathcal{L}^2}}{\partial \dot{q}_i} = \mathbf{O}, \quad 1 \leq i \leq 3。 \tag{11.22}$$

这里，$\mathcal{L}$为Lagrange保守力场或近似地取为地球场中的Lagrange量。

4.2.人法道而行. 惠子问欧阳博士：“人为什么要‘法道’而不能按其主观意愿随意而‘行’呢？”欧阳博士解释说，人是应“道”而“生”，法道而行或有德是“三生万物”中“道”的体现。否则，不得“生”又和谈“行”呢！这主要表现在：一是在生存条件上，人“生”在地球上是地球上有适宜人“生”的气候、水和食物等生存条件，人为毁损“道”在地球上为人“生”准备的水、食物和生存条件背“道”而行，

人“生”的条件不复在，何谈人的“生”与“行”；二是人作为地球上一种特定生物，法“道”而行是“道”在“生”人或是人体的“生”有特定结构、功能和营养需求，有特定的生存条件，背“道”而行，如饮食人体无法消化、提取营养的物品或毒品，不仅不能为人体提供营养还会损毁人体组织或功能，直至终结人体运行。

那么，惠子又问欧阳博士：“这样一来，人又应怎样法道而行呢？”人法道而行的根本在于遵“道”有德。欧阳博士解释说，中国农耕文明是“人法地”进而“人法道”的典型代表，即人的生产活动效法地球上的其他生物遵“道”而行，不侵扰自然或是在容许范围内与自然协调共生的“行”，这是人在有限认知“生”，即“道可道，非常道；名可名，非常名”的条件下遵“道”有德的中国方案，体现在《道德经》第十二章“是以圣人为腹不为目，故去彼取此”和第十二章“为无为，事无事，味无味”中，意思是人需要遵“道”有德，但求安饱不追求声色，要摒弃人的“贪欲”，遵“道”有德地作为，以求安饱的心态去品食物味道。

(1) **衣食住行.** 中国农耕文明的主要特征在于人的一切活动围绕人的“生”，即“衣食住行”开展。这里，“衣”指“穿衣”。从干草、树叶、树皮、兽皮裹身御寒等本能之“道”到麻葛编织成衣物，到组织种桑养蚕、抽丝织帛做成衣裳，体现的是“衣”的御寒、遮雨和遮羞功用；“食”指“饮食”。从摘野果、狩猎的“生”到效法“五谷”和“马、牛、猪、羊”等的“生”组织五谷种植和牲畜饲养，是人体获取营养的根本；“住”指“居所”。从效法其他动物居住在树顶、山洞到挖穴而居，再到借天然材料或烧制砖瓦，搭建茅草屋、砖瓦房等，体现的是“居所”避风雨、免受其他动物侵袭的功能；“行”指“出行方式”，从步行、骑马等牲畜出行到座马车、牛车出行等，体现的是借牲畜之“行”而缩短时空距离的功用。故此，中国农耕文明是人与自然协调共生，遵“道”而“行”的范例。



图11.29 农耕劳作图

(2) **行业产业.** 中国农耕文明以五谷种植和猪、马、牛、羊、鱼等养殖为主，工业生产服务于农业生产，以满足人的“生”或“为腹不为目”，不侵扰自然或是在容许范围内与自然协调共生的手工业或作坊为主，包括由“衣”延申的丝织与棉纺织技术，由“食”与“住”延申的青铜、铁、黄金等金属冶炼、锻造技术、陶瓷烧制技术和营造法门，以及由天然木材和兽皮造车辇、造船技术等。

(3) **社会事业.** 中国农耕文明对应的社会同样包括医疗卫生、人文教化和社会行为规范等社会事业。这当中，中医及其中的兽医为农耕社会发展起到了保障作用，系在人体与其他动物体遵“道”而“行”哲学思想下构建的医学理论，是对人和动

物等病体遵“道”调理的系统医学理论；人文教化的核心是教化人遵“道”而“行”，这在中国农耕文明时的诸子百家中均有体现。例如，老子《道德经》第七十七章中的“天之道，损有馀而补不足；人之道则不然，损不足以奉有馀”，即“人之道”与“天之道”相反，是“损不足以奉有馀”或“富者愈富、穷者愈穷”而背离天地“以万物为刍狗”之“道”。在这种情形下，需要对人施以教化遵“道”而“行”，这就是《道德经》第三章中的“不尚贤，使民不争；不贵难得之货，使民不为盗；不见可欲，使民心不乱。是以圣人之治，虚其心，实其腹，弱其志，强其骨”，即不人为推崇“贤人”就不会有嫉妒和争夺，不人为看重稀有物品就不会有盗贼出现，不展现诱导人“欲”的事物人心就不会背“道”而“行”。故此，圣人在治理社会时会抚慰人的心灵，弱化其“争、盗、乱”的心念，让其拥有“生”的需求、强壮的体格而弱化其“志”，因为人的“心志”与“道”相背，进而对人遵“道”而“行”地施以教化；中国农耕社会是一个由“士农工商”，即士大夫、农民、工匠人和商人构成的社会，规范社会各阶层的人遵“道”而“行”是社会统治中的一个核心问题。《道德经》第三章中的“天地不仁，以万物为刍狗；圣人不仁，以百姓为刍狗”即是效法天地“不仁”的统治之道，因为“仁”是背离天地“以万物为刍狗”的行为。同时，第六十四章中的“是以圣人欲不欲，而不贵难得之货；学不学，而复众人之所过；能辅万物之自然，而弗敢为”，即圣人有所欲有所不欲，有所学有所不学，不看重稀有物品，补救众人行事中的过错，助成万物，包括人遵“道”而“行”地协调共生。欧阳博士问惠子：“你知道中国农耕文明中为什么有祭祀天地的活动吗？”惠子反问说：“不是认为祭祀是一种迷信活动吗？”不能这样认为！欧阳博士解释说，“道可道，非常道”，人的“行”必须有敬畏和约束，这是今天的社会缺失而最需要弥补的。表面上看，祭祀天地是一种迷信活动，实则是一种人文教化，是人内心对天地的感恩和敬畏，以祈祷来年的风调雨顺。同时，这还是在唤醒人的反思，特别是在一些大灾大难面前，是人内心对既往“行”的反思，检讨既往的哪些“行”是在背“道”而“行”需要改进，以顺应天地之道，这是中国农耕文明的精髓。

第5节 中华科学

一些人以还原论为准，认为任何一件客观事物T都可以细分为强子、介子或轻子、夸克等基本粒子进行精准认知，并以此为由认为中华大地上没有科学是不正确的，是对科学或还原论的误解！欧阳博士解释说，还原论的根本在于寻找事物T变化的最小基元但不一定是构成物质的基本粒子，生物学就是针对这种观点的一个反例，因为基因DNA和细胞都不是基本粒子而是生物大分子，是由基本粒子组合的产

物。更进一步，即便是对一个生物T细分为细胞和基因也不一定有利于对其真实的认知，且在大多时候还会人为增加认知的复杂程度，这是中国哲学特有的观点，即“凡事皆有度”，以能把握事物真实为准。这里，一件事物T的“真实”指事物T在过去、现在或将来真实存在的“状态”而不论其是否为人类观测或理解。那么，什么是科学呢？欧阳博士告诉惠子，科学是人对万物法则或“道”在“物”上体现规律的知识，是人对物“道”的局部认知，因为“人法地”认知能力有限，但只要是对客观事物规律的认知都属于科学的范畴。例如，人们用天文望远镜拍摄的30万光年远的宇宙照片研究宇宙属于科学范畴吗？答案是肯定的！欧阳博士解释说，这是对宇宙30万年前的状况研究，属于科学范畴。



图11.30 宇宙尽头在哪里

那么，中华科学属于什么科学呢？欧阳博士告诉惠子，概括地说，中华科学是在“人法地，地法天，天法道，道法自然”哲学思想指引下的，以天文学、地理学、农学、中医药学、建筑学等为基础，以服务于农耕文明为根本的科学，包括：①天文学，由地球、太阳、月亮三者的相对关系创立对应农时、人体运行规律的“二十四节气”和“十二时辰”；②数学，发现几何学中“勾三股四弦五”的勾股定理并由此测算农田面积、计算与太阳的距离；发现代数学中的中国剩余定理；创立“割圆法”，即增加圆的内接多边形边数计算圆面积，蕴含极限和定积分思想并应用于圆周率π的计算等；③物理学，发现杠杆原理、浮力、声学和光学中的一些重要结论，包括光影关系、小孔成像、木结构作用力分析等；④农学，发现天、地、人与农业的关系，“五谷”栽培和牲畜饲养等；⑤中医药学，发现人体五脏六腑与十二经脉和奇经八脉、阴阳五行的对应关系，中医用药和针灸对人体、动物体治病理论；⑥地理学，对中国陆地、山川上的物产、医药、地理信息采集和水道流经对农作物灌溉、收成的作用分析等；⑦建筑学，创立了以木制建筑，如“斗拱”建筑为代表，形成了中国特有的建筑形式、布局、设计、施工规范等；⑧与“天人合一”相关的其他学科，如中国养生与营养学等，可谓中华科学成就辉煌，不愧为一个文明古国。

但是，欧阳博士话题一转说，这种分门别类地总结中华科学的成就尚不足以展现中华科学的“魂”。惠子问欧阳博士：“爸爸，什么是中华科学的魂呢？”欧阳博士告诉惠子，中华科学的“魂”在于回答了由“物”悟“道”或科学的宗旨，是促使人类遵“道”而“行”，也就是今天说的人与自然和谐共生，核心在对事物态及变化的整体把握而不在于对事物无限细分地“还原”。为此，中国人在对“物”理整体认知的基础上，以《易经》六十四卦象及“易”模拟万物的态势及变化规则，这才是中国

人在科学发展史上的贡献，是中华科学的灵魂。惠子听后一愣，问欧阳博士："《易经》不是一本算命的书吗，怎么能是科学呢？"欧阳博士告诉她，如果《易经》是一部算命的书，孔子晚年为什么还要为《易经》作《十翼》，并告诉门人"加我数年，五十以学易，可以无大过矣"呢，因为孔子认为《易经》与"天地准，能弥纶天地之道"，意思是《易经》是在模拟"天道"，涵盖了天地运行的法则，是一部"物理"经典，故对《易经》写下《十翼》，给《易经》插上翅膀，作为人文教化或人遵"道"而"行"的教育经典。

5.1.物态对应. 中国古哲人认为，事物是在相互作用中变化与发展的，这种作用可以视为是一种场作用。这样，"三生万物"中的"生"是"阴阳"态或场间的相互作用导致的"生"。以一个连贯的横道"—"表示阳态，称为"阳爻"，记为$\mathbf{A}^+$；以一个不连贯的横道"--"表示阴态，称为"阴爻"，记为$\mathbf{A}^-$，则"三生万物"中的"三"可各用一个横道，即三个爻或是三个场间的作用表示。这样，由于每个爻为阳态$\mathbf{A}^+$或阴态$\mathbf{A}^-$的不同，共有$2^3=8$种物态组合，如图11.31所示，分别称为乾卦、坤卦、震卦、艮卦、离卦、坎卦、兑卦和巽卦，是阳态和阴态在三个位置上的组合态。

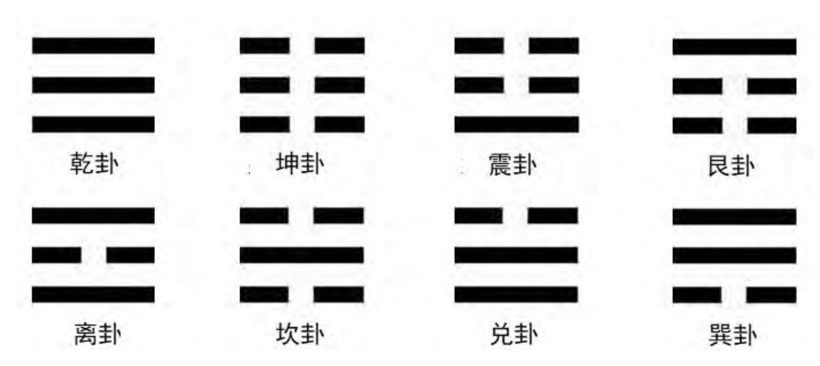


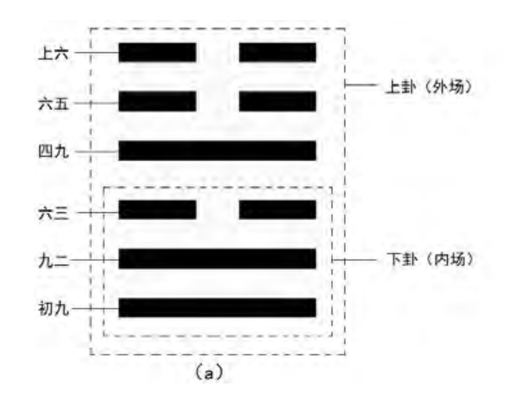
图11.31 八卦单卦图示

中国古哲学认为，万物的态势可由天、地、雷、山、火、水、泽、风等八种自然现象的态势组合而成。这当中，"天"的态势是行健、自强不息，"地"的态势是包容或承载万物；"雷"的态势是震动唤醒万物冬眠；"山"的态势是阻挡，水、风遇山转向；"火"的态势是让燃烧热能向四周传播；"水"的态势是往低处流，形成表面平坦但深浅不一的"陷阱"或险情；"泽"的态势是表面平静，但只要开一个口子水就会流往他处；"风"的态势是悄无声息地吹动。那么，中国古哲人是怎样将这八种自然现象抽象为八个卦象上阴爻阳爻运动态势的呢？欧阳博士解释说，卦象中的三个爻态势由下向上，即初爻→中爻→上爻→初爻地往复运动，对应标号图C_3^L。由这八个卦象各自的阴爻阳爻组合，对应的自然现象为：①乾卦：取象"天"，阳爻代表元气，场态为$(\mathbf{A}^+,\mathbf{A}^+,\mathbf{A}^+)$，态势是刚健向上、自强不息；②坤卦：取象"地"，阴爻代表阴柔居下，场态为$(\mathbf{A}^-,\mathbf{A}^-,\mathbf{A}^-)$，态势是位于其他物的下面；③震卦：取象"雷"，场

态为$(\mathbf{A}^+,\mathbf{A}^-,\mathbf{A}^-)$，一个阳爻位于两个阴爻下，态势是阳爻刚健向上突破两个阴爻，引申为雷震而春雨至，万物生机勃发；④艮卦：取象“山”，场态为$(\mathbf{A}^-,\mathbf{A}^-,\mathbf{A}^+)$，一个阳爻位于两个阴爻上，态势是一个阳爻阻止两个阴爻向上；⑤离卦：取象“火”，两个阳爻内有一个阴爻，场态为$(\mathbf{A}^+,\mathbf{A}^-,\mathbf{A}^+)$，表示阳在外阴在内，外刚内柔的态势；⑥坎卦：取象“水”，一个阳爻陷入两个阴爻“水”中之行，场态为$(\mathbf{A}^-,\mathbf{A}^+,\mathbf{A}^-)$，态势是水连绵不断地流过来，表示险中有险；⑦兑卦：取象“泽”，一个阴爻在两个阳爻上面，场态为$(\mathbf{A}^+,\mathbf{A}^+,\mathbf{A}^-)$，态势是兑上有口，引申为为口舌、语言等；⑧巽卦：取象“风”，一个阴爻在两个阳爻下面，场态为$(\mathbf{A}^-,\mathbf{A}^+,\mathbf{A}^+)$，态势是巽下有风，风与风相继吹过来。注意，天、地、雷、山、火、水、泽、风等八种自然现象的出现与太阳、月亮和地球三者间的相对位置，以及天体引力场、地球磁场的作用有关，即这八种自然现象与所处地球上的方位、四季和时辰等均有关。例如，春风一般是南风，秋风一般是西北风。这样，八个卦象配上地球上的方位、四季和十二时辰，以及“五行”间的相生相克才能真实地模拟事物“此消彼长”的态势变化，如图11.31所示。这当中，先天八卦图中间的太极图是中国哲学对“天道”，即“阴阳”平衡是万物遵“道”而“行”的认知。图11.32中的方位是上南下北，左西右东，意思是乾阳上浮在南，坤阴下沉在北，东方日出居离，西方日落为坎；东北属春雷鸣居震，西南属秋风厉居巽，西北多高山居艮，东南多湖泽居兑。这八种自然现象间也存在着阴阳势力间的相互作用和转化。那么，怎样由卦象抽象模拟这种叠加作用呢？欧阳博士解释说，这时，需将一个卦象（内卦）置于另一个卦象（外卦）中观察事物变化，如图11.33（a）



图11.32 先天八卦图



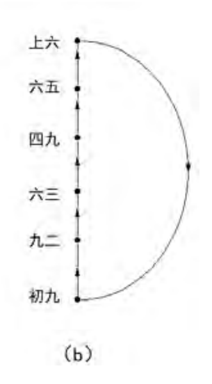


图11.33 内外卦场

所示的归妹卦（内兑外震）,是一个事物内场在外场作用下的态势变化。这里，阳爻

序号	卦名	卦象	卦场$C_6^{L_i}, 1 \leq i \leq 32$	序号	卦象	卦象	卦场$C_6^{L_i}, 33 \leq i \leq 64$
1	乾卦	天天	$(++++++)$	33	遁卦	天山	$(--++++)$
2	坤卦	地地	$(------)$	34	大壮卦	雷天	$(++++--)$
3	屯卦	水雷	$(+---+-)$	35	晋卦	火地	$(---+-+)$
4	蒙卦	山水	$(-+---+)$	36	明夷卦	地火	$(+-+---)$
5	需卦	水天	$(+++-+-)$	37	家人卦	风火	$(+-+-++)$
6	讼卦	天水	$(-+-+++)$	38	睽卦	火泽	$(++-+-+)$
7	师卦	地水	$(-+----)$	39	蹇卦	水山	$(--+-+-)$
8	比卦	水地	$(----+-)$	40	解卦	雷水	$(-+-+--)$
9	小蓄卦	风天	$(+++-++)$	41	损卦	山泽	$(++---+)$
10	履卦	天泽	$(++-+++)$	42	益卦	风雷	$(+---++)$
11	泰卦	地天	$(+++---)$	43	夬卦	泽天	$(+++++-)$
12	否卦	天地	$(---+++)$	44	姤卦	天风	$(-+++++)$
13	同人卦	天火	$(+-++++)$	45	萃卦	泽地	$(---++-)$
14	大有卦	火天	$(++++-+)$	46	升卦	地风	$(-++---)$
15	谦卦	地山	$(--+---)$	47	困卦	泽水	$(-+-++-)$
16	豫卦	雷地	$(---+--)$	48	井卦	水风	$(-++-+-)$
17	随卦	泽雷	$(+--++-)$	49	革卦	泽火	$(+-+++-)$
18	蛊卦	山风	$(-++--+)$	50	鼎卦	火风	$(-+++-+)$
19	临卦	地泽	$(++----)$	51	震卦	雷雷	$(+--+--)$
20	观卦	风地	$(----++)$	52	艮卦	山山	$(--+--+)$
21	噬嗑卦	火雷	$(+--+-+)$	53	渐卦	风山	$(--+-++)$
22	贲卦	山火	$(+-+--+)$	54	归妹卦	雷泽	$(++-+--)$
23	剥卦	山地	$(-----+)$	55	丰卦	雷火	$(+-++--)$
24	复卦	地雷	$(+-----)$	56	旅卦	火山	$(--++-+)$
25	无妄卦	天雷	$(+--+++)$	57	巽卦	风风	$(-++-++)$
26	大蓄卦	天山	$(+++--+)$	58	兑卦	泽泽	$(++-++-)$
27	颐卦	山雷	$(+----+)$	59	涣卦	风水	$(-+--++)$
28	大过卦	泽风	$(-++++-)$	60	节卦	水泽	$(++--+-)$
29	习坎卦	水水	$(-+--+-)$	61	中孚卦	风泽	$(++--++)$
30	离卦	火火	$(+-++-+)$	62	小过卦	雷山	$(--++--)$
31	咸卦	泽山	$(--+++-)$	63	既济卦	水火	$(+-+-+-)$
32	恒卦	雷风	$(-+++--)$	64	未济卦	火水	$(-+-+-+)$

表11.1 六十四卦象与卦场

用“九”，阴爻用“六”按该爻从下到上的位置称谓，如图11.33（a）中的九二、六五爻等。与八个单卦类似，将内外卦中的阴爻、阳爻视为场$\mathbf{A}^-$和$\mathbf{A}^+$，则六个爻在卦

象中按初爻→二爻→ 三爻→四爻→五爻→上爻→初爻地往复运动，六爻场这种循环运动对应一个连续流C_6^L或阴阳场循环$(\mathbf{A}^+,\mathbf{A}^+,\mathbf{A}^-,\mathbf{A}^+,\mathbf{A}^-,\mathbf{A}^-)$，如图11.33（$b$）所示，记为$(+,+,-,+,-,-)$。这样，共有$8\times 8=64$个卦象和卦场见表11.1。

中国古哲人认为，在阴阳场作用下，任一事物T遵“道”而“行”的态可由这六十四个卦场或连续流$C_6^{L_i}, 1\leq i\leq 64$刻画。记$\mathrm{Im}S=\left\{C_6^{L_i}, 1\leq i\leq 64\right\}$，$p\in S_6$为一个置换，变换$\pm: -\to +$且$+\to -$，则易知集合$\mathrm{Im}S$在变换$p,\pm$作用下不变，即

$$\mathrm{Im}^pS=\mathrm{Im}S,\quad \mathrm{Im}^{\pm}S=\mathrm{Im}S。\tag{11.23}$$

这里，卦序$C_6^{L_1}\to C_6^{L_2}\to C_6^{L_3}\to\cdots\to C_6^{L_{63}}\to C_6^{L_{64}}$体现的是“三”之后在阴阳场作用下如何地“生”万物，孔子在《序卦传》中是这样阐释的:“有天地，然后万物生焉。盈天地之间者唯万物，故受之以《屯》。《屯》者，盈也，物之始生也。物生必蒙，故受之以《蒙》。《蒙》者，蒙也，物之稚也。物稚不可不养也，故受之以《需》。《需》者，饮食之道也。饮食必有讼，故受之以《讼》。讼必有众起，故受之以《师》。《师》者，众也。$\cdots$，有过物者必济，故受之以《既济》。物不可穷也，故受之以《未济》终焉”，以阐释事物循环往复变化的规律。

5.2.物态变化. 中国古哲学认为，事物态的变化是事物内阴阳场间作用，即事物的阴场强由盛到衰、阳场强由衰到盛，接着阴场强再由衰到盛、阳场强由盛到衰，$\cdots$，这样周而复始地循环变化的结果。如果用函数$f^-(t)$和$f^+(t)$分别表示阴场、阳场在时刻t的场强，阴阳场这种随时间t变化的过程可表示为

$$\begin{aligned}&\cdots\min f^-\to\max f^-\to\min f^-\to\max f^-\to\min f^-\cdots,\\&\cdots\max f^+\to\min f^+\to\max f^+\to\min f^+\to\max f^+\cdots\end{aligned}\tag{11.24}$$

且在任意时刻t有$f^+(t)+f^-(t)=c$为一个常量。这样即有，如在时刻t^-函数f^-达到最大则f^+最小。反之，在时刻t^+函数f^-达到最小则f^+最大。这种此消彼长的变化关系，即《道德经》第四十章中的“反者道之动，弱者道之用”，可用一个2-元组$\{f^+,f^-\}$刻画。对应地，任一事物T的这种循环往复地变化过程可用一个闭曲线C刻画，且C上的任一点标定一个函数对$\{f^-(p),f^+(p)\}$。 换言之，在阴阳场作用下，任一事物T的变化全过程可用一个2-元组$\{C,L^2\}$刻画。这里，C是一个简单闭曲线或圆$C[t],t\in\mathbb{R}$，上面有不可数个点，且对任一点$p\in C$有$L^2: p\to\{f^-(p),f^+(p)\}$。当然，为简单起见，也

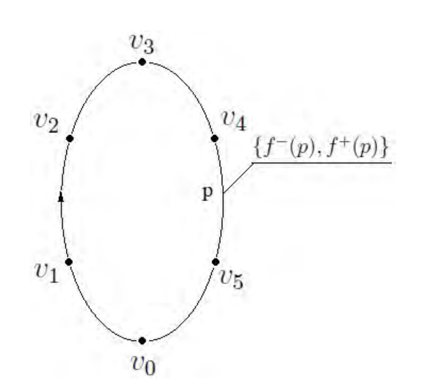


图11.34 物态上的平衡流

可以在曲线C上取n个点刻画2-元组$\{C, L\}$的变化。这时，闭曲线C是一个圈C_n，对应的2-元组$\{C, L^2\}$是平衡流$C_n^{L^2}$，如图11.34所示。那么，在闭曲线C上取多少个点合适呢？欧阳博士解释说，事物中的阴阳场作用具有中心轴对称性，点数n的取值越大，事物变化过程就刻画得越细致但需要的观测点位和数据就越多，一般是沿着阴阳场的中心轴对称布点。

那么，为什么《易经》中每一幅卦象都是用六个爻而不是五个或七个爻呢？欧阳博士告诉惠子，任何一件事物的变化过程可大略地分为始、显、顺、升、成和衰等六个阶段。例如，宇宙经由“道生一，一生二，二生三，三生万物”创世，可分为混沌、创世、暴涨、平稳、顶峰和坍缩等六个阶段，对应于《易经》乾卦的“天行健”：初九是勿用“潜龙”，对应宇宙混沌初始；九二是在田“现龙”，对应宇宙形象现世；九三是乾乾“惕龙”，对应宇宙暴涨；九四是度势“跃龙”，对应宇宙平稳扩张；九五是在田“飞龙”，对应宇宙扩张极限；九六是有悔“亢龙”，对应宇宙坍缩，并开始下一轮循环，即万物“由摇篮到坟墓”的演化遵循“六道轮回”的规则。

这样，一件事物T的态势变化$\{C, L^2\}$可由映射$\iota: T \to \mathrm{Im}S$，并由平衡流$C_6^{L^2}$走势和阴爻场与阳爻场间的作用得出事物$T$态势变化的模拟，包括：①平衡流$C_6^{L^2}$的走势是$v_0 \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_0$；②内场与外场遵从“五行”相生相克关系，即金生水、水生木、木生火、火生土、土生金和金克木、木克土、土克水、水克火、火克金的关系。例如，$C_6^{L_5}$需卦$(+++-+-)$内场乾卦属金，外场坎卦属水，金生水故“利涉大川”；$C_6^{L_{34}}$大壮卦$(++++--)$内场乾卦属金，外场震卦属木，金克木需要“利贞”守正；③爻场间遵从“一阴一阳之谓道”，阴场在阳场下态势顺利，阴场在阳场上态势有阻；④内卦场中的初爻、二爻、三爻与外卦场中的四爻、五爻、上爻为相应关系，遵从“同性相斥、异性相吸”，一阴一阳态势顺利，两阴或两阳态势受阻；⑤卦场中的初爻、三爻和五爻为阳位，二爻、四爻和六爻为阴位。阳爻居阳位、阴爻居阴位称为“正”。反之，则称爻位为“失正”。卦场中的二爻、五爻卦位称为“中”位，阳爻居中位象征刚健之德，阴爻居中象征柔顺之德。例如，$C_6^{L_{63}}$既济卦$(-+-+-+)$是既中且正、上下相应的卦象；⑥由一个卦场重新组合可得一些相关卦场。一般地，取五四三爻为外卦，四三二爻为内卦组合称为互卦。例如，$C_6^{L_{31}}$咸卦$(--+++-)$的互卦为$C_6^{L_{23}}$剥卦$(-+++++)$；将一个卦场中的动爻由阴变阳或阳变阴得到的卦场称为变卦等。例如，$C_6^{L_{15}}$谦卦$(--+---)$六五为动爻，变卦为$C_6^{L_{39}}$蹇卦$(--+-+-)$等。

欧阳博士告诉惠子，中国古哲人认为，把握事物变化态势首先要确定事物在阴阳场作用下属于$\mathrm{Im}S$中的哪一个卦场，再确定事物当下哪一个爻场为动爻，进而由爻场的阴阳变化判断事物的态势变化。惠子问欧阳博士：“如果确定不了卦场或爻场

怎么办呢？”欧阳博士告诉惠子，《易经》作为中华科学的“魂”，由“天道”的阴阳平衡构建了六十四种卦象或平衡流$C_6^{L^2}$模拟事物整体态势，核心在于确定事物遵从六十四卦中的哪一卦以及哪个爻是动爻，这是中国古哲人系统认知事物的方法。在人力不能及的状态下，不能准确给出事物对应的卦场或爻场，即存在不可知事项影响事物变化，这时，需摒除人的主观思维去模拟事物遵“道”而“行”的态势演化。例如，孔子在《系辞传》中阐释的“大衍数法”取五十根蓍草中的四十九根随意分成两堆，模拟太极、两仪、三才和四时，四根四根地数蓍草画出卦象，以及后人在此基础上给出的其他确定卦象方法等，实质是在模拟“天道”确定卦象，再依爻场的位置、走势、互卦、变卦的态势等预测事态变化，并非是在祈求上天，而是在摒弃人的主观意识寻找未知事物的发展规律，遵循的正是人们今天口中“客观事物不以人的意志为转移”的辩证关系。惠子仍有些不解，问欧阳博士:“爸爸，这不是有点像是在算命吗？”见惠子在这个问题上仍有些含混需要开导，欧阳博士问她:“你觉得‘算命’是个贬义词还是褒义词？”惠子回答说:“当然是个贬义词，是‘欺骗’的代言词!”欧阳博士又问她:“‘算命’如果是个贬义词，孔子为什么要说‘不知命，无以为君子’呢？要知道，孔子口中的‘君子’是有德的人而非普通百姓!”惠子越发不明白地问:“是不是孔子时代科学知识匮乏，人都比较愚昧？”欧阳博士解释说:“当然不是！孔子生活在农耕文明时代，恰是诸子百家思想活跃，也是对人与自然辩证关系思考最深入的时代，不可能以欺骗的方式判断一个人有德、无德或是否在遵‘道’而‘行’。”惠子仍有些不明白地反问:“爸爸，那您认为‘算命’是褒义还是贬义呢？”欧阳博士告诉她，“算命”一词在孔子时代肯定是个褒义词，是作为理解天道、遵“道”而“行”的前提而非今天人们理解的“欺骗”，因为孔子在教育中始终把“修德”作为人“立身”的根本。听欧阳博士这样解释，惠子对《易经》有些认知了，问欧阳博士:“爸爸，这样确定的卦象和爻场好像只能给出事物态势走向或概率，不是一种确定性的结论呢!”见惠子能提出这样的问题，欧阳博士高兴地说:“是的，是人的认知局限性使然，一般遵从有疑则卜、无疑不卜！这里的‘疑’恰是人对事物理解上有疑问需要释疑，得到的结果也只能是可能性。”顿了顿，欧阳博士继续说:“用概率刻画事物态势即便是在今天的科学中也不乏见，如量子力学对微观粒子行为的刻画中，态矢$|\phi\rangle$、$\langle\psi|$的模不正是概率函数吗！唯一不同的是量子力学用了无穷多个基矢而《易经》中仅用了64个物态。”惠子听后恍然大悟:“是呀，量子力学对微观粒子行为的刻画也是用概率，但对事物态势的认知上《易经》比量子力学早5000多年呢，这的确是中国人在科学上的先知先觉!”

欧阳博士告诉惠子，《易经》是中国古哲人对事物“道”或科学的认知。在这一点上，与以局部认知为科学认知的不同，《易经》模拟的是生命全过程，是对事物“由

出生到坟墓”或生命周期中“道”的认知，这种认知本应成为科学发展的主流，但人类文明在近几百年的演化中，人性中的“享乐主义”盛行，中国古哲人这种思想并未为科学界普遍接收，反而是局部认知的“道”或科学在应用上的泛滥，因为科学对物“道”的局部认知在一定程度上易满足人们在当下或眼前的私欲，造成对自然的过于侵扰，这同人与自然协调共生的理念或遵“道”而“行”并不一致。

第6节 注释与评论

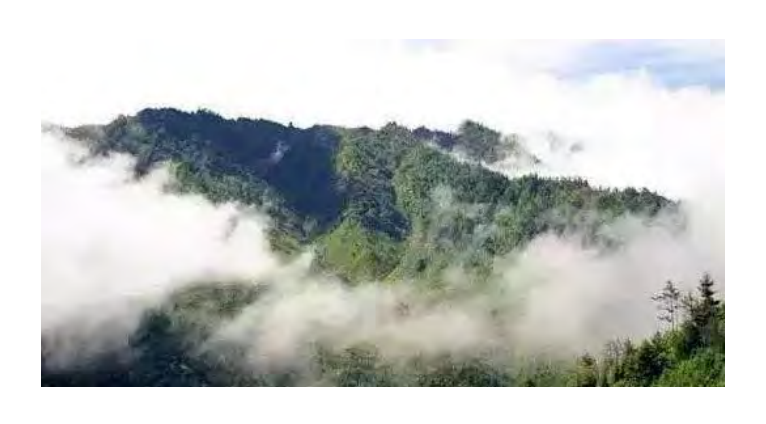
6.1. 评价一个国家或民族科学成就的核心在于评判标准。科学的分科发展易于取得局部科学成果，造就了西方工业文明但三百多年后的今天才发现给自然留下诸多世界难题，影响着人类发展；与此西方科学发展不同，中国古代科学有着自己鲜明的特色，讲求“天人合一”，由一件事物的全生命周期把握事物的变化规律，不易取得局部科学成果，产生不了工业革命但不会给人类生存带来危机。英国科学史家李约瑟按西方科学的科目编著的多卷本《中国科学技术史》系统地论述了中国古代科学成及其对世界文明的贡献，包括哲学、数学、物理、化学、天文、地理、生物、农学和医学等诸多领域，成绩显著但只是少数的成就让世人瞩目，尚不足以显现中华民族对人类文明的贡献，如《易经》用六十四卦象模拟物态，用六爻模拟一件事物全生命周期中的六个环节等对事物全过程认知的系统科学则不为西方科学接受或承认。究其原因有二，一是这种对事物整体认知的全生命周期方法归入科学中的哪一个科目都不合适；二是一些留学西方的中国人也大多将其视为占卜规则，不承认是科学，包括十二经脉与人体五脏六腑的对应及运行等。实际上，中华科学大都以《易经》为基础，如中医理论、天文学，包括建筑布局、风水等。

6.2. 中国古人以“阴阳”平衡为天道，以“天人合一”和“五行”间的相生、相克求生，以《易经》认知未知事物，判断事物趋势，是一种朴素的唯象科学，体现在《易经》、《道德经》和《皇帝内经》等文化经典中，见文献[Fur1]-[Fur3]、[Lin]、[Luj1]-[Luj2]、[Zha]和[Zhu]等。这当中，老子的创世说“道生一，一生二，二生三，三生万物”和人生法则“人法地，地法天，天法道，道法自然”的分析或“悟”见陆锦川[Luj1]，对宇宙整体创世中的一、二和三的参悟可知晓老子创世说中蕴含宇宙大爆炸说为一种特殊情形。

6.3. 中医十二经脉学说的实质，是将人体运行对应于十二经脉和任督二脉，一个有362个节点的平衡流，其边上的流为人体经脉上运行的气血，见文献[Mao46]。这样，连续流虽然是推广网络流、G-流的产物[Mao38]，它的一个应用实例是人体十二经脉和任督二脉。类似地，四足动物，如马、牛、羊、沟等身体运行也可以由十二

经脉和任督二脉构成的平衡流刻画。

6.4. 研究《易经》的人分为两类，一类研究易理，关注卦辞、爻辞及其间的变化原理；一类研究占卜，由卦象蕴含的天道预测事物走势。这两类实际上都是在分析卦象与事物发展的关系。孔子将《易经》阐释为儒家的一部道德经典，认为“*不知命，无以为君子*”，见文献[Fur1]，是以知晓事物发展规律为准对君子提出“格物致知”的要求。由此，《易经》至少应视为中国古人认知事物理的一种科学方法。



清泉百丈化为土，鱼鳖枯死吁可悲。

— 唐.韩愈《龙移》



第 12 章
科学哲学

****

白日依山尽，黄河入海流。

欲穷千里目，更上一层楼。

— 唐.王之涣《登鹳雀楼》

第1节 条件真实

科学是人类对客观事物及其变化规律建立在可检验基础上的知识体系，是在对人的感知和事物特征先验假设基础上构建的，包括：①事物有可为人类识别的特征；②事物特征是事物的固有特性，不因观察人或观测时间的不同而改变；③事物特征可以采用一种普遍接受的方式描述。这些假设的宗旨，是认为事物特征独立于人存在，不因人的观察行为而改变。如果某一事物特征超出人的感知能力或不能为人准确描述，则该项特征不能为人完整认知。相应地，人也无法认知或是无法准确认知该事物。例如，量子力学中海森伯的测不准原理，即人不能同时准确测量一个微观粒子的动量和位置表明，人不能准确认知微观粒子行为而只能借助于其在某处出现的概率对其进行似然认知，如图12.1中薛定谔猫的生死叠加态，因为科学是人对事物呈现规律或“道”的认知而人的“六根”，即眼、耳、鼻、舌、身、意在对事物感知上有局限，是人的认知局限性使然。

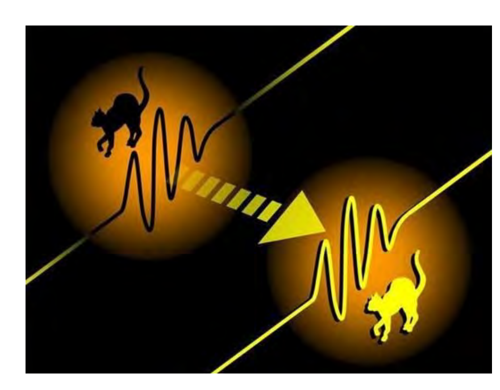


图12.1 薛定谔猫叠加态

一般地，科学认知的范式见图12.2。

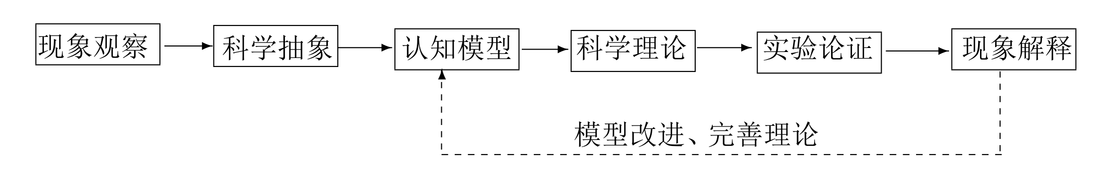


图12.2 科学认知范式

这里，观察是认知事物特征的基础，是人们有目的地感知事物，获取事物表象特征或经验事实。在此基础上，对事物表象原因进行分析，提出研究问题、分析模型，有计划、有目的地进行数据收集、抽象、分析和论证，得出现象的初步解释或答案，再返回模型或实践检验，以把握事物行为。这里，科学抽象的核心在于从现象中把握本质，形成科学概念或事物特征“名”；认知模型是为模拟事物行为而提出的思想模型，包括数学模型；实验是由科学实验对理论进行验证，论证是运用概念、判断和推理等逻辑思维还原事物特征的因果关系，形成对事物认知的结论。

那么，为什么说科学是一种条件真实呢？欧阳博士解释说，科学是人对事物形成的知识，是人在特定条件下，包括观测工具、时间、场所、环境，以及事物特征的假设等条件下由抽象、假说形成理论，再在同样的条件下对事物行为检验形成的系统知识。这些条件有些是人为设定的，表现为命题形式，即“如果··· 则···”或是指明

条件，如"在真空状态下有···的结论"等；有些则隐含在结论中，因为人对事物的观察大多是在地球上进行的，受引力、地磁或环境作用等。惠子有些不解地问欧阳博士："不对吧，爸爸！$1+1=2$难道也是条件成立吗？"欧阳博士笑着说："$1+1=2$的成立条件是隐含式的，即假设运算是在包含数字1和2且$1+1=2$的一个数域，如实数域$\mathbb{R}$上进行，但如果运算是在$\mathbb{Z}_2$上则$1+1=0$；在逻辑运算上则$1+1=1$，都不是$1+1=2$。这一点常为人们所忽略而认为是$1+1=2$，即想当然地认为是在$\mathbb{R}$上运算而忽略了条件。"惠子点了点头："原来是这样啊！可即便如此，强调科学是条件真实又有什么意义呢？"欧阳博士解释说，人对万物法则的认知是经由某些"物"上体现的规律进行认知，构建的科学知识体系，即人类的科学不是万物法则而是对"道"的局部认知或条件真实。这里，指出科学的局限性或条件成立并非是要减损科学的功用而是唤醒人们在人与自然构成的二元系统中看待科学，在人与自然和谐共生条件下重新检验科学的应用条件，这是在以往为人们所忽视的一件事情。

1.1.科学条件. 科学分为自然科学、社会科学、思维科学、形式科学和交叉科学等五大类。这当中，自然科学是研究自然界的物质结构、形态、性质和运动规律的科学，其他科学以自然科学为基础或是派生。在此，以自然科学中的数学、物理学、化学和生物学中一些成果为例，分析科学结论的限制性条件。

（1）**数学.** 数学是客观事物及行为抽象的产物，是在遵从逻辑一致基础上的符号系统。任何一个数学结论都是在特定的数学系统中作出的。欧阳博士解释说，一个定义了运算的数与形符号系统$\mathcal{A}$称为是一个数学系统，如果$\mathcal{A}$中的任两个元的运算结果仍属于$\mathcal{A}$。例如，实数$\mathbb{R}$、复数$\mathbb{C}$、群、环、域、向量空间，以及在此基础上构建的微积分、几何、泛函系统等。一般地，数学真实是在给定符号系统中或是给定条件下逻辑推理的结果，是一种符号真实，其成立条件有两种表现形式：一种条件是在一个自明的数学系统中。例如，"三角形的三个内角和为180^o"的成立条件是在"欧氏几何"且运算是在实数$\mathbb{R}$中而不能是其他几何系统，因为在椭圆几何中，三角形的三个内角和大于180^o而在双曲几何中，三角形三个内角和小于180^o，分别见图12.3（a）和图12.3（b）；另一种条件是在一个已知数学系统中，同时增加了额外条件。例如，群论中的Lagrange定理"对有限群G的任一子群$H \prec G$有$|G|=|H||G:H|$"的成立条件是"G是一个群且$|G|<\infty$"，即群中元的个数有限。这里，$|G:H|$表示子群H在G中的陪集个数，即$|G|/|H|$。

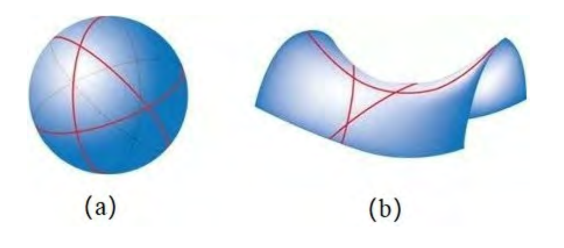


图12.3 非欧三角形

注意，数学是客观事物某些特别行为或情形的符号抽象，是人理性思维的产物，

不一定对应事物真实而是符号真实。一般地，人们采用一个数学系统$\mathcal{A}$刻画某一事物T的行为时，实质是已假设事物T的行为遵从$\mathcal{A}$中的数学规则。这当然是一种人为的理想假设，与毕达哥拉斯"万物皆数"的断言类似，是在用事物某一特定特征概括这一事物，必然导致数学能够刻画的事物行为，即数学真实小于自然真实。欧阳博士告诉惠子，$1+1=2$是把两个不相交物品放在一起计数的结果，并不适用两个相交集合A和B放在一起的元素计数情形。这时，$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$，$|A\cup B|=|A|+|B|$当且仅当$|A\cap B|=0$或$A\cap B=\emptyset$的情形。那么，为什么是$1+1=2$而不是$1+1=3$呢？欧阳博士解释说，$1+1=2$对应于数数是一个一个地数，这样有了自然数$\mathbb{Z}^+=\{1,2,3\cdots\}$，进一步拓广有整数$\mathbb{Z}$，实数$\mathbb{R}$和复数$\mathbb{C}$。数数时，$1+1$对应1后面数的那个数2，$2+1$对应2后面那个数$3,\cdots$。这样，有$1+1=2,2+1=3,\cdots$，这就是为什么数学中是$1+1=2$而不是$1+1=3$，因为1后面的数是2不是3。自然界中的确存在$1+1=3$的生物现象，即一公一母父代可以生出一个子代，在自然数系$\mathbb{Z}^+$中可视为一种随时间变化的计数结果，如斐波那契问题就属于这类问题。

（2）**物理学.** 物理学是对自然界中物质一般运动规律和物质结构认知的一门科学，是从观测与分析自然界中各种基于物质与能量的现象中找出其中的模式和理论，包括物理现象、物质结构、作用和运动规律等。注意，物理学是在自然现象中认知自然规则，并以这些规则阐释自然中蕴含的因果关系。例如，经典力学对一些天文现象的成功解释，粒子物理确定最小可探测的基本粒子以解释宇宙起源等。

物理学的最大特点在于是对物"道"的探索与认知，得到的物理定律必然受人的观测条件、参照系和认知能力的制约，是一种条件成立。这里，例举一些经典物理定律的成立条件如下：①牛顿三大定律是宏观物体在低速运动和惯性参照系下的物理定律，不适用于微观粒子。这当中，牛顿第一定律的条件是不受外力作用，第二定律的条件是受到外力作用，第三定律的条件是力的传递介子为完全弹性介子；②机械能是物体动能和势能之和，其守恒的条件是处在一个保守力场中。这时，物体的势能和动能会发生变化但总机械能保持不变；③电磁场中库仑定律的条件是真空中的静电场且电荷q_1,q_2是点电荷，电磁感应的条件是磁通量穿过导体回路，如

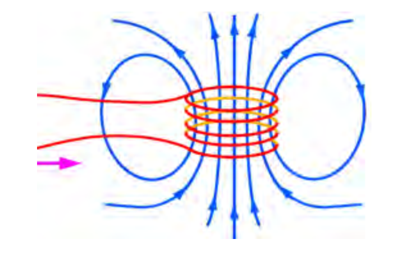


图12.4 电流与磁通量

图12.4所示。这样，导体回路中的瞬时感应电动势$\mathbf{E}_i$与穿过该回路的磁通量$\mathbf{\Phi}$对时间的变化率成正比,在国际单位制下表示为

$$\mathbf{E}_i=-\frac{\mathbf{d\Phi}}{dt} \tag{12.1}$$

称之为法拉第电磁感应定律；④热力学三大定律是刻画热能传播的定律。热力学第

一定律的条件是外界对一个封闭系统传递热量的情形，一部分使系统内能增加，一部分用于系统对外界做功，即热能在系统内外的传递与转换规律；热力学第二定律和第三定律成立的条件均是在一个封闭线性系统内，指热传播只能由热处传播到冷处，不可逆且熵总是增加，在系统稳定平衡时熵达到最大值；⑤光电效应定律的条件是光照射金属板。这时，当入射光的频率ν大于金属板的极限频率ν_0时，金属板上的电子e会逸出能量为$\hbar\nu$ 的光子，发生光电效应，且入射光的频率ν越大，电子的初动能越大，有爱因斯坦光电效应方程

$$\hbar\nu = e\mu + \frac{1}{3}m_e v_e^2 。 \tag{12.2}$$

这里，$\hbar = 6.63 \times 10^{-34}$为普朗克常数，$e\mu$为电子脱离金属表明的逸出功，$m_e = 0.511MeV$为电子质量，$v_e$为电子逸出速度；⑥ 爱因斯坦质能方程$E = mc^2$的条件是在相对论力学中，即经典力学中物体的能量和质量两个不同特征在相对论力学中是同一个特性的不同表现，度量上仅差一个因子c^2即光速的平方。

（3）**化学.** 化学是在分子、原子层次上研究物质的组成、性质、结构，以及在一定条件下物质变化的规律。一般地，物质变化分为物理变化和化学变化两种。这当中，物理变化指物质在形态或状态上发生了变化，但没有生成新的物质；化学变化与物理变化对应，指在一定条件下分子间发生原子或电子的转换、转移或重组，生成新的分子并伴有能量变化的过程。

化学的核心是在原子守恒的基础上，发现物质重组条件和重组规律，进而在分子、原子层面理解物的生成之“道”。一些常见的化学反应方程如下：①燃烧，如镁$2Mg + O_2 \to 2MgO$，铁$3Fe + 2O_2 \to Fe_3O_4$，氢气$2H_2 + O_2 \to 2H_2O$，红磷$4P + 5O_2 \to 2P_2O_5$，硫粉$S + O_2 \to SO_2$，碳$C + O_2 \to CO_2$，$2C + O_2 \to 2CO$，一氧化碳$2CO + O_2 \to 2CO_2$，甲烷$CH_4 + 2O_2 \to CO_2 + 2H_2O$，酒精$C_2H_5OH + 3O_2 \to 2CO_2 + 3H_2O$等；②卤化反应，如$2Na + Cl_2 \to 2ClNa$，$2Fe + 3Cl_2 \to 2FeCl_3$，$Cu + Cl_2 \to CuCl_2$等；③硫化反应，如$2Na + S \to Na_2S$，$Fe + S \to FeS$，@$Cu + S \to Cu_2S$，$O_2 + S \to SO_2$等；④氮化反应，如$3Mg + N_2 \to Mg_3N_2$，$N_2 + O_2 \to 2NO$，$2NO + O_2 \to 2NO_2$，$3NO_2 + H_2O \to 2HNO_3 + NO$ 等；⑤铁化反应，如$3Fe + 2O_2 \to FE_3O_4$，$3Fe + 4H_2O \to Fe_3O_4 + 4H_2$，$Fe + H_2SO_4 \to FeSO_4 + H_2$，$Fe + 2HCl \to FeCl_2 + H_2$等；⑥钠化反应，$4Na + O_2 \to Na_2O$，$2Na + O_2 \to Na_2O_2$，$2Na + Cl_2 \to 2NaCl$，$2Na + S \to Na_2S$，$Na_2O + H_2O \to 2NaOH$，$Na_2O + CO_2 \to Na_2CO_3$，$Na_2O + 2HCl \to 2NaCl + H_2O$等；⑥甲烷反应，如图12.5中的甲烷

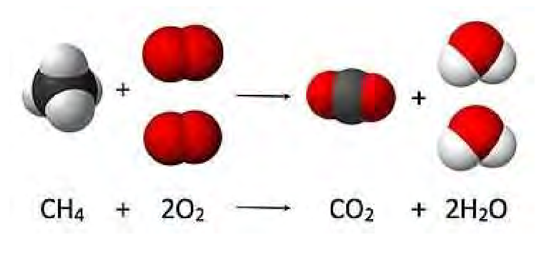


图12.5 甲烷燃烧

燃烧$CH_4+2O_2\to CO_2+2H_2O$，以及$CH_4+Cl_2\to CH_3Cl+HCl$，$CH_4\to C+2H_2$等；⑦ 乙烯反应，如$H_2C=CH_2+3O_2\to 2CO_2+2H_2O$，$H_2C=CH_2+H_2\to CH_3CH_3$，$H_2C=CH_2+HCl\to CH_3CH_3Cl$，$H_2C=CH_2+H_2O\to CH_3CH_2OH$，聚合反应$nH_2C\to \left[CH_2-CH_2 \right]_n$等；⑧乙炔反应，如$HC\equiv CH+5O_2\to 4CO_2+2H_2O$，$HC\equiv CH+H_2\to H_2C=CH_2$，$HC\equiv CH+HCl\to CH_2=CHCl$，聚合反应$nHC\equiv CH\to \left[CH-CH \right]_n$等；⑨苯反应，如$2C_6H_6+15O_2\to 12CO_2+6H_2O$，$C_7H_8+9O_2\to 7CO_2+4H_2O$等。

自然界中的物质都处在稳定状态，不会自发地发生化学反应，物质间的化学反应需要一定的外界条件才能发生。例如，燃烧反应中要有可燃物质，如木料、汽油、酒精以及书籍、纸张、衣被等，有助燃物质，如空气等，还要有火源，如火苗，火花等。这样，燃烧是分子与分子在一定的外界条件下产生的。以碳燃烧为例，$C+O_2\to CO_2$，$2C+O_2\to 2CO$是指一个碳分子与一个氧分子在充分燃烧情形下生成一个二氧化碳分子，不充分燃烧时生成两个一氧化碳分子，但实际燃烧物无一是纯碳，还含有其他物质。这样，燃烧后除二氧化碳、一氧化碳外还有其他物产生。例如，木材是一种化合物，主要由碳、氢、氧等元素组成，一般以纤维素或以糖、胶、酯、水等分子形式存在。在200^oC左右燃烧，主要生成二氧化碳、水蒸气、甲酸、乙酸和各种易燃气体；在$200-280^oC$燃烧，产生少量水汽和一氧化碳；在$280-500^oC$燃烧，产生可燃蒸气及颗粒；在500^oC上燃烧产生的主要是碳。

（4）**生物学.** 生物具有“适者生存”，即与生存环境相适应的特点，以淘汰那些对环境不适应的生物。生物学是研究生物，包括植物、动物和微生物的结构、功能、发生和发展规律的科学。这当中，不同的细胞组合结构是生物适应其生存环境的产物。生物构成在细胞中的化合物主要为蛋白质和核酸，其中的蛋白质是生命活动的主要承担者，核酸是遗传信息的携带者，是生命中重要的高分子物质。生物构成元素中，大量的为C、H、O、N等，微量的有Fe、Mn、Zn、Cu、B、Mo等。生物的基本特征是新陈代谢，即生物体内同外界不断进行的物质和能量交换现象。



图12.6 **植物生长条件**

那么，生物有那些基本的生存条件呢？欧阳博士解释说，植物、动物和微生物具有不同的生存条件。即便是同一类生物，其生存条件也不一定相同。例如，①植物的生存条件，包括光、水、温湿度、空气和土壤等。这里，光和水是植物生长中基础性因素，适宜的温度和湿度是植物生长的环境条件，空气是植物光合作用，吸收

二氧化碳，释放氧气，进行呼吸的中介，土壤是植物吸取养分的源泉；②动物的生存条件，包括适宜的温度、氧气、水、食物和一定的生存空间。这当中，氧气是动物进行有氧呼吸的条件，食物是动物摄取营养物或能量的条件。这样，充足的氧气和食物供给是维持动物生命的前提条件；③微生物的生存条件，包括水、碳、氮、无机盐、生长因子等营养物、氧气和水。这当中，不同微生物所需的氧气浓度和水的酸碱度不一定相同。

一般地，高等动物的生存条件比低等动物的生存条件苛刻。同样条件下，低等动物可以存活但高等动物则可能不行。例如，①动物中，如猪、马、牛、羊可以吃草活着但人则不行，因人的胃不能消化大多树叶和草；②地表水可以分为I 类-V 类五个等级，其中I类水经简易净化、杀灭水中对人体有害的细菌、病毒、微生物后可供人生活饮用；II 类、III 类水质受到轻度污染，需经常规的专业净化处理后方可供人的生活饮用，但鱼虾可在II类、III类水中养殖。同时，人不能饮用IV类、V类水，但细菌、病毒和微生物可在IV类、V类水中存活；③动物体中有一些独特的免疫机制对抗病毒能力或恶劣环境但人体不行。例如，蝙蝠体内携带的病毒中有61种是人的患病病毒。同时，蝙蝠在飞行过程中能达到100^oC以上，心脏频率近每200次/秒，均是人体所不可比拟的。

1.2.科学法则. 科学既然是对事物规律的条件真实，在人与自然和谐共生这个二元系统K_2^L中，在科学为人类增进福祉的同时，必须考虑科学应用的条件，以实现人类的遵“道”行事，因为人类活动对自然的侵扰是一种延时的累积效应，自然对人类的反作用可能不是发生在当下而是在人类子代之时。这时，科学应用的一个基本法则是其引导的人类活动不违背或侵扰自然运行，即

恒道法则. *自然不因人类活动而调整或改变运行规则。*

这里的“恒道”即是《道德经》开篇“*道可道，非常道*”中的“*常道*”或自然法则，即人与自然和谐共生或遵“*道*”行事的实质在于遵“*恒道*”行事而不是遵从人对某些或某类物上的“*道*”或规律的条件真实或科学。恒道法则蕴含着两层含义，一是自然不会因人类的需要而调整运行以适应人类，因为“*天地视万物为刍狗*”，与万物相比人类“*万不及其一*”，太渺小；二是人类活动对自然应无侵扰或是在其许可范围内。否则，自然运行或对人类侵扰的反作用一定是人类的灾难。

恒道法则看似简单，但常为一些人站在一元系统K_1^L或人类“*自大*”上而拒绝接受，但是，只要站在人与自然和谐共生、中国古人的“*天人合一*”或是遵“*道*”行事的思想上，这是人类一切活动应遵从的一个基本法则。实际上，人类文明，特别是人类进入工业文明后，在科学主导的人类活动中这一法则并未得到严格遵从，并错误地认为自然可包容人类活动的一切废弃物。以“*火*”为例，树叶、树枝的燃烧生

火，$C + O_2 \to CO_2$或$2C + O_2 \to 2CO$诞生了人类文明，但这些树叶、树枝燃烧后产生的二氧化碳和燃烧残留物是在人的掌控之中，对自然无侵扰吗？答案是否定的！欧阳博士解释说，二氧化碳的自然消纳是经由绿色植物的光合作用、水域和土壤等自然机制消纳，消纳能力有限。在人类的农耕文明时代，二氧化碳主要来源于动物、植物的呼吸、尸体的腐烂变质、山林自然火患和人的生火煮食等。这当中，"动物、植物的呼吸、尸体的腐烂变质、山林自然火患"属于自然遵"道"行事，而"人的生火煮食"是人的一种主观行为，不一定是在遵"道"行事，但其产生的二氧化碳量甚微，尚在自然的消纳能力$R_{air} < R_{human}$范围内。那时，人们不关注恒道法则，认为自然能包容人类的一切废弃物，不会对自然运行形成大的隐患，但工业文明过于依赖煤炭、石油、石蜡、天然气、木材等化石能源的燃烧，煤炭、石油等化工产品的开采与生产，以及那些有赖于能源的工业生产、运输等排放出的二氧化碳超出了自然消纳二氧化碳的能力。这时，自然排放的二氧化碳漂浮在空气中，经年累月的累积造成空气中的R_{air}量打破了二元系统K_2^L中既有的场平衡关系，场$L(u)$遵"道"进行调整以适应人类活动产生的二氧化碳超限排放量，即人类感知的自然灾害。

那么，应怎样看待科学，又应怎样应用科学才是遵'道'而'行'的人类活动呢？欧阳博士解释说，科学是万物法则"道"的一种局部认知或条件真实表明，科学引导的人类活动需严格遵从恒道法则，因为科学的滥用同样会破坏人"生"的条件，必须在其应用上加以约束或限制。

科学法则. *科学引导的人类一切活动须对自然无侵扰。*

这里，科学法则是在人与自然和谐共生或中国古人"天人合一"的思想下，科学引导人类活动应当遵从的法则，蕴含着：①科学探索、研究应对自然无侵扰，包括科学实验中一些有毒有害物的排放、对外太空探测中的探测器、卫星、空间站、火箭残骸以及爆炸残片等均须回收后妥善处置，而不能任由其报废后在空中自由漂浮，干扰宇宙的正常运行；②科学应用产生的一切物品，不论其是固态、液态或气态均应对自然无侵扰。这里，"无侵扰"是针对的自然运行，包括空气、土壤、水域和生物。否则，应主动对可能侵扰自然运行的产物留置或是进行无侵扰处置。以农药、化肥、橡胶制品和火的应用为例，化肥与农药在提高农产品产量的同时破坏土壤中的生态平衡，橡胶制品在提升人类福祉的同时不为自然在短时间内降解，燃烧生火的同时产生一氧化碳和二氧化碳等，均需人们主动对其产物进行自然无侵扰处置或留置而不能随意抛弃给自然吸纳或降解；③科学研究及应用限于提升人类的福祉，不能有悖于人"生"之道，因为在人与自然这个二元系统K_2^L中，对自然的无侵扰本就包括对人类自己的无侵扰，即科学仅限于和平应用。例如，原子能的开发与应用，转基因、基因编辑、病毒的研究等技术，均应仅限于人类的和平应用。

[**爱因斯坦懊悔的一件事**] 科学的和平应用是科学法则的基本体现，与其相对的是人类的战争。那么，我们应怎样看待战争，科学又是否可应用于战争呢？欧阳博士解释说，战争的本质是种族间资源的掠夺，是人对自然的一种严重侵扰。那么，科学应用于战争是否违背科学法则呢？答案是肯定的！科学应用于战争，加剧了人类对自然的侵扰，必然违背科学法则。欧阳博士告诉惠子，这当中有一个著名的例子，即第二次世界大战中，爱因斯坦由最初建议美国总统罗斯福应用核裂变理论制造原子弹，到惊闻两颗原子弹摧毁了广岛和长崎两座城市、数万人当场丧生后的悔悟，后直至其去世前一直在倡导科学和平应用的事例。

事情的经过是这样的：1939年8月，为了防治纳粹德国率先利用核裂变制造出原子弹而毁灭人类，爱因斯坦给时任美国总统的罗斯福写了一封信，建议美国政府投入人力、物力和财力研究并制造出原子弹，以掌握战争的主动权，提议将这项任务委托给一个罗斯福信任的人进行相关部门的沟通、和谐与行动安排，以保证美国铀矿的供应。同时，筹措相应资金，加速开展试验工作，与拥有相关设备的工业实验室开展合作等。罗斯福收到爱因斯坦的信后，接受了爱因斯坦的建议，组建了铀顾问委员会服务于原子弹研制，后发展为美国的曼哈顿计划，研制出投放到广岛和长崎的那两颗原子弹，即“小男孩”和“胖子”。

1945年8月6日，美国军方在日本的广岛和长崎投下了“小男孩”和“胖子”两颗原子弹，两座城市瞬间夷为平地，见图12.7。爆炸当场造成3万多人死亡，数十万人无家可归，且爆炸后15年间因核辐射及放射性污染，死亡人数增加至22万多人。





图12.7广岛和长崎原子弹爆炸

爱因斯坦听闻原子弹在广岛和长崎爆炸的恶果时后悔不已，称给罗斯福写的这封信为其“一生中的重大错误”，自责地对友人说：“我当时只是想把原子弹这一罪恶的杀人工具从希特勒那个疯子的手里抢过来，可想不到又将它送到另一个疯子的手里，···，我们为什么要将那些无辜的男女老幼作为这个新炸弹的活靶子呢？”

从广岛和长崎原子弹爆炸直到去世前，爱因斯坦一直倾注于科学道德与世界和平，在各种场合一再呼吁科学的和平应用，这实则是在展现中国古人“天人合一”

的思想，与今天的人与自然和谐共生一致。1948年7月，爱因斯坦在给“国际知识界和平大会”的信中有这样一段话：“科学家的悲剧在于我们帮忙制造出来更可怕、威力更大的毁灭性武器。因此，防止这些武器被用于野蛮的目的是我们每个人义不容辞的责任”，并于逝世前两天在英国数学哲学家罗素倡导的科学和平应用宣言上签名，以敦促各国政府认识核战争的危害，寻求和平办法解决相互间的争端，这就是著名的《爱因斯坦-罗素宣言》。

第2节 万有理论

科学是人在对事物及其变化感知基础上构建的知识体系，感知的主体是人，是人处在宇宙中的某一个特殊位置对事物的局部认知。在对未知事物的认知中，与经典的“盲人摸象”寓言中的盲人类似，人希望以自己对事物某个特征的局部认知为整体认知。那么，对事物的局部认知是否真能成为事物整体认知呢？欧阳博士告诉惠子，人对事物本真的认知即《道德经》中的“可名”。既然“名可名，非常名”，人对事物本真的认知就始终处在人“知”的地位，如图12.8所示。同时，用人的局部认知为事物整体认知，也只能是一个不断完善的过程。承认局部真实为事物本真的最大风险在于，只要存在一个反例即是一个错误认知而须否决。例如，古希腊毕达哥拉斯“万物皆数”的论述，即是在以万物“数”的特征阐释万物，并非事物真实，更何况毕达哥拉斯说的“数”还是有理数，让他的门人希波斯举出了单位正方形的对角线长$\sqrt{2}$为非有理数的反例，即“万物皆数”是一个错误的认知。



图12.8 科学是人知万物

这样一来，既然人对事物的认知或科学是局部认知，与整体认知相比有那些缺点和优点呢？人对事物的局部认知，缺点是它仅是事物真实的一种条件真实，优点是在人力所能及的范围内可以证实或证伪。但与此同时，证实或证伪本身也受人认知局限性的制约，即便是一个对事物证实的认知，随时间和认知手段的进展人们可能也发现其不是事物真实而仅是条件真实，甚至是一个错误的认知。例如，牛顿引力是对质量物体间存在引力的一种局部认知，爱因斯坦引力实质是牛顿引力中质量物体数$n \to \infty$的引力场情形，是一种整体认知，但证实条件仍是在人力所能及下的局部检验，是人在对事物认知中由特殊到一般的认知规律。那么，是否存在一种可以解释万物变化规律的万有理论呢？答案是否定的！欧阳博士解释说，万物变化的

规律即是“道”，遵循“道可道，非常道”，哲学上就不可能有这样一种认知事物的万有理论。

科学上追求万有理论（Theory of Everything）的实质并非是追求科学为“常道”，而是将一些看似不同的自然现象在一个更广泛的统一理论下进行认知，满足：①已有定律是统一理论的特殊情形且形式或表述更简洁；②统一理论可经实验检验；③统一理论可提出的预言并经过实验检验，这实际上是人对事物真实认知的一种渐进过程，在科学发展史上并不罕见。例如，牛顿力学对物体运动与静止的统一，麦克斯韦电磁理论对电、磁和光的统一等，因为这样更便于把握事物真实。当然，科学中的这种万有理论在本质上仍是一种局部的统一理论，并非万有理论。

2.1.统一场论. 统一场论是由爱因斯坦主导的，在场论基础上统一基本力作用场的一种思想。一般地，宇宙中出现的现象可以简化成四种基本力，即引力、电磁力、强核力和弱核力的作用。这当中，引力和电磁力是一种长程力，作用距离在0到$+\infty$之间但作用强度随距离的增加而减少；强核力与弱核力是一种短程力，作用范围很小且影响力随距离的增加而急速减小，达到一定距离后作用力自动消失。那么，是否可以构建一种统一场论刻画这四种力作用解释一切物理现象呢？这即是爱因斯坦倡导的统一场论，即假设“自然界应当满足简单性原则”，用场的简单与直觉统一四种基本作用力中的“复杂性”以认知宇宙中的自然现象。但时至今日，这项工作仅完成了引力与电磁力、电磁力与强核力、弱核力的统一，但尚未完成引力与强核力、弱核力的统一，仍在通往四种基本作用力统一的道路上奔走。

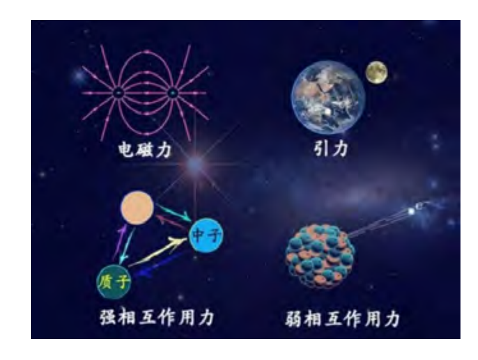


图12.9 四种基本作用力

（1）**力场几何.** 力场几何是由爱因斯坦开创的刻画物质场在力作用下为弯曲空间或黎曼几何的一种思想。牛顿引力是两个质量物体间的引力作用，当物体数量$n \to \infty$时，位于空间$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$上任一点上的一个质量物体受到的引力作用是其他物体的引力作用，其等效表述是空间弯曲效应，即爱因斯坦引力场。这样，一个自然的问题是，电磁力、强核力和弱核力作用是否也可以类似地转化为几何表现呢？欧阳博士解释说，答案如果是肯定的，这四种基本力的局部作用表现就可类似于引力作用，在$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$上一个度量为

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3 \qquad (12.3)$$

的黎曼空间M^4上刻画，但因引力、电磁力、强核力和弱核力作用上的差异，这种想法一直没成功。这当中，引力、电磁力是长程力，强核力、弱核力是短程力，即远距离

强核力与弱核力不参与作用，近距离引力作用可忽略不计，一种自然的想法是假定四种基本力作用独立存在于各自的时空中，即引力时空$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$、电磁力时空$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$、强核力与弱核力时空$\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}$和$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$，共用一个时间维度$t\in\mathbb{R}$，即在一个度量为

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + ds_\Omega^2, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3 \tag{12.4}$$

的黎曼空间上刻画四种基本力作用的几何性质。这里，等式有端第一项表示引力、电磁力引起的时空弯曲效应，Ω是能容纳强核力和弱核力的空间独立作用的空间，ds_Ω^2为强核力和弱核力引起的时空弯曲效应，满足$\dim\Omega\geq 4+2=6$。一般地，取$\dim\Omega=6$即$4+6=10$-维空间即可容纳引力、电磁力、强核力和弱核力作用独立作用。听到这里，惠子有些惊讶地说：“爸爸，这种想法也太让人惊奇了！可人类生活在4-维时空中，怎么解释那多出来的六个维度呢？”欧阳博士告诉惠子，在老子“道生一，一生二，二生三，三生万物”的创世过程中是否发生过空间维度变化并不知晓，但可以肯定的是，在上帝挥了挥手即出现万物的上帝创世说中，空间维度似未发生过变化。这样，用(12.4)刻画宇宙创世之初的空间度量必须对大爆炸后空间维度的变化，即空间维度由$4+\dim\Omega\to 4$的过程作出先验假设才不与人的感知矛盾。为此，人们假设大爆炸后三个方向的维度在急剧的扩张与延伸，形成今天人们感知的空间$\mathbb{R}^3$。同时，另外七个方向维则急剧地卷曲与缩小，直至超出人的感知范围，且在三维宏观宇宙中的力作用遵从引力作用规则，七维微观宇宙内的三种力遵从电磁力、强核力和弱核力作用规则，满足空间的紧致性要求，即人类感知的空间$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$中的一个点不是一个点而是一个紧致空间$\Omega$，如图12.10 所示。欧阳博士总结说，这是一个近乎疯狂地纯理性猜测。当然，人因认知局限无法验证每个感知点上是否真的是一个紧致空间Ω，但确可将基本力作用场统一于一个几何空间$\mathbb{R}^4\times\Omega$。特别地，完成了以下工作：

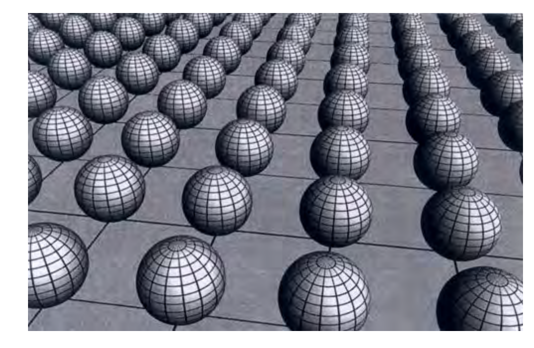


图12.10 卷曲空间模型

Kaluza-Klein理论. 爱因斯坦的广义相对论是在欧氏空间$\mathbb{R}^3$上增加一个时间维度$\mathbb{R}$得到$\mathbb{R}^4$上的引力几何M^4。这里，时间维度$\mathbb{R}$垂直于$\mathbb{R}^3$。那么，在$\mathbb{R}^4$上再增加一个维度$\mathbb{R}$得到的爱因斯坦引力场$(4+1)$-几何M^5包含什么呢？这是$(4+1)$-维空间上的爱因斯坦引力场方程，又称为Kaluza-Klein理论。欧阳博士告诉惠子，这时，引力几何M^5上的线元或度量为

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3,4 \tag{12.5}$$

但较之M^4上的爱因斯坦引力场做了适当放松，即不再要求在所有坐标系中不变而是改为在洛伦茨变换下不变。在这种情形下，爱因斯坦引力场方程的形式发生了变化，多出了描述“电磁力”的一项遵从麦克斯韦方程。那么，应怎样看待这个多出来的第五个维度呢？用Kaluza自己的解释，“第五维在$\mathbb{R}^3$的每个点上卷缩成一个个非常小的圆圈，谁也察觉不到它的存在”，这就是卷曲空间的来源，即图12.10中附着在一个个点上的球体Ω为圆环S^1 的情形。这时，第五个维度的变化应是独立于其他维度的周期变化$x^4(t) = x^4(t + 2k\pi), t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$，且对整数$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$或4满足条件$d^4 g^{\mu\nu} = 0$，对应的5-维空间度量可表示为

$$ds^2 = e^{2\alpha\phi} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2\beta\phi} \left(dx^4 + \mathcal{A}_\mu dx^\mu\right)^2。 \tag{12.6}$$

这当中，$\mathcal{A}_\mu$为势向量场满足$d^4\mathcal{A}_\mu = 0$，ϕ为标量场满足$d^4\phi = 0$。

弦理论. Kaluza-Klein理论在5-维空间上统一爱因斯坦引力场方程和麦克斯韦方程的成功，让人们看到了在$\mathbb{R}^4$基础上增加额外维度统一引力、电磁力、强核力和弱核力的希望，即在(12.4)中取$\dim\Omega = 6$，用$(3+7)$-维空间统一引力、电磁力、强核力和弱核力作用。这当中的一个基本问题是“一个基本粒子是一个质点吗？”欧阳博士解释说，在波尔的原子模型中的确是把原子核与电子假想为一个直径充分小的3-维球体。但这一点已在量子力学或场论中进行了突破。例如，量子力学中用基本粒子在空间$\mathbb{R}^3$中点上出现的概率刻画粒子行为，实际上已打破了基本粒子是一个充分小的3-维球体的假设，因为如果基本粒子是直径充分小的3-维球体，又怎么可能出现在空间$\mathbb{R}^3$的各个点上呢！这在逻辑上与基本粒子的概念并不一致，只能解释为是基本粒子的效应所致，而这种场效应并非是一个质点所能产生。



图12.11 弦与场效应

那么，基本粒子的场效应是怎么产生的呢？欧阳博士告诉惠子，与物质由基本粒子构成不同，弦理论认为自然物质构成的基本单元是一个个很小的震荡弦，基本粒子是这一个个弦的不同震荡外显行为产生的场效应，如图12.11所示。这当中，弦可以

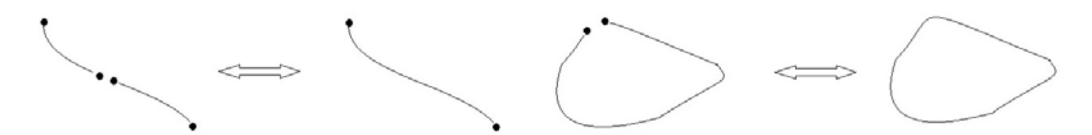


图12.12 弦的结合与分裂运算

是开弦，也可以是闭弦。开弦看起来像是一个线段，闭弦看起来如同是一个闭曲线，

如图12.12所示，两个开弦在端点结合可以仍是一个开弦，开弦在一点分裂成两个开弦；一个开弦在端点结合可以是一个闭弦，闭弦在一点分裂成一个开弦等。特别地，开弦的端点可视为带电荷的粒子。如果开弦两端一是正粒子，一端是反粒子，则两端结合在一起湮灭形成光子。类似地，在闭弦上一点分裂，一端为正粒子，一端为反粒子。由此，弦的分裂与结合自然对应于粒子的运动行为。

这样，类似于爱因斯坦用空间弯曲的曲率刻画引力效应，弦理论用高维弯曲空间M^{10}统一引力、电磁力、强核力和弱核力作用，构造出多种紧致化的空间Ω与人在3-维空间中的感知一致。但不同的卷曲方式可以形成无数个紧致空间Ω，无形中人为增加了问题的复杂性。更进一步，人们由实验观测增加四种基本力作用的几何空间应满足超对称，即玻色子和费米子之间的对称性。这样，在$(3+7)$-维空间中得到五种弦理论，即I型、IIA型、IIB型、杂化$O(32)$ 型和杂化$E_8\times E_8$ 型，给出了五种不同的宇宙模型。这当中，I型超弦理论包含“开弦”和“闭弦”，IIA型超弦理论只包含“闭弦”且九维空间内不破坏宇称守恒；IIB性超弦理论只包含“闭弦”，九维空间内破坏宇称守恒但紧化为三维空间后不破坏宇称守恒，两种杂交弦理论$O(32)$型和$E_8\times E_8$型中，“闭弦”分别在左旋和右旋的空间振动等。在10-维空间的基础上再增加一个维度，即在11-维时空中可以证明这五种不同的弦理论在本质上是等价的，这就是E.Wtten等人提出的M-理论。

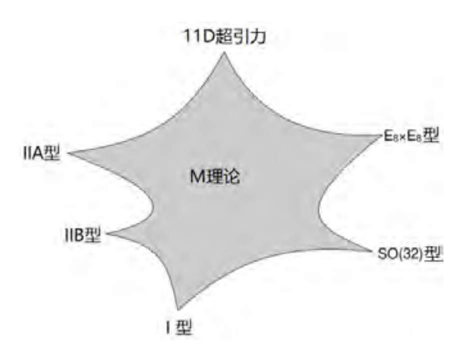


图12.13 M-理论

那么，M-理论是否在几何上统一了引力、电磁力、强核力和弱核力作用呢？欧阳博士解释说，M-理论在形式上统一了引力、电磁力、强核力和弱核力作用，但这项工作距完成四种基本力作用的统一还相当遥远。首先，弦理论和M-理论中力场几何化的实质，是用高维空间的维度分配割裂引力、电磁力、强核力和弱核力作用，是一种数学形式上的包容理论，已知力的作用规律在形式上可视为其特殊情形，但并非更简洁；其次，人们无法对弦理论和M-理论进行验证，即弦理论和M-理论仅能视为形式上正确，是否与真实的宇宙一致无法得到检验，这是弦理论和M-理论的致命缺陷；第三，弦理论和M-理论提不出预言，即便在$(3+7)$或$(3+7+1)$-维空间上提出预言也无法验证。这样，弦理论和M-理论仅能视为是人类认知万物的一种形式理论或科学。

（2）**规范场论.** 规范场论是在局部对称作用下统一微观粒子场的一种思想。上面的讨论表明，弦理论和M-理论虽然由额外维度刻画了电磁力、强核力与弱核力作

用，将四种基本力作用形式上统一在$(3+7)$或$(3+8)$-维空间M^{10}, M^{11}上，但并未能揭示四种基本力作用的本质。量子场论中，粒子是场在时空点上的激发场态，不同粒子对应不同的量子场。注意，粒子与量子场态ϕ的这种对应需要摒弃形式因素，即刻画同一粒子的两个不同量子场ϕ, ϕ'间一定存在一个变换$\Lambda : \phi \to \phi'$，因为场ϕ, ϕ'刻画的是同一个粒子态，仅是人为表现形式上的不同，即遵从相对性原理。特别地，变换Λ可以仅作用在场ϕ的一个局域而不是全域上得到ϕ'。这样的变换Λ称为规范变换。那么，什么是规范场呢？欧阳博士解释说，一个规范场是指在场ϕ的每一时空点或某一区域时空点上施行规范变换Λ使得$\phi^\Lambda = \phi$不变或对应的Lagrange量$\mathcal{L}^\Lambda = \mathcal{L}$不变的一种场$\phi$。例如，对应于质量$m$ 和Lagrange 量为$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$的复标量场$\phi$，有两类规范变换：

①整体变换：$\phi \to \phi' = e^{i\gamma}\phi$，$\gamma \in \mathbb{R}$为实数，将场$\phi$的相位改变一个常数$\gamma$；

②定域变换：$\phi \to \phi' = e^{i\gamma(\mathbf{x})}\phi$，$\mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^3$。

这里，$\phi^\dagger$为ϕ的复共轭。这样，第1类规范变换在于使Lagrange量不变；第2类规范变换则对Lagrange量的形式有一定限制条件，即作用于ϕ 的偏微分算子应取$\partial_\mu \to \partial_\mu + iq\mathbf{A}_\mu$。这里，$q$是适当定义的常数，$\mathbf{A}_\mu$是某种场，满足规范不变性按$\mathbf{A}_\mu \to \mathbf{A}_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu \gamma$。注意，规范变换可以是全域上的，也可以是局域上的。全域上的规范变换为坐标系变换，局域上的则不一定是坐标系变换，这是规范变换与爱因斯坦广义相对论中“坐标变换”的不同。类似地，还有矢量场、旋量场上的规范变换等。

那么，为什么说规范场揭示了力作用本质呢？欧阳博士解释说，粒子等同于量子场态后，微观粒子的基本作用场都是规范场。对应地，应有四类规范玻色子或媒介子传递力作用，即引力场、电磁场、强作用场和弱作用场作用传递媒介子分别为引力子g、光子γ、胶子$g^k, 1 \le k \le 8$和中间玻子W^+, W^-, Z，对媒介子规范场的刻画即是四类基本力作用的刻画。这当中，费米子、W^+, W^-玻色子和Z玻色子具有质量，而光子、胶子的质量为0。同样是规范场，为什么费米子、W^+, W^-玻色子和Z玻色子质量不为0而光子、胶子的质量为0？欧阳博士解释说，为满足规范场的局域规范不变性，需要设定规范玻色子的质量为零。但为什么费米子、W^+, W^-玻色子和Z玻色子质量不为0而光子、胶子的质量为0呢，回答这个问题需要规范场上的一种自发对称破缺机制，即当物理系统所遵守的自然定律具有某种对称性，而物理系统本身并不具有这种对称性时，系统会自发地对称破缺，原本具有这种对称性的系统最终会变得不再表现出这种对称性。在自发对称破缺中，希格斯粒子是一种遍布于宇宙的质量粒子，参与规范玻色子的自发对称破缺，使原本质量为0的规范玻色子质量不再为0而获得非0质量。注意，由规范场刻画基本粒子和力作用的实质在于“规范场$\Leftrightarrow$基本粒子”和“力作用$\Leftrightarrow$规范场”的等价关系。这样，统一引力、电磁力、强核

力与弱核力作用的实质在于构建包容这四种力作用的规范场。同时，由统一规范场中出现的未知规范场预言新的基本粒子，交由实验探索发现，这是粒子物理中由理论指导发现新粒子的成功范例。

统一电磁力与弱核力作用的工作，即电弱理论完成于上世纪六十年代，其统一场中的Lagrange量为

$$\mathcal{L}_{IVB}=\frac{g}{\sqrt{2}}\left(J^{\mu^-}W_\mu^+ + J^{\mu^+}W_\mu^-\right)\frac{g}{\cos\theta_w}J_\mu^{NC}Z_\mu^{\circ} \tag{12.7}$$

这当中，

$$\begin{aligned}
J^{\mu^+} &= \sum_l \overline{\nu}_l\gamma^\mu\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)l+\sum_q \overline{q}\gamma^\mu\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)q',\\
J^{\mu^-} &= \sum_l \bar{l}\gamma^\mu\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)\nu_l+\sum_q \overline{q}'\gamma^\mu\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)q,\\
J_\mu^{NC} &= \sum_f g_L^f\overline{f}\gamma_\mu\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)f+\sum_{f\neq\nu} g_R^f\overline{f}\gamma_\mu\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)f。
\end{aligned}$$

符号l和q分别代表轻子、夸克；f为费米子，因与希格斯场相互作用而获得质量；ν为中微子，g_L^f和g_R^f分别为左、右手粒子态耦合常数，g为耦合常数，θ_w为弱作用转动角。

电弱理论的成功进一步拓广促成统一电磁力、强核力和弱核力三种力作用，这就是上世纪七十年代完成的GSW理论，其统一场称为标准粒子模型（Standard Model），Lagrange量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{GSW} =& -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}-\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^iW^{i\mu\nu}+\sum_{e\to\mu,\tau} i\left(\overline{L}_e\gamma^\mu D_\mu L_e+\overline{R}_e\gamma^\mu D_\mu R_e\right)\\
&+\sum_{i=1}^{3} i\left(\overline{L}_i\gamma^\mu D_\mu L_i+\overline{R}_{ui}\gamma^\mu D_\mu R_{ui}+\overline{R}_{di}\gamma^\mu R_{di}\right)\\
&+\left(D_\mu\phi\right)^\dagger\left(D_\mu\phi\right)-m^2\phi^\dagger\phi-\lambda\left(\phi^\dagger\phi\right)^2+\sum_{e\to\mu,\tau} g_1\left(\overline{L}_e\phi R_e+\overline{R}_e\phi^\dagger L_e\right)\\
&-\sum_{u\to c,t;d\to s,b}\left(g_d\overline{L}_u\phi R_d+g_u\overline{L}_u\phi_c R_u+h.c\right)。
\end{aligned} \tag{12.8}$$

这里，第一和第二行中的项依次为自由规范场B_μ、W_μ^i、轻子场和夸克场，第三、第四行中的项依次为自由希格斯场及其与轻子、夸克的耦合，$h.c$表示括号中前面项的Hermitian共轭。

粒子标准模型仍是一个唯象的理论，其中含有十多个可调参数，具有一定的任意性，但预言的中间玻色子W^+,W^-,Z和希格斯粒子先后在1983年和2012年由欧洲

核子研究中心宣布找到，表明这个模型是一个与实践相符的模型。然而，粒子标准模型中不包括引力，仍不是四种基本力作用的统一理论。同时，一些预言也仍未得到证实。例如，粒子标准模型预言质子不是一个稳定粒子，要进行衰变与实验结果并不一致，不能解释在核裂变或核聚变中为什么会产生大量的中子、中微子和光子等，再次印证了粒子标准模型或GSW理论仅是一个局部包容理论。

2.2.力作用流元模型. 宇宙中的现象既然可以简化成引力、电磁力、强核力和弱核力等四种基本力作用，宇宙万物的行为及变化必然可由一个连续流进行模拟。四种基本力作用中，引力$\mathbf{F}_g$作用于质量物体间，电磁力$\mathbf{F}_e$作用于电荷粒子间，强核力$\mathbf{F}_s$作用于强子（重子、介子）间，弱核力$\mathbf{F}_w$ 作用于夸克与轻子、轻子与轻子间。按力的作用距离划分，四种基本作用力主要出现在：①引力$\mathbf{F}_g$，力程$r \geq 10^{-10}m$时；②电磁力$\mathbf{F}_e$，力程$10^{-10}m \leq r \leq 10^{-8}m$；③强核力$\mathbf{F}_s$，力程$10^{-18}m \leq r \leq 10^{-15}m$；④弱核力$\mathbf{F}_w$，力程$\leq r \leq 10^{-18}m$。这样，由物质构成理论，宇宙万物自然形成一个连续流$G^L[AEP]$如下：

图$G[AEP]$的顶点集$V(G[AEP]) = \{$夸克、轻子$\}$，边集$E(G[AEP]) = \{($夸克,夸克$)$, $($夸克,轻子$)$, $($轻子,轻子$)\}$，即夸克与夸克、夸克与轻子或是轻子与轻子间能发生引力作用、电磁力作用、强核力作用或弱核力作用的粒子间构成$G[AEP]$的边。对应地，$G[AEP]$上的顶点标号$L : v \in V(G[AEP]) \to v$，边标号为

$$L : (v, u) \in E(V(G[AEP])) \to \begin{cases} \mathbf{F}_g, & r_{vu} \geq 10^{-10}m; \\ \mathbf{F}_e, & 10^{-10}m \leq r_{vu} \leq 10^{-8}m; \\ \mathbf{F}_s, & 10^{-18}m \leq r \leq 10^{-15}m; \\ \mathbf{F}_w, & r_{vu} \leq 10^{-18}m。\end{cases} \tag{12.9}$$

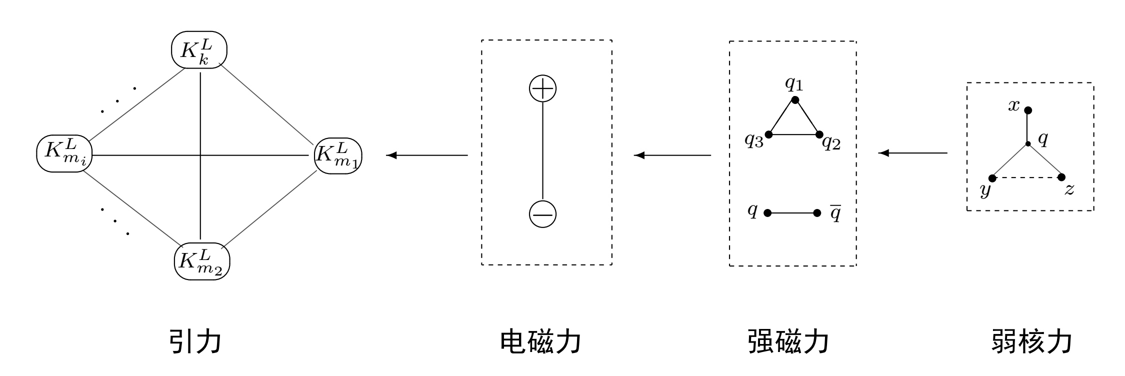


图12.14 流元$G^L[AEP]$层次结构

这当中，r_{vu}为基本粒子v, u间的距离，q为夸克，$\overline{q}$为q的反夸克，$x, y, z \in \{e^{\pm}, \nu_e, \mu^{\pm}, \nu_\mu, \tau^{\pm}, \nu_\tau\}$为轻子。

欧阳博士告诉惠子，由物质构成理论，可以由图12.14一般性地确定$G^L[AEP]$的

层次结构如下：①在力程$r \geq 10^{-10}m$尺度上以引力为主导。这时，任两个质量物体间存在引力，即$G^L[AEP]$中去掉所有轻子后为一个完全图$K^L_{\widehat{k}}$。这里，$\widehat{k}$为宇宙中强子的数量；②在力程$10^{-10}m \leq r \leq 10^{-8}m$，即在①中引力场中的原子与分子尺度上，以电磁力为主导。这时，电荷粒子间按"同性相斥、异性相吸"原则局部构成$G^L[AEP]$中一个个以原子核中的质子为心，电子为叶的星图$S^L_{1,l}$。这里，l为原子中的质子个数；③在力程$10^{-18}m \leq r \leq 10^{-15}m$，即①中引力场中的原子核与强子尺度上，局部构成$G^L[AEP]$中一个个完全子图$K^L_3$或$K^L_2$。这里，$K^L_3$、$K^L_2$分别为夸克构成的重子或介子；④在力程$r \leq 10^{-18}m$，即在①中引力场的夸克与轻子尺度上，$\beta$衰变中的弱作用$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$，$p \to n + e^+ + \nu_e$，$e^- + p \to n + \nu_e$，即轻子与原子核中的质子、中子关联，局部构成$G^L[AEP]$中的一个个星图$S^L_{1,s}$。这里，$s$是与一个质子或中子关联的轻子数量。轻子$x, y, z$间是否关联在于它们是否处在一次衰变中。例如，电子$e^-$与反中微子$\overline{\nu}_e$、正电子$e^+$与中微子$\nu_e$分别处在中子、质子一次衰变中，即它们之间有边相连。

那么，怎样刻画四种基本力的作用场呢？欧阳博士告诉惠子，在力程$r \geq 10^{-10}m$的尺度上主导是引力。这时，场方程为爱因斯坦引力场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = \kappa \mathcal{T}_{\mu\nu}; \tag{12.10}$$

在力程$r < 10^{-10}m$的尺度上，会出现电磁力、强核力与弱核力，可以在外场为引力场，内场分别为电磁场、强核力场、弱核力场，类似于《易经》卦象中的上卦与下挂情形下刻画基本力作用场。这时，基本力作用对应的粒子运动由两部分复合：一是粒子在分子构成的大质量物体，如星体等天体在引力作用下的运动，即$G^L[AEP]$各点的同步运动；二是粒子，包括电荷粒子、强子与轻子，即星图$S^L_{1,l}$、完全子图K^L_3、K^L_2和K^L_1在内场中的运动。而粒子场ϕ遵从Klein-Gordon方程，即

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi = 0。 \tag{12.11}$$

这里，$\hbar, c$和m分别为普朗克常数，光速和粒子质量，$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$。这时，只要能求出粒子场能量张量$\mathcal{T}_{\mu\nu}$，进而求解爱因斯坦引力场方程(12.10)即可确定在引力场作用下的粒子场ϕ。

例如，电荷粒子运动受电磁场作用。同时，电磁场还受引力场这个外场的作用。这时，假设电荷粒子的质量为m，电荷为q，则电磁场$E(r) = q/r^2$，在球对称假设下，度量形式为

$$d^2s = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2。 \tag{12.12}$$

对应地，由定义电磁场的能量张量

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mu\nu} &= -\left(g_{\sigma\nu}F_{\mu\lambda}F^{\sigma\lambda}+\frac{E^2}{2}g_{\mu\nu}\right)\\ &= \frac{E(r)}{c^2}\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0\\ 0 & -A & 0 & 0\\ 0 & 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{bmatrix}\neq 0_{4\times 0}。\end{aligned}$$

这里，

$$F^{\mu\nu}=\frac{E(r)}{c^2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad F_{\mu\nu}=\frac{E(r)}{c^2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}。$$

这样，可进一步求知引力场方程$R_{\mu\nu}=-8\pi GT_{\mu\nu}$的解为

$$ds^2=(1+\frac{4G\pi q^2}{c^4r^2}-\frac{2Gm}{c^2r})dt^2-\frac{dr^2}{1+\frac{4G\pi q^2}{c^4r^2}-\frac{2Gm}{c^2r}}-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2_{。}\quad(12.13)$$

2.3.数学宇宙猜想. 数学宇宙猜想是一个用数学认知宇宙万物的猜想，由美国的M.Tegmark在2003年提出，断言人类外部的自然真实是一种数学结构，即宇宙不仅能够为数学刻画，宇宙本身就是一种数学结构。这是一个令大多数人兴奋的猜想，因为据此可以采用数学刻画万物的状态和行为。同样地，数学宇宙猜想与其说是一种猜想，更不如说它是一种认知万物的思想，与数学组合化猜想类似。欧阳博士问惠子："你还记得数学组合化猜想吗？"惠子回答说："是不是断言任何一门数学科学都可以组合化或是组合重建的那个猜想？"欧阳博士点了点头"正确，这个猜想又称为CC猜想，是基于组合认知宇宙万物的一种思想！这当中的'数学科学'不单是指数学，还包括任一门可由数学定量刻画的学科，如理论物理、理论化学等。"惠子听后说："那这样一来，数学组合化猜想也是针对的认知万物，不是与数学宇宙猜想一致了吗？"欧阳博士回答说："表面看是这样的！但由于人认知的局限性，数学组合化猜想更符合人类认知万物规律。"惠子问欧阳博士："那是否意味着宇宙万物行为可用流元$G^L[AEP]$进行刻画？如果是这样，也太复杂了吧！流元$G^L[AEP]$中不是还有许多细节不清楚啊！"欧阳博士解释说，人认知万物的实质是确定流元$G^L[AEP]$。当然，流元$G^L[AEP]$也需要进一步简化和明晰，但因人在认知上的局限性，构建$G^L[AEP]$是一个无限的渐进过程，一个人终其一生仍会存在认知不到的基元或特性，它只是人认知万物的一个理想模型。

惠子对数学宇宙猜想的作用仍有些含混，对欧阳博士说："数学宇宙猜想与老子《道德经》中的'道可道，非常道'在逻辑上不一致，这个猜想应该是错误的吧!"欧阳博士问惠子："可由数学刻画一件事物是否意味着人可以据此把握这件事物的行为呢？"惠子回答说："当然！我认为一个可由数学刻画的事物行为一定可以为人类把握!"欧阳博士告诉惠子，这种观点是错误的！因为数学包括确定性数学和非确定性数学两个部分。同时，数学认知大都是对事物某一行为特征的刻画，是一种在遵从逻辑一致原则上的形式演绎系统，并不一定是完备的，这种形式系统中同样存在不能证实或证伪的命题！更何况在事物行为中，存在大量事物行为尚不能为数学模拟，更不能为人类所把握。例如，量子力学用可能性刻画微观粒子是否意味着人类可以把握微观粒子呢？当然不是！因为人对微观粒子的观测表明，微观粒子行为相对于人的观测有一个测不准原理，即人对微观粒子的测量不能同时确定一个微观粒子的位置和动量。这样，数学对粒子行为的刻画或模拟并不等同于粒子。这在一定程度上表明，老子《道德经》中的"道可道，非常道"与数学宇宙猜想并不矛盾，前者对应的是认知结果，后者对应的是认知思想，需由认知需要在遵从逻辑一致原则基础上拓广数学，如创立"数学组合学"等拓广人的认知能力。

第3节 科学终结

科学终结这个话题对应的主要是万有理论，认为人类可构造出一种万有理论阐释所有观察到的自然现象而不再需要认知未知事物。例如，中国古代的阴阳、五行和八卦学说，古希腊的阿基米德由几个公理"统一所有理论"，德谟克利特将所有自然现象归纳为原子与原子之间的碰撞，牛顿提出力学三大定律、万有引力定律实现对天体运行规律的解释，麦克斯韦由电磁场统一电、磁和光三个领域，爱因斯坦将引力归为空间弯曲效应，对光与电、质量与能量，并终其后半生致力于引力与电磁力的统一等，无一不是在祈求构建一种万有理论，因为万有理论的出现即是科学终结之时。同时，人可对各种自然现象的"果"由万有理论究其"因"，主宰宇宙运行，不再为一个人的"生死"而烦恼，因为人可以"长生不老"；不再为一个人的"平穷"而缺乏幻想，因为人可以"要风得风、要雨得雨"，可以驾驭宇宙万物满足人的各种需求。这是一幅多么美丽的图画，如图12.13所示，但却是一种以人为宇宙主宰"痴人



图12.14 幻想成为宇宙主宰

痴语”式的幻想，与中国古人对“天道”和“人道”的认知背道而驰，因为“道”在“三生万物”中生“人”的同时，未赋予人的“长生不老”，且在与自然的关系上需要“人法地”而行。那么，科学是否真的会终结呢？当然不会！欧阳博士解释说，理论的统一在一定程度上会使既有理论简洁、规整，但与此同时，人们发现未知事物也在增多，因为科学是人在其力所能及条件下对物“道”或规律的渐进认知，除非人类自己因其惰性不再认知未知事物。否则，科学永远不会有终结。同时，因人类惰性而终结的科学肯定不是万有理论，因为还有人类未知事物的存在。

那么，科学是否会终结呢？欧阳博士解释说，人类对宇宙万物的认知是一个无限过程，科学在整体上永远不会终结，科学的终结出现在科学的局部终结。这种局部终结主要包括三种情形：一是一种理论为另一种理论统一时的终结；二是一种认知方法不能再扩展人类认知能力时的终结；三是一种科学与“人与自然和谐共生”的思想相悖，需要人类主动放弃的终结。

3.1.认知理论终结. 一种理论是对一件事物或事物的特征，在某一时间段经由抽象→假说→概念→判断→推理→理论等思维过程形成的认知与把握事物的一个逻辑体系。理论来源于实践，是理性的认知结果，其最终目的是指导人们认知与把握事物。一般地，一种理论需要经由实践→认识→再实践→再认识这种循环往复以至无穷，不断完善、不断修正既有理论、螺旋式上升的认知过程。这当中，“实践”是理论产生的源泉，“认识”是人对事物抽象认知的结果，“再实践”是理论经由实践的检验，“再认识”是对理论的修正与升华，以完善人对事物的认知。

（1）**理论修正.** 一种理论不完备的一个典型特征是不足以完全刻画事物的行为，即理论与实践间存在矛盾，矛盾出现的原因在于理论建设过程中存在不正确的行为，可能出现在：①抽象阶段，如抽象方法不正确，有本质差别的因素抽象为同一个因素等；②假说阶段，如假设模型与事物行为不完全一致，人为增加或减少了事物行为特征等；③判断与推理阶段，如对事物行为判断的错误，用一种错误的假设进行判断推理或是推理过程不符合逻辑等。这时，经由实践检验即可发现理论与实践的不一致，需要对即有理论进行修正，形成新的理论以指导实践。



图12.15 地心说模型

理论上，虽然实践可以检验理论正确与否，但人是判断理论与实践是否相符的主体，受到检验时间、方法和检验手段以及人认知能力的约束。例如，图12.15中所示的“地心说”为什么存在了两千多年才为哥白尼的“日心说”所取代，因为人在地球上观测，太阳从东边升起、西边降落，月亮接替太阳在傍晚出现、凌晨降落，人的感觉是行星围着地球转。由相对性原

理，人在地球上的观测本就是以地球为原点进行观测，得到"地心说"是一种必然的认知结果。同时，人在认知心理上也乐于接受"地心说"，因为"地心说"表明地球是宇宙的中心，表明人类是宇宙万物的主宰。但这是一种错误的直觉，一旦"日心说"取代了"地心说","地心说"即是一种错误理论，人类也必然失去宇宙主宰的地位。即便到了今天，人们也尚不能判断宇宙是否存在中心，仅是在宇宙大爆炸说下，认为大爆炸最初的原点为宇宙中心，但这不过是一个人类无法检验的假设。

（2）**理论完备.** 任何一种理论，如果已完全刻画了对应的事物行为则称为是完备的。这时，针对该事物的理论必然终结而无需再发展新的理论，因为人类已可完全把握这类事物。那么，这种完备的理论在科学中是否存在呢？欧阳博士告诉惠子，科学中因已完备而终结的理论大量存在，主要集中在"人法地"，即地球上那些人类力所能及的事物认知。例如，针对人"生"开展"五谷"栽培，如图12.16所示的玉米栽培，以及动物饲养的农作物育种学、农作物栽培学、畜牧学、遗传学、兽医学等。与此同时，在"人法地"约束下，人类对地外天体，以及地外是否存在生物的理论则是不完备的，需进一步扩大认知范围，构建科学体系。



图12.16 玉米栽培

（3）**理论统一.** Smarandache重叠空间或系统是将m个两两不同的空间或系统$S_1, S_2, \cdots, S_m$并在一起$S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$成为一个系统$\widetilde{S}$或标号图$G^L[\widetilde{S}]$的实质，在于由整体系统$\widetilde{S}$或标号图$G^L[\widetilde{S}]$认知局部空间或系统$S_1, S_2, \cdots, S_m$的行为，是站在一个更高的视角观测$S_1, S_2, \cdots, S_m$的行为，这是科学发展的一般范式，即站在一个普遍框架统一不同的理论，认知事物行为，实现由局部认知事物真实。这样，旧的理论作为新理论的一个特例或局部，为新理论所取代，这种例子在科学发展史上举不胜举。例如，①牛顿三大力学定律和万有引力定律，以"力作用"统一了天体和地上物体运动，用力学原理解释一切自然现象，将古希腊亚里士多德等人认为的天体运动、地面运动遵从两种不同的规律统一为力作用，实现了"天上"和"地上"物体运动的统一；②麦克斯韦的电磁场方程，即

$$\begin{cases} \mathrm{div}H = 0 & ⓐ \\ \mathrm{rot}E = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H}{\partial t} & ⓑ \\ \mathrm{div}E = 4\pi\rho & ⓒ \\ \mathrm{rot}H = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}J & ⓓ \end{cases} \tag{12.14}$$

统一了电场、磁场中的高斯定律ⓐ、法拉第定律ⓑ、库伦定律ⓒ和安培定律ⓓ。这

里，ρ是电荷密度，J为电流密度，E为电场强度，H为磁场强度；高斯定律ⓐ的物理含义是通过任一闭曲面的磁通量为0；法拉第定律ⓑ见方程(12.1)；昆仑定律ⓒ与牛顿万有引力定律类似，即真空中电荷q_1,q_2间作用力的大小，与电荷的乘积q_1q_2 成正比，与电荷间的距离成反比；安培定律是在图12.17所示的右手螺旋定则下，电路上的电流I与在与电路垂直平面上产生的磁场强度H的关系，即线积分$\int_l H\cdot dl = I$，其中的div和rot为$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z),x,y,z\in\mathbb{R}\}$中向量分析的散度与旋度，定义为

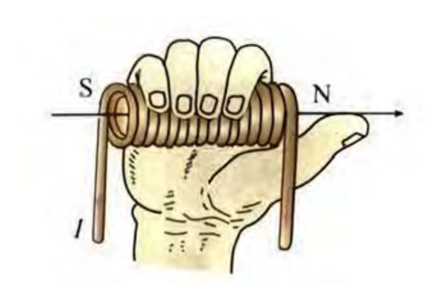


图12.17 右手螺旋定则

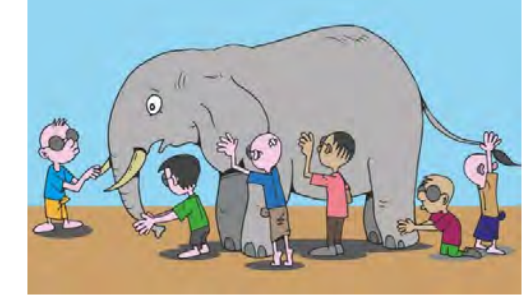
$$\begin{aligned}\mathrm{div}H &= \frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z},\\ \mathrm{rot}H &= (\mathrm{rot}H_x,\mathrm{rot}H_y,\mathrm{rot}H_z)。\end{aligned}$$

这当中，

$$\mathrm{rot}H_x=\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z},\quad \mathrm{rot}H_y=\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x},\quad \mathrm{rot}H_x=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y};$$

③爱因斯坦在“时空”框架$\mathbb{R}^4$中统一了牛顿力学中独立存在的时间$\mathbb{R}$和空间$\mathbb{R}^3$，即时间和空间不是独立而是相对的，并在侠义相对论下由质能方程$E=mc^2$统一了质量m和能量E，即质量是运动物体能量的体现，终结了牛顿力学中的绝对时空观和质量、能量是刻画物质的两个独立特征观点等。注意，宇宙万物在相互作用条件下构成流元$G^L[AEP]$，科学理论统一的终极目标是构造出$G^L[AEP]$，这当然只能是一个无限的渐进过程。

3.2.认知思想终结. 科学是对事物呈现规律的局部认知。那么，科学是怎样对事物呈现规律认知的呢？欧阳博士告诉惠子，是人的思想（idea）或假说（hypothesis）在引导人对事物的认知，即经由对事物的感知，假设呈现出的事物特征符合某种已知的、抽象的规则，用已知规则模拟事物特征，刻画事物行为。在事物的系统认知中，事物T行为是其基元$S_1,S_2,\cdots,S_m$行为的综合，实则是Smarandache重叠空间$\widetilde{S}$或标号图$G^L[S]$，即由基元S_i 的某种特征$\chi_{i_j}(S_i)$对事物T的整体状态与行为$G^L[S]$进行认知，是人认知未知事物的大多数情形。例如，盲


图12.18 盲人认知大象

人摸象那则寓言中，六个盲人摸到的是大象身体的某一个部位，即大象牙齿、鼻子、耳朵、肚子、大腿和尾巴，如图12.18所示。这样，六个盲人感知的结果也千差万别，分别为大象像一根柱子、一段绳子、一个萝卜、一把蒲扇、一堵墙或一段管子，因为由对事物T的局部感知把握事物T的整体行为本就是一件十分困难的事情。

那么，在什么条件下可以认为一种思想或假设完成了对事物T的认知呢？欧阳博士解释说，应当满足以下两个条件：①基元$S_1, S_2, \cdots, S_m$均已把握；②对任一整数$1 \leq i \leq m$，基元S_i的所有特征$\chi_{i_j}(S_i), 1 \leq i_j \leq s$均已把握。在这种情形下，人类已把握了事物$T$构成中所有基元的行为，可视为把握了事物$T$的行为。反之，既有思想或假设因不能指导人类把握事物T而终结，需要创新一种新的思想或假设取代即有的思想或假设认知事物T，这是认知事物T的一般过程。

注意，提出认知思想或假设的主体是人，是人在对事物T进行认知，而一个人的生命是有限的，认知能力与创新能力也是有限的，更何况大多认知思想或假设是依据人对事物T的已有感知结果而提出，正如盲人摸象寓言蕴含的哲学思想，人在认知未知事物时，类似于盲人摸象寓言中的盲人，是由局部认知逐渐过渡到整体认知。这样，人提出的认知思想或假设大多针对的是事物T的局部特征，极易导致一种认知思想的终结，主要表现在：①既有认知思想经实践检验与事物T行为不一致，是错误的，需要提出新的认知思想或假设；②既有思想或假设完全刻画了事物T的行为；③既有思想或假设部分刻画了事物T的行为，能创新提出新的思想或假设刻画事物T的未知行为；④既有思想或假设部分刻画了事物T的行为，但提不出新的思想或假设刻画事物T的未知行为。

这当中，上面第1中情形是科学发展中常见的情形，因为认知思想或假设是人类提出的认知理念，"失败乃成功之母"，正确认知是在无数次错误认知基础上产生的结果；第2中情形是对事物T认知中最理想的一种情形，但在科学发展的今天已不常见，因为那些没有为人类完全认知的事物或是人类尚无法完全感知的事物，或是感知结果构成的是一个复杂系统，尚不足以完全对其刻画；第3种情形是在对事物认知中的一种正常模式，即大多数认知情形在经由不断改进、不断创新情形下一步步地趋近于事物真实，把握其行为。这里，最需要分析的是第4种情形，即人提不出新的思想或假设刻画事物T的未知行为，因为这是科学发展的瓶颈，一定程度上会让人错误地认为科学终结。那么，什么情况下会出现人提不出新的思想或假设刻画事物T的未知行为呢？欧阳博士解释说，对于任何个人感知万物而言，这种情形一定会出现，因为人的生命有限，认知能力有限而万物又处在不时地变化中。同时，一件事物的发展存在由盛到衰的过程，人对事物的认知也不例外。当一个人达到一定年岁后，会出现惰性的本能，表现在：①思想不再活跃，对未知事物不再好奇；②乐

享其成；③受既有思维方式制约，提不出新的思想或假设等，造成个人认知思想的终结，这种情形同样会影响其门人或弟子的创新。这在一定程度上，解释了为什么《科学美国人》杂志的资深撰稿人J.Horgan写的《科学的终结》一书备受争议，因为他得出"科学终结"的结论是源于对哲学、物理学、宇宙学、生物学、社会学、神经科学等领域一些著名学者个人的采访，是由个人的感知而得出的科学终结，是以个人认知思想的终结而得出的一种以偏概全的结论。

3.3.人类主动终结. 人类对科学的主动终结并非是科学的终结，而是对科学中某些领域或某些方向予以限制或终结，即科学在认知万物的同时也需有"度"或标准，这一标准即是有利于促进"人与自然和谐共生"。在人与自然这个二元系统K_2^L中，自然对人类的作用具有即时性，即自然对人类作用的同时人类即可以感知到，"风调雨顺"或是"自然灾害"。然而，人对自然的作用是一种累积效应，具有延时发生，甚至是几代人之后才发生的特点。在这种情形下，科学及其应用应遵从本章第1节中的"科学法则"，坚持科学引导的人类一切活动须对自然无侵扰原则，这在"马太效应"或"资本逐利"的本性引导下的社会发展模式中尤其重要，即需要适度限制或将其终结，主要包括以下三类：

第1类. 影响宇宙运行。

由老子的创世说："道生一，一生二，二生三，三生万物"，人是在三生万物"的环节产生的。这样，由人的认知去追溯宇宙万物的起源是对人出现前宇宙的还原，探索宇宙起源出现的"一"、"二"或"三"既往状态，这是一件相当困难的事。虽然有不少假说和理论，但时至今日，人对宇宙运行的认知几乎是停留在假说与唯象阶段。不仅如此，即便是对地球运行机理也未能完全认知。例如，地球在自转，也在绕着太阳公转，自转角速度平均为$4.167\times 10^3 rad/s$，在赤道上的自转线速度为$465m/s$，是地球25亿多年演化的结果。那么，地球自转加快或减慢对人类有什么影响呢？地球自转越快离心力越大，引力越小。当地球自转速度提高17倍，离心力与引力平衡状态，赤道附近的物体会因失重而漂浮在地球表面；如果地球自转速度提高20倍，地球表面的一切物品将会逐渐瓦解，成为碎片飞入太空。最后，地球也将逐渐瓦解，地球上的生物，包括人类自己将不复存在。这还仅是依据地球引力与离心力间的相互作用分析，实际情况要远比这种估算预测的结果复杂。在这种情形下，那些影响宇宙运行的科学研究与探索须终结。例如，为片面追求人类的经济利益，如图12.19所示的计划攫取地外行星上的黄金等稀有金属、贵金属，或是捕获小行星等，都将最终影响宇宙运行，



图12.19 捕获小行星

改变宇宙秩序，对地球，包括人类自己可能造成的影响不可估量，但可以肯定的事情是，宇宙经自然调整回归到地球适宜人类生存的环境状况至少需要数十万年。同时，在这一自然调整过程中，环境、气候变化与天体碰撞，将导致地球、近地太空中是否仍存在适宜人类生存的星球，以及那时的太空技术是否允许迁移人类到那个星球等都是个未知数，人类又何以能躲过这样的自我毁灭之灾呢!

第2类. 破坏生物多样性。

生物多样性，是指在一定范围内多种、多样的动物、植物和微生物有规律地组合在一起，不同生物与其生存环境，以及不同生物间的相互依存、相互作用，通过物质循环、能量流动和信息交换，构成一个稳定的生态综合群体，包括动物、植物、微生物各物种的多样性，物种的遗传与变异的多样性及生态系统的多样性等。万物存在即是道理，突出表现在其生存环境上，即适者生存。生物多样性的破坏直接影响食物链和气候变化，增加种群携带未知病毒的风险，对病毒传播和人类健康产生重大影响。欧阳博士告诉惠子，时至今日，人类对其他大多生物的理解很有限，并不完全掌握大多生物的生存条件。这在资本主导社会发展中，科学极易为“资本逐利”破坏生态环境而影响生物的多样性，应对其予以限制或终结。例如，农药是一种人工产物，可有效控制病虫害、消灭杂草，提高农作物产量和质量。但与此同时，农药不被自然降解或难被自然降解，导致环境污染和作物上农药残留，破坏了土壤结构，污染水资源，一定程度上会杀死土壤、水中的生物或微生物。再比如，一个区域的生态圈是经过宇宙数十亿年演化的结果，外来物种的入侵会导致与本地土著生物争夺生存空间、食物，传播疾病、与土著生物杂交诱发遗传污染等降低本地土著生物的生存能力，导致本地土著生物减少或灭绝，同样破坏生物的多样性等。



图12.20 生物多样性

第3类. 影响人类自己生存。

人是环境造就的产物，可为什么人诞生在地球而不是在其他星球上？答案是地球上有适宜人生存的条件，包括地球与太阳的距离，地球引力的大小适中，大气层将阳光中的紫外线降低到人可承受，适宜人生存，有富含氧气的空气，以及适宜人饮用的水、食物和活动空间等。同时，人自身也适宜在地球这个环境中生存。那么，宇宙中是否还有其他星球适宜人类生存呢？欧阳博士告诉惠子，虽然一些研究机构自称发现了地外适宜人类生存的星球，但因人类的航天技术尚不足以载人到那些星球上进行实地验证，仅是人在地球上依据收集到的观测数据分析的结果。判定一个地外星球是否适宜人类生存最简单的标准，是检验这些星球上是否存在“人”而不

能仅是存在其他生物、动物或人生存的某些条件，因为环境造人，既然适宜人类生存，在万物法则或或者“道”的作用下，这些星球上就应已经造就出与“地球人”一样的“人”而不能仅是其他生物。但时至今日，尚未发现地外星球上存在与地球人一样的人种。故此，由“人法地”人类只能生存在地球上。这样，为保证人“生”必然涉及两个方面的事项：一是对地球环境的保护，限制或终止那些为资本逐利而破坏地球环境的行为，包括上面第1类和第2类科学研究及应用；二是对人体自身的保护，限制或终止那些试图改变人类繁衍、人体运行规律的科学研究及应用，因为无论是对地球环境的影响还是对人类自身，这类科学研究或应用对人类自己的影响都具有延时性，影响的是人类的子孙万代，在人与自然和谐共生思想指导下，必须对类似的科学及其应用予以限制或终结。例如，图12.21所示的是克隆羊多莉。因违反自然法则，克隆羊多莉是伴随母体既有疾病同时被克隆的，从出生到衰老与母体类似，存在早衰现象，在六岁即夭折。类似地，还有克隆猪、克隆猴、克隆牛等克隆技术，以及对人类胚胎的基因片段进行剪辑的基因编辑等违反自然法则的生物技术等。



图12.21 克隆羊多莉

第4节 道本无心

科学认知的无限与个人科学生涯的有限在一定程度上表明，任何一个人不可能在有生之年认知万物法则，也不可能把握万物。这在一定程度上形成了人类认知万物时的一对矛盾：一方面，人类始终奔驰在经由科学认知万物的路上，正如图12.22所示；另一方面，个人的认知仅是科学认知万物之路上的一个片段，即个人仅能窥探万物的局部规律。这样一来，个人的科学研究与探索注定无法到达认知万物的彼岸，存在自叹力不从心的时候。这时，一个人在创新思想匮乏时易产生认知的彷徨，移心他处替代对万物的科学追求或是以宗教为其认知以求心驻，是一个人在对外界未知事物存在恐惧心理状态下求取心安的一种常态。一些人以牛顿、爱因斯坦为例，称牛顿、爱因斯



图12.22 科学的尽头是什么

坦晚年转向基督教、佛教佐证了“科学的终点是神学”或“科学的终点是佛学”等终极答案。那么，应当如何看待科学的终点是神学这种观点呢，牛顿、爱因斯坦等人是否又真的认为科学的终点是神学呢？科学是对事物的系统认知，是一种可检验的知识系统，不承认超自然力量或拟人化的“神”；宗教就其本质而言是对超自然力量拟人化“神”的崇拜，二者有着本质的不同。那种认为牛顿、爱因斯坦信奉宗教佐证了“科学的终点是神学”的看法，实则是在对牛顿、爱因斯坦等人科学思想的误读。欧阳博士解释说，人类文明史表明，认知万物并在万物中求“生”是人类追求的目标。这样，宗教虽然是对超自然力量拟人化“神”的唯心崇拜，但仍含有对万物认知的成分，可为科学所借鉴。

4.1.科学缘起性空. 老子在《道德经》中称“道”与“名”是“故常无欲，以观其妙；常有欲，以观其徼”中的“无欲”和“有欲”，是人在认知一件事物中出现的一种影响认知结果的状态，即“无欲”时的认知是一种事物外在表象的结果“妙”，“有欲”时是一种事物内在认知的结果“徼”，即界定不同“名”内涵的区别。这当中，科学认知是一种“有欲”，与佛学中讲的“缘起”存在异曲同工之妙。

科学的本质在于对事物“缘起”的认知，以形成人类关于事物的系统知识。那么，什么是缘起，什么又是缘起性空呢？欧阳博士告诉惠子，“缘起”是佛学中的一个基本概念，认为世间上的一切事物（称为有为法）均非凭空而有，不能单独地存在，均需依靠种种因缘条件和合才能出现，一旦因缘和合条件散失，事物本身也就化为乌有，即事物的本性是“空”。这里，“因”是指一切事物生灭的内因，“缘”是它的外因，“因缘”是一切事物生灭的条件，即佛学因果定律中的“诸法因缘生，诸法因缘灭”，意思是世间一切事物、现象的生起都是相对的，都是互相存在的关系和条件，失去了这个关系和条件，任何事物和现象都无从生起。注意，“缘起性空”是佛学对万物的一种认知，认为万物的本性是“空”，不是“实”，是人的“六根”因缘和合地在赋予万物的“特征”，因为人对万物的认知也是一种缘起，这也是《金刚经》中“若见诸相非相，即见如来”或《心经》中“色不异空，空不异色；色即是空，空即是色，受、想、行、识亦复如是”的深刻含义，即万物是人在认知，是人在认知中赋予了万物不同的“色”。这里，“空”是事物本性；“色”是指人的“六根”能感知的一切由因缘和合产生的事物和现象，如图12.23中所示人眼中的山水、风景和鱼人，与老子《道德经》第四十章中的“天下万物生于有，有生于无”中的“有”和“无”等同，均是人的“六根”在对万物进行



图12.23 渔歌唱晚

认知与界定。

这样，科学研究作为人对万物呈现规律的系统认知，是一种“缘起性空”。这主要表现在以下三个方面：①科学既然是人对万物呈现规律的认知，万物呈现出的规律本就是万物间的“缘起”，是人在认知这种“缘起”，必然是一种“缘起性空”，因为对任一事物认知前一定是未知或“空”；②术业有专攻。一个人研究什么、不研究什么与他的学识有关，更与这个人的兴趣、爱好和追求有关。例如，有的人兴趣在发现物质构成与宇宙演化规律，有的人兴趣在发现化学反应产生新物质，或是生物演化和遗传规律，还有的人兴趣社会群体演化规律等，均是个人“兴趣”使然。这里的“兴趣”即是科学研究的“缘起”；③思想有机缘。对一件事物的认知，不同的认知思想会产生不同的认知结果。为什么对同样一件事物认知或研究同样一个题目，有人成功却有人失败，与其认知事物采用的思想有关。这里的“思想”也是一种“缘起”，包括对事物的观测、计算、假说、模型构建、实验和理论构建，不单是人在认知中的“机缘”，还包括个人的努力和认知能力等“缘起”。

类似地，科学成果的应用也是一种“缘起性空”。为什么有的科学成果可以顺利实现成果转化，为人类社会带来福祉，而有的成果始终停留在理论层面，无法实施应用转化或是应用不仅不增加人的福祉，还会给人与自然和谐共生带来伤害，均是这类科学成果自身的“缘起性空”使然。那些能够实现科学成果转化造福于人的，是这些科学成果本身存在可造福于人的“缘起”。反之，那些无法实现科学成果转化或是转化会给人与自然带来危害的，同样是这些科学成果本身带有危害人类或是自然的“缘起”。这是开展一项科学研究或实施一项科学成果应用需首先意识的一个重要问题，即是有益还是有害于人与自然的和谐共生。

4.2.科学印证宗教. 科学与宗教都是人对万物的认知，都是在一定程度或范围上满足人“生”的需求。二者的不同之处在于，科学讲求质疑和实证，宗教则是对神不容置疑地崇拜。那么，科学与宗教是什么关系呢？欧阳博士告诉惠子，不同的人站的视角不同，对这个问题给出的答案并不相同。有人单纯站在科学这一边，认为科学与宗教是一种不可调和的对立关系，认为科学代表真理而宗教代表谬误；有人单纯站在宗教一边，认为科学只能在一定程度上解决人的物质需求而无法解决人在精神上的匮乏，并以牛顿、爱因斯坦为例，主张“科学的终点是神学”，认为只有依赖神明人类才能繁荣昌盛。需要特别指出的是，这两种观点对人“生”都带有一定的局限性或偏颇。首先，科学与宗教都是人对万物的认知，两者间不存在决然的对立，而是各自在人“生”需求的物质或精神领域发挥作用；其次，科学与宗教都不能完全满足人“生”的需求，两者各有其特定的社会价值，需要和谐以解决人类发展中的问题，因为科学是在解决人的物质需求，宗教是在实现人的精神慰藉；第三，

科学与宗教存在相互影响、相互促进，是一种对立统一的关系。在这一点上，世人对牛顿、爱因斯坦等人信奉宗教存在一定的误解，认为他们的行为佐证了“科学的终点是神学”，实则不然。欧阳博士告诉惠子，牛顿、爱因斯坦等人信奉宗教并非是对“神”的盲目崇拜，而是由宗教认知中发现科学灵感，证实或证伪宗教对万物的认知结论。这一点，体现在牛顿著名的《自然哲学的数学原理》，以及爱因斯坦科学与宗教观，特别是其名言“没有信仰的科学是浅薄的，不讲科学的宗教是盲目的”之中，即科学与宗教相互影响、相互促进的辩证关系。



图12.24 牛顿

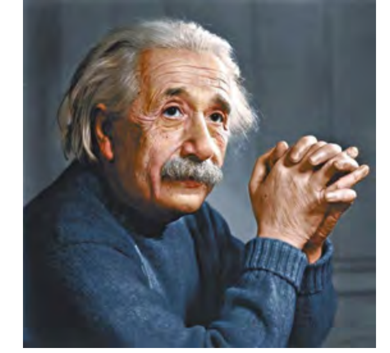
牛顿的科学哲学. 英国圣公会是基督新教的一个教派-圣公宗，与信义宗、归正宗同属基督新教三大主流教派。牛顿出生时，英国国教是圣公宗，大环境是每一个人都有宗教信仰。在这样的大环境中，信奉上帝就是一件自然的事情，但牛顿信奉上帝不是一种盲目的崇拜，而是将上帝看作是一种非拟人化的“自然神”，类似于道家的元始、灵宝、道德等三位天尊。牛顿的这种哲学观表现在：①不相信耶稣是神，不相信“三位一体”理论，即基督教中的上帝创造世界、上帝藉着耶稣基督救助人类、上帝藉着圣灵与基督徒和教会同在。他也不相信不死的灵魂或永生。在他的眼里，崇拜耶稣是一种“神像崇拜”，是一种原罪。的确，他接受上帝创世说，但不同意上帝在造出一个完美的世界后无需进一步管理；②牛顿坚持研究圣经的目的，在于发现圣经中所隐藏的信息，尝试从圣经中提取科学的养分，解释圣经中对万物的认知。

在这种哲学思想引领下，牛顿不仅信奉上帝，还把上帝作为促使其钻研科学的动力，其主要科学成就涵盖力学、数学、光学、热学和哲学等领域。例如，他认为宇宙中存在一个绝对的笛卡尔坐标系$\mathbb{R}^3$描写物体运动，时间$t\in\mathbb{R}$是独立于物体运动的一个参量。这样，在总结前人结论基础上，牛顿系统提出了力学上的三大定律，包括①惯性定律，即任一个物体在不受任何外力或受到的力平衡时，总保持匀速直线运动或静止的状态，直到有外力迫使它改变这种状态为止；②力F是运动物体产生加速度a的原因，加速度a的大小与力F的大小成正比，与物体质量m成反比，即$F=ma$；③作用力F与反作用力F'作用在同一直线上，它们大小相等、方向相反，即$F=-F'$和万有引力定律，即引力的大小与物体质量的乘积成正比，与两个物体质心间的距离平方成反比等，用机械运动正确地刻画了宏观物体低速运动的规律，实现了地球上物体和天体力学的统一，创立了经典力学理论体系。在数学上，为解决运动物体轨迹计算，如切线问题、求积问题、瞬时速度，以及运动轨迹的极大和极小值问题等，牛顿将自古希腊以来求解无限小问题的技巧统一为两类运算，即微

分和积分，并确立了这两类运算的互逆关系，从而完成了微积分发明中最关键的一步，为近代科学发展提供了最有效的工具，牛顿自称之为“流数术”的微积分。据记载，牛顿研究微积分的时间可能比莱布尼茨早，但莱布尼茨关于微积分的著作发表时间比牛顿早，这就是今天人们习惯于将微积分称为牛顿-莱布尼兹微积分的原因。

牛顿始终评价自己的科学成就是在“追随神的思想”,“照神的思想去思想而已”以迎合当时的社会，并总结其世界观说:“宇宙万物中必定有一位全能的神在掌管、统治。在望远镜的那一端，我看到了神的踪迹。”那么，牛顿这种自我评价是否意味着他是在对上帝的盲目崇拜呢？当然不是！欧阳博士解释说，虽然在骨子里无法抹掉对基督的信仰，但牛顿话语中“神”的真实含义是“自然神”而并非是基督教中的上帝，他的科学研究是在印证事情真相，认为“自然神”在创造了万物以后，为万物设定的各种运动规则可以为人类所理解。这样，牛顿的宇宙观实质上是一种朴素的“机械宇宙观”，即以机械运动理解宇宙而非对神的盲目崇拜。

那么，牛顿对宇宙机械运动的解释是否为基督教所接受呢？1713年5月12日，英国圣三一学院的院士罗杰.科茨在为《自然哲学的数学原理》第二版编者序言中概述牛顿由引力解释天体运动等成就后，写了这样一段话:“牛顿的这部杰出著作最安全地防止了来自无神论的攻击，我们不能从别的地方而只能从这个箭囊里拔出武器来对付这帮不信神的人”即是在从神创论角度对牛顿科学成就的肯定。这从一个侧面反映了牛顿是在宗教中发现科学创造的灵感，是在用朴素的科学思想解释或印证宗教对宇宙万物的认知。


图12.25 爱因斯坦

爱因斯坦的科学哲学. 爱因斯坦那句“没有信仰的科学是浅薄的，不讲科学的宗教是盲目的”曾让一些人认为爱因斯坦是一个有神论者，实则不然！与牛顿生活在圣公宗为英国国教的时代不同，爱因斯坦生活一个宗教信仰自由的年代，他认为宗教是幼稚迷信的化身，但他深信宇宙万物的统一性和逻辑上的一致性，赞叹宇宙和自然的美丽。例如，他在1940年曾写过一篇著名的文章为其认为宇宙中没有上帝的观点进行辩护，明确表示“我不信仰一个人格化的神”。爱因斯坦的这种表态曾一度激起一些宗教人士的极力反对。对此，他再次声明“我们物理学家的努力仅仅是跟随他画的线前行”，这里的“他”是宗教中“上帝”一词的指代。爱因斯坦在给一个友人的信件中曾对其宗教信仰做过这样的总结:“有一个无限的高级智慧生物通过我们脆弱无力的思维可以感受的细节来显示他自己，对此谦卑的赞美构成了我的宗教信仰”，以及“我认为犹太教就跟所有其他宗教一样，是幼稚迷信的化身，⋯。我认为，上帝这个词，不过就是一

种措辞，是人性弱点的产物。圣经中充斥着许多光荣但仍相当简陋且非常幼稚的传说”等，均表明爱因斯坦有宗教信仰但绝不对神盲目崇拜。

爱因斯坦曾在其一篇文章中分析科学与宗教对一个人“生”的贡献，认为科学是一种历史悠久的努力，力图用系统思维把这个世界中可以感知的现象尽可能彻底地联系起来，通过构思过程，后验地来重建存在。同时，一个受宗教感化的人已经尽其最大可能从自私欲望的镣铐中解放了出来，而全神贯注在那些因其超越个人价值而为他所坚持的思想、感情和志向。这样一来，宗教是人类长期的事业，它要使人类清醒地、全面地意识到这些价值和目标，并且不断地加强和扩大它们的影响。如果人们根据这些定义来理解宗教和科学，那末它们之间就显得不可能朦胧什么冲突了。因为科学只能断言“是什么”，而不能断言“应当是什么”，可是在它的范围之外，一切种类的价值判断仍是必要的。而与此相反，宗教只涉及对人类思想和行动的评价，它不能够有根据地谈到各种事实以及它们之间的关系，即科学与宗教间不应该存在什么正当的冲突等。

与牛顿的宗教思想类似，爱因斯坦信奉的上帝不是一个人格化的“神”而是宇宙万物在运行上的统一性和逻辑上的一致性，进而发现事物呈现出的规律，获得了让人瞩目的科学成就。例如，①狭义相对论，即一切惯性参照系中的空间和时间表达的物理规律在形式上应当是洛伦茨变换下不变的，且光速c在所有惯性参考系中不变，它是物体运动的最大速度；②提出质能方程$E = cm^2$统一一个物体的能量E和质量m；③广义相对论，即物理学的定律应对于无论哪种方式运动着的参照系都成立，或表述为描写一个客观事物发展规律的方程式应当在所有的坐标系中具有相同的形式；④提出引力场方程，认为物质的存在造成时空发生弯曲效应，引力场实际上与人的直觉不一致，是一个弯曲的时空，就连光线也不例外；⑤解释水星近日点进动时差，预言引力红移，即在强引力场中光谱向红端移动，以及引力场使光线偏转等，后经实测证实；⑥提出光子假设，成功解释了光电效应等。

那么，爱因斯坦科学成就中最让世人瞩目的是哪一项呢？答案当然是广义相对论！欧阳博士告诉惠子，在世人的眼中，广义相对论与爱因斯坦画上了等号，因为爱因斯坦的广义相对论彻底改变了牛顿等人在认知中的绝对空间，扭转了人在地球上局部认知的观测直觉，即宇宙真实的物质空间是弯曲而不是平直空间。那么，广义相对论与宗教是什么关系呢？欧阳博士解释说，广义相对论认知宇宙万物的思想实质，正是佛学“缘起性空”中的“缘起”，因为“缘起性空”是佛学阐释的认知相对性，而科学是人在对万物认知，是人的“六根”感知在认知万物，必然遵从“缘起性空”或认知相对性，即不因观测人的不同而改变，这就是爱因斯坦的广义相对论。另一方面，爱因斯坦的广义相对论也是“缘起性空”的科学诠释，一定程度上印

证了“缘起性空”这一佛学中的认知观。这个事例再次表明，科学与宗教是可以相互促进、共同发展的，因为宗教对万物认知中的那些正确思想是人类文明的宝贵财富，必然可为科学所借鉴并推动科学的发展。同样地，科学也可以印证宗教中的认知思想，促进宗教对自然的正确认知，与宗教和谐共处。

4.3.科学本无心驻. 科学与宗教既然可以相互促进、共同发展，那么，为什么一些人放弃科学而转向宗教，认为科学的终点是神学呢？欧阳博士告诉惠子，“道本无心”，万物是遵“道”演化的结果，即便是天地，呈现出的也是“天地不仁，以万物为刍狗”，即天地或“道”无私，不故意倾向于哪种“物”或“无心”。对应地，科学作为物“道”的局部表现，当然不存在是否能让人驻心的问题，因为心长在人的身上，是否能够驻心取决于人而非科学或“道”。这样，一些人放弃科学而转向宗教并认为科学的终点是神学的原因，并非是宗教揭示了万物法则而是在于人的生命有限，对万物认知的能力也有限，即任何一个人都存在其科学生涯终结的问题。在这种情形下，科学认知的局限性不可能阐释其心中对未知事物的疑惑，不可能让其心驻。那么，什么样的事可以让人心驻呢？欧阳博士解释说，在人类看来，①植物的“生”仅需物质满足，如有雨水、空气、肥料、光合作用等物质即可维持其生长；②动物的“生”以种族维系为核心。除满足物质需求外，动物的精神需求是作为物质需求的调味品。例如，动物间的争斗常发生在觅食，如图12.26所示或是争当氏族领袖，维持种群社会的秩序；③人“生”则有两个方面，一是物质需求，解决人的衣、食、住、行问题，与一般动物需求类似；二是精神追求，独立进行、自由表现且游离于满足人生理的物质以外，这是人与动物最大的区别。对此，《道德经》第十二章中是这样阐释的，即“五色令人目盲；五音令人耳聋；五味令人口爽；驰骋畋猎，令人心发狂；难得之货，令人行妨。是以圣人为腹不为目，故去彼取此”。这当中，五色、五音、五味、驰骋畋猎或是难得之货在一定程度上可以满足人的人的精神需求，过度追求即是佛学中的“贪、嗔、痴”，让人目盲、耳聋、口爽、心发狂或是行妨，即非是在遵“道”，而需学习圣人的“为腹不为目”。



图12.26 狮子捕食

但是，人世间又有多少人能够以圣人的准则约束自己行事呢？欧阳博士告诉惠子，对大多数人而言，人“生”维系心驻的表现仍在物质或精神两个方面，即当一个人的物质需求尚不足以满足其或家人“生”的需求时，必以物质追求为其心驻；反之，当一个人的物质需求足以满足其或家人“生”的需求时，必以精神需求为其心驻，

包括：①以人世间娱乐为心驻；②以为他人谋福祉为心驻；③以科学为心驻；④以宗教信仰为心驻等。这当中，科学的宗旨在于认知事物呈现出的规律，当一个人创新思想枯竭或是科学的局限性不再能使其心驻的时候，必然会寻求其他使其心驻的方法。这时，追求物质享受、以人世间娱乐、为他人谋福祉、宗教信仰等中的一个或多个均可能成为备选项，而宗教信仰，特别是宗教中的“神创说”在一定程度上可以就其心中对自然中的一些疑问解惑，实现心驻。这就是一些人为什么会以牛顿和爱因斯坦为例，认为“科学的终点是神学”或“科学的终点是佛学”并转而信奉宗教的原因，实则是其对牛顿或爱因斯坦科学哲学的误读，因为这俩人都认为科学与宗教不是决然对立而是一种相互影响、相互促进的辩证关系。

第5节 科学人生

科学是人对事物规律认知的产物，技术是应用科学服务于人类社会，提高人“生”的能力，以适应自然并丰富社会生活中的手段、工艺和技能。二者合二为一，即科学技术的宗旨在于提高社会生产力，繁荣社会生活，加快人类文明的进程。这当中，社会需求是科学技术发展的原动力，对科学技术的发展具有导向、选择和调控作用。同时，科学技术的进步促进生产力要素的变革，促进生产要素的组合与创新，影响社会基础结构的改进，推动社会的发展。例如，以蒸汽动力、水压、电力和原子能为动力驱动发明的蒸汽机、水压机、内燃机等改善了纺织业、采矿业、冶金业和运输发展，以及汽车、火车、轮船和飞机等交通工具诞生；以机器替代了手工劳动，提高了劳动生产率，为运输业和人的出行提供了便捷，人工合成材料、航天技术、电子计算机、互联网和人工智能等科学技术的发展，以及机器人在生产生活中的广泛应用进一步降低了人的劳动强度、危险性，提高了生活便捷，进一步彰显科学技术对人类社会发展的促进作用，使人的物质和精神需求得到了极大满足。与此同时，自然对人类活动的反作用或地震、雾霾、洪水、泥石流、极端天气等也在这些年频发。那么，科学技术服务于人类的终极目标是什么，是推动人类成为宇宙主宰吗？当然不是！欧阳博士告诉惠子，人类对自然的探索永远在路上，科学不过是对万物法则的局部认知，犹如游客观景。在这种情形下，人类不可能成为宇宙主宰而只能与自然和谐共生。这涉及到人“生”的一个基本问题，即人类的终极目标是什么？欧阳博士解释



图12.27 科技改变人生

说，人类的终极目标有二，一是人类的“生”或种族延续；二是实现人的精神需求，即追求心理的满足或幸福。在人类这种终极目标下，科学应当怎样发展才是服务于人与自然和谐共生呢？答案需以人与自然和谐共生这个二元系统为人类科学技术的基础，即以实现人类的种族延续和精神需求为目标，以与自然“和谐共生”为准则，发展那些能够促使“人与自然和谐共生”而非是那种仅满足人类自我需要的科学或技术。这时，既需要进一步认知未知事物，同时需要加强人的自我约束。

5.1.科学两难困境. 科学是人对物“道”的局部认知，其宗旨是构建万物组成的流元$G^L[AEP]$，在性质上必定“无心”，但技术则不然，因为技术作为科学服务于人类社会的手段、工艺和技能，是丰富人类生活的产物，与“道本无心”不同，技术或科学技术一定“有心”，这当中的“心”就是人“心”。这样，科学服务于人的物质与精神需求的“度”在于保持人与自然构成的二元系统K_2^L中的节点守恒，即人类活动造成的废弃物对自然无侵扰或是人类对废弃物留置，不侵扰自然，因为在人与自然这个二元系统中，科学是人在力所能及条件下对万物法则的认知，认知的规律均为局部规则或条件成立，并不知晓人类活动的废弃物对自然造成的侵扰程度。这就是科学两难的困境，一方面，科学应用可以丰富人类的生活；另一方面，在“资本逐利”的影响下，一项科学成果很易于被夸大其有益于人类社会的一面而忽略或看不清其有害的一面，科学应用如不加以约束滥用，将打破人与自然经由数十亿年形成的二元系统K_2^L中的节点守恒，而自然调节回归K_2^L中的节点守恒伴随的必然是环境变化，将直接影响人类生存条件的改变甚至灭亡。故此，需在人与自然和谐共生的条件下，检验科学技术对人与自然的双边影响，进而引导科学技术的发展。

（1）科学技术益处. 科学技术的进步极大地丰富了人类的物质需求，包括人的衣、食、住、行。同时，带给人们生活中的精神享受与快乐。这里，以物理学、化学和生物学为例，例举科学技术进步给人类带来的益处：①物理学对物质由宏观到微观层面的深刻理解促进了人类社会发展，如蒸汽机、电流理论及其在运输、通讯中的应用，核能、激光、计算机技术、网络技术等促进了人类工业革命和技术进步。可以说，如果没有物理学对物质结构的深刻理解，就不会有其他科学的产生，也不会有人类今天的现代生活；②化学有益于人类社会在于其是伴随着人类社会的发展，解决怎样通过化学反应产生新物质，以适应人类日常生活所需。没有化学就不会有人类的现代生活。例如，能源是大规模工业化生产的基础，包括能源开发、生产，如煤炭、石油、天然气的开采、储存和电力生产等的源头是化学反应方程$C+O_2\rightarrow CO_2$，$2C+2O\rightarrow 2CO$，在此基础上才有应社会需求的工业生产，如化肥在于提高农产品产量以满足人类生存需要，化学农药杀死有害昆虫以促进农作物生长，医药治愈疾病以延长寿命，塑料与合成纤维普遍使用于现代工业和消费品

中，如键盘、鼠标、塑料杯、拖鞋等日常用品，工业仪器仪表、电子设备、手机等工业产品，以及军事上的炸药、炸弹和导弹等，无一没有化学应用的影子；③生物学是农学和医学的基础，涉及种植业、畜牧业、渔业、医疗、制药、卫生等领域。例如，基因工程与细胞工程对人类社会产生巨大影响，在一定限度内定向改造植物，培育优质、高产、耐旱的优良品种；转基因技术可提高农作物抗虫性，解决作物农药残留、提高农作物品质和产量；抗原基因可生产食用植物疫苗；动物器官可代替人体器官延续人的生命；克隆技术可检测出胎儿遗传缺陷和治疗神经系统损伤，实现无性繁殖，拯救濒危物种；基因编辑可纠正缺陷基因以达到治疗目的；环境污染中的农药、工业废弃物可通过基因工程进行回收和利用等，以及利用动物细胞大规模培养技术生产疫苗，进行动物、农作物优良品种育种、检测病毒株间差异、鉴定细菌种型医治疾病等，促进了人类社会发展。

(2) 科学技术害处. 一般地，人们习惯于在人与自然构成的二元系统K_2^L中站在人这一端评判一项科学技术成果的益处而忽略其对自然的作用或累积效应，造成一定时期后才发现该项成果对人类的害处，这是人的认知局限行使然。这里，以物理学、化学和生物学为例，例举科学技术的害处：①物理学在推动人类社会进步的同时，对人类生存环境也带来一些不必要的损害。例如，物理学推动了航天工业发展以使人类对外太空进行探索。然而，越来越多的卫星、空间站、探测器、火箭残骸以及爆炸残片，无论是正在使用还是已经报废，均在空中漂浮，一定程度上扰乱了宇宙的正常运转，对人类进一步探测太空构成了一定威胁，因为与其中任何一个不确定漂浮物的撞击都会导致探测器毁坏。同时，即便是在人们的日常生活中也可发现物理成果应用带来的一些损害。例如，通讯设施、设备，如手机、无线电台、电视台、微博通讯站等在带给人类便利的同时，需不时向空中发射电磁信号，这在一定程度上会对图12.28所示的脑电波运行产生干扰，对人体造成不利影响；②化学工业在由化学反应造出新物质，以满足人类物质需求的同时，那些对人类看似无益的化学反应遗留物，无论是气态、液态还是固态大都为人们遗弃在自然中，引发一系列环境问题。例如，环境污染、资源枯竭、医药副作用、农药残留等，导致一些致命疾病，如癌症等盛行。为什么会出现这些与科学技术造福人类的宗旨不一致的事情呢？原因在于人类对化学品的稳定性、毒性扩散及自然消纳等仅有些浅显的认知，缺乏其对人类以及环境影响的完整结论。即便是对人类有益的化学品也可能存在这一问题。



图12.28 人脑电波

例如，塑料可以保护人在雨天不被淋湿，但在短时间内大自然对其根本无法降解。再比如，人们至今也不清楚农药在食物链中的积累以及其对生物体的影响机制，物种多样性受到挑战；③生物学在带给人类诸多益处的同时，也出现了许多对人“生”的负面影响。例如，基因工程在提高农作物抗虫害性的同时，使得以这些害虫为食的益虫也遭受了毁灭。食用转基因食物可能使被转基因侵入人体细胞，产生病原病毒，造成人的有害或致死效应，包括癌症等负面效应；克隆技术对自然、社会和伦理的影响，克隆技术减少遗传变异，致使其免疫力低下或其他功能丧失，一种致命疾病就可能毁灭一个生物种群，一定程度上增加了疾病传染风险等；基因编辑虽然纠正或切除了缺陷基因，但同时有可能影响其他基因正常工作，导致被编辑体不再适应于既有的生存环境等。

那么，人类应怎样才能走出科学两难的困境呢？欧阳博士解释说，走出科学两难困境的核心在于由人与自然二元系统K_2^L中检验一项科学技术成果而不单纯地看其是否有利于人类自己。注意，自然对人类的作用是一种即时作用，而人类活动对自然的作用是一种累积效应或延迟表现。在这种情形下，人们应怎样理解天人合一场方程（11.1）中的守恒关系进而走出科学两难的困境呢？欧阳博士告诉惠子，这时的节点作用应是对历史的求和，即在方程(11.1)中假设$L(v,u)=(L_1(t),L_2(t),\cdots,L_n(t))$为时刻$t$人类活动对$n$个自然事项的影响向量，$\mathcal{R}^P[t]=(\mathcal{R}_1[t],\mathcal{R}_2[t],\cdots,\mathcal{R}_n[t])$为对应的自然消纳向量，则

$$A_{vu}^+:\ L(v,u)\ \to\ \int\limits_{t=0}^{t} L(v,u)[s]ds=\int\limits_{t=0}^{t}\left(L_1(s),L_2(s),\cdots,L_n(s)\right)ds \qquad (12.15)$$

是人类活动对自然的侵扰向量，不等式

$$\int\limits_{t=0}^{t}\Big(L(v,u)[s]-\mathcal{R}^P[s]\Big)\,ds\ \le\ \mathcal{N}_{\max}^P \qquad (12.16)$$

则是人类活动的自然容许条件。这当中，对任意整数$1\le i\le n$，$L_i(t)$和$\mathcal{R}_i(t)$分别是K_2^L中由科学技术引导的人类活动对第i自然事项的侵扰量和自然消纳量，t是持续人类活动的持续侵扰时间，向量$\mathcal{N}_{\max}^P=(\mathcal{N}_1^{\max},\mathcal{N}_2^{\max},\cdots,\mathcal{N}_n^{\max})$是人类生存容许的自然事项最大向量。注意，人类活动容许条件(12.16)是一个向量不等式，其含义是对任一整数$1\le i\le n$均有不等式

$$\int\limits_{t=0}^{t}\left(L_i[s]-\mathcal{R}_i[s]\right)ds\ \le\ \mathcal{N}_i^{\max}\ 。 \qquad (12.17)$$

5.2.科学范围约束. 一般地，人们从科学宗旨上看，普遍认为科学研究与探索不存在禁区，即科学可以对宇宙中的任何事物开展研究与探索，但实则不然，因为从维护人与自然二元系统K_2^L的和谐共生检验科学及其应用，科学研究与探索以及应用的范围必然存在约束条件。特别是，科学不能从事或应用于那些有害于人类自己或是侵害自然的事项，这应当是人类科学发展的道德底线。

（1）自然限制. 科学范围必然受限于自然对人认知能力的约束，即自然限制。欧阳博士解释说，这主要表现于"道"在"三生万物"中对人认知能力的约束造成科学范围的约束。例如，如果宇宙大爆炸说是正确的，则任一种人造飞行器的速度不可能超越光速。这样，由于宇宙大爆炸已过去了138.2亿光年，飞行器即便是以光速飞行也需要138.2亿年。这时，假设宇宙扩展速度与光速的比值为α，则在138.2亿光年后宇宙又扩展138.2α光年，人造飞行器需再飞138.2α光年，138.2α光年后又需要飞行$138.2\alpha^2$光年，$\cdots$，形成一个等比级数$138.2, 138.2\alpha, 138.2\alpha^2, \cdots$。故此，人造飞行器需要飞行

$$138.2 \times \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i = 138.2 \times \left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^k + \cdots\right) \tag{12.18}$$

光年能到达宇宙的边界。但(12.18)是一个无穷级数，计算结果是一个有限数吗？由级数(12.18)的收敛条件，如果$|\alpha| < 1$，即宇宙扩展速度小于光速，则无穷级数(12.18)收敛到$138.2/(1-\alpha)$，人造飞行器以光速飞行在有限的时间（假设飞行能量供给充足且人的寿命满足探索需要）能够到达宇宙边界，但不幸的是，宇宙扩展速度即是哈勃常数，经测算为$74.20 \pm 3.6km/s$，最小为$70.06m/s$，与光速的比值$\alpha \geq 2.335 > 1$，即级数(12.18)是一个发散级数。这样，人造飞行器即便是以光速飞行也不能到达边界一览宇宙风貌，除非宇宙进入坍缩期，但那时人类是否仍存在尚不为今人知晓。

欧阳博士告诉惠子，自然限制人造飞行器的速度小于宇宙扩展速度的同时，意味着人类不可能与宇宙中大量的事物面对面或进行实地验证，这也是老子在《道德经》中阐释"人法地，地法天，天法道，道法自然"的原因，即人"生"应在人力所能及的范围内效法地上万物的"生"，并受地球的约束。实际上，即便是在地球上，人的"六根"界定也限制了人对地球及近地空域中事物的感知范围，即人对万物认知的范围或科学自然受限于人是地球人。

（2）人生限制. 科学范围受限于人与自然的和谐共生，即人类为实现终极目标而主动限制或终结某些科学及其应用领域。欧阳博士解释说，人与自然和谐共生要求科学及其引导的人类活动满足两个条件：一是科学及其应用造福于人类；二是科学及其应用不侵扰自然，即科学及其应用是在不侵扰自然的条件下造福于人类。这两个条件看似简单，但即便到了今天，科学引导的人类活动中大量的也并不满足条

件要求，特别出现在人工合成材料及大量的工业过程中。一般地，在特定条件$\mathcal{C}$下人工合成材料或工业过程的化学反应范式为

$$A_1+A_2+\cdots+A_k \ \rightarrow \ B_1+B_2+\cdots+B_l。\qquad (12.19)$$

这当中，符号A_i表示参与化学反应的分子，B_j表示化学反应产出的分子，$1\leq i\leq k, 1\leq j\leq l$且$k\geq 1, l\geq 1$。欧阳博士告诉惠子，自然存在的物质经过数十亿年的演化，均是以一种稳定的状态存在。这样，(12.19)范式是分子$A_1,A_2,\cdots,A_k$间的化学反应，也可以表示特定条件下的化学分解，即$k=1$的情形。这里，有两个需要特别注意的事项，即①$A_1,A_2,\cdots,A_k$是k个参与化学反应的纯分子，仅在实验室条件下可以恰当地实现，实践中的化合物不单是含有分子$A_1,A_2,\cdots,A_k$，一般还伴随有其他化合物或杂质。类似情形同样出现在$k=1$化学分解的情形；②产出物$B_1,B_2,\cdots,B_l$并非都有益于人类。假设$B_1,B_2,\cdots,B_{l_0}$有益而$B_{l_0+1},B_{l_0+2},\cdots,B_l$无益于人类，则产出物$B_{l_0+1},B_{l_0+2},\cdots,B_l$即是材料合成或工业过程中的废弃物。以纺织印染为例，每印染1吨纺织品需耗用100-200吨水，造成80%-90%的废水，含有浆料及其分解物、纤维屑、酶类污染物、油脂、含氮化合物、漂白剂、硫代硫酸钠、硫化碱、苯胺、硫酸铜、甲醛、对苯二甲酸、乙二醇等多种有害物质。那么，是否可以将印染废水直接排入江河呢？当然不能！欧阳博士解释说，将印染废水直接排入江河的行为即是在满足条件一的同时侵扰自然，造成江河水域受到污染，鱼、虾等水生物会逐渐消亡，影响生态环境并危及人类生存。故此，需要人类对印染废水等工业废弃物$B_{l_0+1},B_{l_0+2},\cdots,B_l$按相应标准处置后才允许排入自然。那么，人工材料合成或工业过程中是否对废弃物$B_{l_0+1},B_{l_0+2},\cdots,B_l$按标准进行了处置即不对自然构成侵扰呢？答案是否定的！欧阳博士解释说，对废弃物$B_{l_0+1},B_{l_0+2},\cdots,B_l$是依人类自己定的标准进行处置，并未恢复自然构成物的原状。例如，对印染废水的处置仅是满足排放标准，其有害物含量尚未恢复到最初水质。顿了顿，欧阳博士继续说，如废弃物处置到合成材料或工业过程材料的原初自然状态，对应的(12.19)的逆过程

$$B_1+B_2+\cdots+B_l \ \rightarrow \ A_1+A_2+\cdots+A_k \qquad (12.20)$$

是否存在，以及(12.19)的逆过程存在时，实现条件$\mathcal{C}^-$是什么等均需要深入研究。这时，如果对废弃物$B_{l_0+1},B_{l_0+2},\cdots,B_l$处置为原初状态$A_1,A_2,\cdots,A_k$，一般需要条件$\mathcal{C}^-\supset\mathcal{C}$。例如，处置$k=1$时化合物$A_1$分解中的废弃物$B_{l_0+1},B_{l_0+2},\cdots,B_l$需将那些对人类有益的产物$B_1,B_2,\cdots,B_{l_0}$重新加入$B_{l_0+1},B_{l_0+2},\cdots,B_l$中才有可能合成为$A_1$，且消耗的能量一定大于(12.19)分解耗费的能量。但这样一来，人类必然无法获取到$B_1,B_2,\cdots,B_{l_0}$及其产生的益处。换言之，人类由材料合成或工业过程获

取$B_1, B_2, \cdots, B_{l_0}$必然产生废弃物，而人类对废弃物$B_{l_0+1}, B_{l_0+2}, \cdots, B_l$的处置不可能恢复到原初状态，排入自然必然侵扰自然。为此，一是在人的物质需求上要厉行节约、反对铺张浪费，打造物质生产循环产业链，对人工合成材料或是工业过程产出物$B_1, B_2, \cdots, B_l$，包括废水、废气等液态、气态废弃物，如二氧化碳等的循环应用。同时，对那些不构成循环链环节的废弃物进行无公害化处置。必要时，对废弃物进行留置或封存，不对自然构成侵扰；二是需要人类主动对科学及其应用的范围作出调整或应用限制，包括那些试图改变人体或生物基因结构，为一些特殊人群缓解疼痛研发的致幻试剂、药品或毒品，用于一些人追求“五色、五音、五味”的奢侈消费或是“心发狂、行妨”的感官刺激或行为不轨，以及那些服务于一些资本的“逐利”，攫取或掠夺自然资源等损害人类或侵扰自然的科学研究及产业范围，以实现人类的终极目标，与自然和谐共生。



图12.29 八达岭古长城

5.3.人类文明约束. 人类文明，是人类历史积累下来的有利于认识和适应自然、符合人类精神追求且能为绝大多数人认可和接受的人文精神、发明创造的总和，强调人类必须在生存基础之上与自然和谐共生。对应地， 科学技术是人类文明进步的根本动力，英国科学史家李约瑟有一句名言:“对科学工作者而言，一个不可逾越的原则是为人类文明而工作”，即在人类的终极目标中，科学工作者的使命是认知万物法则，进而推动人类文明的进步。这样，科学及其应用在推动人类文明进步的同时，必然受人类文明的制约，即不能从事那些有悖于人与自然和谐共生的研究、探索及开发相应技术的用。那么，人类文明是怎样约束科学及其应用的呢？欧阳博士告诉惠子，人类文明对科学及其应用的约束，表现在科学及其应用范围受一定时期社会文明的约束，不能违反社会文明，如社会的“公序良俗”等。注意，文明是社会道德的体现，道德是衡量社会文明的尺度。这样，人类文明对科学及其应用约束的实质是对社会个体“德”的约束，包括科学工作者。

那么，什么是中国文化中的“德”，什么样的行为为“有德”或“无德”呢？这里,“德”是遵循本性与本心或其固有的性质、个性行事的表现。欧阳博士解释说,《道德经》中的“德”是与万物法则“道”对应的“德”，认为“孔德之容，惟道是从”，这当中的“孔”字是“大”的意思，即万物唯有遵“道”而行的表现才为“有德”；反之，万物背“道”而行则视为“无德”。注意，万物是人的“六根”界定，包括万物的各种表现。在人看来万物均是在遵“道”而行，唯有人类自己例外，因为人有思考、判断与选择的能力，这是人与其他动物最大的区别，但也正是因为这一

点，造成人的行为可能背“道”而行，显现出“无德”。这样一来，“德”与万物又是什么关系呢？这一问题的答案，是老子在《道德经》第五十一章中阐释的“道生之，德畜之，物形之，势成之，是以万物莫不尊道而贵德”，意思是万物由“道”生成，由“德”养育，由“物质”赋予形态，由“环境”助其成长，即“德”与万物是一种养育与被养育的关系。这样，万物遵“道”行事，以“德”为珍贵的自然本性需要人类效法，即“人法地，地法天，天法道，道法自然”，是在约束人的行为“有德”，与自然和谐共生，以维系人类文明。

科学是人对万物法则或“道”的局部认知，是揭示、认知事物规律，促使人类活动遵“道”行事或“有德”的基础，即科学引导人类活动“有德”的前提在于科学对事物规律的认知有益于人类终极目标或文明的实现，需要人类“有德”或“修德正心”。那么，为什么要求人类“修德正心”呢？欧阳博士解释说，因为科学是对事物呈现规律的的认知或局部“道”，对人类文明同时存在“利”与“害”两难的困境，“道本无心”而人有“心”，科学引导人类活动的“心”在人类自己。这样一来，人类活动如不能以“修德正心”为科学及其应用的前提，那些仅为满足局部区域或一些人一时的利益追求、奢华享受而存在的“私心”，以及科学引导的资源掠夺或是对人类自己或生态环境的伤害等活动，最终带给人类的只能是灾难，甚至是人类的自我毁灭，因为这些活动恰是人类“无德”的表现，与人类文明的宗旨相违背。

那么，在这种情形下，科学应怎样在人类文明的约束下促进人类进步呢？欧阳博士告诉惠子，首先，人与自然和谐共生是人类文明整体表现而科学是人对事物规律的局部认知或条件真实，需要人类自己对这一事实进行确认；其次，在人与自然和谐共生的前提下，科学促进人类进步的唯一判别标准，在于科学及其应用在给人类增加福祉的同时不侵扰自然，以实现人与自然和谐共生。为此，需要对既有科学成果、科学研究与探索和科学引导的一切人类活动进行检验，终结那些研究或是应用中危害人类或是过于侵扰自然的科学项目。同时，正确理解科学成就条件，推动那些有助于人与自然和谐共生的科学研究，改变人类活动既有技术路径中对自然的侵扰，实现对自然无侵扰的宗旨。这是人类进入到二十一世纪，科学在人类文明约束下促进人类进步中面临的最大问题，是机遇更是人类文明的挑战，需要全体人类共同面对。

第6节 注释与评论

6.1. 科学哲学的核心，在于探讨科学的终极目标或科学应如何发展、应研究什么问题等科学发展中的一些终极问题。科学服务于人类，是为人类的终极目标服务

的。那么，*人类的终极目标是什么？是为称霸于地球，主宰宇宙吗？*当然不是！人类在物质匮乏时，族群中的头领带领族人与他族或种群间争夺资源或是战争的目的，是为本族的生存与延续；在有组织地进行生产、物质昌盛时，人类则更多地是贪图精神享受。故此，人类的终极目标，一是满足人类的物质需求，二是实现人的精神需求，见文献[Dyq]。同时，宇宙中任一个体不可能称霸地球，不可能称霸宇宙，人类也不例外，因为"*天地视万物为刍狗*"，不可能一方独大，见文献[Fur1] 和[Fur2]。这样，科学服务于人类的终极目标旨在促进人类文明的进步，"*天人合一*"，与自然和谐共生，见文献[Dan]。科学既然是人的"*六根*"对事物规律的局部认知，在造福人类同时的不恰当应用必然是在侵扰自然，且其作用效应在累积到一定程度后又必然会反扑人类，造成科学的两难困境。但走出这个困境的主动权在人类自己手中，即科学在造福人类的同时，如何遵从恒道法则不侵扰自然，实现人与自然的和谐共生，这是科学引导人类活动面临的最大挑战，见文献[Mao44]和[Mao47]。

6.2. 万有理论的实质，是构建包容不同理论的Smarandache重叠空间或系统，即在同一个空间或系统中统一既有的局部理论，见文献[Mao22]和[Sma1]。这当中的难点在于如何刻画Smarandache重叠空间或系统，以包容既有的局部理论，平和相互间的矛盾。这当中，*爱因斯坦倡导的统一场论*是一个典型例子。理论上，万物同在宇宙这一个框架下，必然存在一种统一的描述或刻画。例如，万物间的力作用构成的连续流$G^L[AEP]$，但$G^L[AEP]$是否可以用一个方程刻画则是未知，因为人在认知上的局限性造成确定$G^L[AEP]$中的节点，包括节点间的相互作用"*永远在路上*"，只是在人力所能及的范围内对其进行局部认知。在这种情形下，以局部认知为万物的整体认知不可能为真，是人类自己"*一厢情愿*"的假想。同时，认为用一个数学方程可以刻画万物运行更是一种假想，因为数学的局限性较之人在认知上的局限性更甚，答案必然是否定的。但这样一来，*爱因斯坦倡导的统一场论是否就没有意义了呢？*当然不是！统一场论真正体现的，是人对自然真实的趋近过程。同时，需进一步拓广数学，在经典数学上构建Smarandache重叠空间或系统上的数学，即数学组合学。有关爱因斯坦广义相对论和引力场见文献[Car]、[Ein1]、[Thi]和[Wus]，Kaluza-Klein理论和弦理论见文献[Pol]、[Smo]和[Wes]，规范场见文献[Ble]、[ChL1]、[Mat]、[Nam]和[Wan]等。

6.3. 美国J.Horgan的《*科学的终结*》在完成论文[Mao47]前我并没有读过。论文[Mao47]在美国一份物理学术期刊上发表后，我在书店里看到他的《*科学的终结*》（修订版）中文译本，对书中所载一些著名学者关于其所在科学看似走到尽头的阐释很兴奋，后花了一周时间通读全书，因为2018年-2019年我在关注科学与自然的关系问题。通读后我给J.Horgan发了一封电子邮件阐释我的科学哲学观，并将[Mao47]的电子版发给了他，他也很客气地回了信。J.Horgan的这本书初版于1996年，一经公

布即引起国际科学界巨大反响和批判，因为科学如果有终结，则人类不可能认知宇宙万物，这与大多科学工作者的内心存在巨大反差，但实际上，老子的“道可道，非常道；名可名，非常名”和观音菩萨的“色不异空，空不异色；色即是空，空即是色；受、想、行、识亦复如是”均表明人类对宇宙万物的认知是人类自己的认知，有局限，并不一定是事物真实。我并不赞同J.Horgan以一些学者个人的感知认为科学有终结的观点，因为一个人的生命有限，局限性大，个人学术思想终结是一种必然，但不能由此推断出科学终结的结论。实际上，《科学的终结》这本书的真正意义，在于唤醒人们关注科学哲学，即科学应当怎样发展才与人类的终极目标相符。

6.4. 一些人以牛顿、爱因斯坦为例，认为“科学的终点是宗教”或“神学”是对牛顿、爱因斯坦科学哲学的误读，是在将科学与宗教决然对立而部分地否定人类文明，因为宗教中同样有前人对万物的正确认知，可为科学发展所借鉴。同时，人类文明史表明，由哲学经典中吸取科学养分是科学发展的普遍规律，这当中的哲学经典包括宗教典籍，因为科学是人类认知中的“无中生有”，需要站在前人认知的基础上发展，需要人在认知思想上的创新，我个人的经历也证明了这一点。2003年-2005年，我在中国科学院从事博士后研究，主要工作是沿着博士阶段的思想进一步研究图的曲面嵌入与不标根地图的计数问题，即[Liu2]、[MoT]、[Mul]、[MrW]和[NeS]等文献中阐释的问题，研究工作曾一度陷入思想枯竭而不能自拔，后由《道德经》中的“道”与“名”、“有”与“无”的辩证关系而开悟，明了科学的使命在于认知“无”，在于认知“道”，提出在组合结构上扩展数学，进而拓展人类认知事物真实的能力。我的这一过程实则与牛顿、爱因斯坦等人的思想类似，即由哲学经典中吸取养分，推动科学发展，扩大科学认知事物的范围，以服务于人类文明的进步。



山重水复疑无路，柳暗花明又一村。

— 南宋.陆游《游山西村》

参考文献

R.Abraham and J.E.Marsden

[AbM] *Foundation of Mechanics* (2nd edition)[M], Addison-Wesley, Reading, Mass, 1978.

R.Albert and A.L.Barabaśi

[AlB] Topology of evolving networks: local events and universality[J], *Physical Review E*, Vol.85(24)(2000), 5234-5240.

M.A.Armstrong

[Arm] 基础拓扑学（孙以丰译）[M]，北京：北京大学出版社，1983.

W.Brain Arthur

[Art] 技术的本质– 技术是什么，它是如何进化的（曹东溟、王健译）[M]，浙江人民出版社，2018.

A.L.Barabaśi and R. Albert

[BaA] Emergence of scaling in random network[J], *Science*, Vol.286, 5439(1999), 509-520.

G.Bassini and S.Capozziello

[BaC] Multi-spaces and many worlds from conservation laws, *Progress in Physics*, Vol.4(2006), 65-72.

Igor Belykh, Vladimir Belykh and Martin Haslerc

[BBH1] Generalized connection graph method for synchronization in asymmetrical networks[J], *Physica D*, 224(2006), 42 – 51.

Vladimir N. Belykh, Igor V. Belykh and Martin Hasler

[BBH2] Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems [J], *Physica D*, 195(2004), 159 – 187.

G.Birkhoff and S.MacLane

[BiM] *A Survey of Modern Algebra* (4th edition)[M], Macmillan Publishing Co., Inc, 1977.

N.L.Biggs and A.T.White

[BiW] *Permutation Groups and Combinatoric Structure* [M], Cambridge University Press, 1979.

D.Bleecker

[Ble] *Gauge Theory and Variational Principles* [M], Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1981.

D.Bohm and Y.Aharonov

[BoA] Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen and Podolski [J], *Physical Review*, 108(1957), 1070 – 1076.

Béla Bollobás

[Bol1] *Random Graphs* [M], Academic Press Inc. London Ltd, 1985.

[Bol2] 图论导引教程（赵树春、朱学志译）[M]，哈尔滨：黑龙江科学技术出版社，1985.

P.Brass, W.Moser and J.Pach

[BMP] *Research Problems in Discrete Geometry* [M], Springer Science + Business Media, Ltc, 2005.

F.Brauer and Carlos Castillo-Chavez

[BrC] 生物数学 – 种群生物学与传染病学中的数学模型（第二版，金成桴译），北京：清华大学出版社，2013.

M.Brin and Garrett Stuck

[BrG] 动力系统引论（金成桴译）[M]，北京：高等教育出版社，2013.

M.Carmeli

[Car] *Classical Fields – General Relativity and Gauge Theory* [M], World Scientific, 2001.

G.Chartrand and L.Lesniak

[ChL] *Graphs & Digraphs* [M], Wadsworth, Inc., California, 1986.

陈关荣、汪小帆、李翔

[CWL] *Introduction to Complex Networks – Models, Structures and Dynamics* [M]，北京：高等教育出版社，2015.

T.P.Cheng and L.F.Li

[ChL1] *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* [M], Oxford University Press, 1984.

陈维恒、李兴校

[ChL2] 黎曼几何引论 [M]，北京：北京大学出版社，2002.

陈省身、陈维恒
[ChC] 微分几何讲义（第二版）[M]，北京：北京大学出版社，2001.

Jean de Climont
[Cli] *The Worldwide List Of Alternative Theories And Critics*, Editions d Assailly, 2018.

Frank Close
[Clo] 反物质（羊奕伟译）[M]，重庆：重庆大学出版社，2009.

John B.Conway
[Con] *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag New York, Inc., 1990.

党连文
[Dan] 天人合一 - 领悟老子心中的自然神和人的灵魂[M]，北京：中国梳理水电出版社，2014.

D.Deleanu
[Del] *A Dictionary of Smarandache Mathematics* [M], Buxton University Press, London & New York,2.

杜亚泉
[Dyq] 人生哲学 [M]，北京：北京联合出版公司，2015.

A.Einstein
[Ein1] 狭义与广义相对论浅说（杨润殷译）[M]，北京：北京大学出版社，2006.
[Ein2] 爱因斯坦的宇宙（沃尔特.马丁、玛格达.奥特编辑，汪翊鹏译）[M]，北京：外语教学与研究出版社，2017.

Einstein A., B. Podolsky and N. Rosen
[EPR] Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete, *Physical Review*, 47(1935), 777-780.

费保俊
[Fei] 相对论与非欧几何 [M]，北京：科学出版社，2005.

傅佩荣
[Fur1] 傅佩荣译解易经 [M]，北京：东方出版社，2012.
[Fur2] 傅佩荣译解老子 [M]，北京：东方出版社，2012.
[Fur3] 傅佩荣译解大学中庸 [M]，北京：东方出版社，2012.

耿素云、张立昂

[GeZ] 概率统计 [M]，北京：北京大学出版社，1987.

C.Goffman

[Gof] 多元微积分（史济怀、彭家贵、何琛、李世雄、徐森林、龚升译）[M]，北京：人民教育出版社，1978.

J.E.Graver and M.E.Watkins

[GrW] *Combinatorics with Emphasis on the Theory of Graphs* [M], Springer-Verlag, New York Inc,1977.

John Gribbin

[Gri1] 寻找薛定谔的猫 – 量子物理和真实性（张广才等译）[M]，海口：海南出版社，2009.

[Gri2] 寻找多重宇宙（常宁、何玉静译）[M]，海口：海南出版社，2012.

J.L.Gross and T.W.Tucker

[GrT] *Topological Graph Theory* [M], John Wiley & Sons, 1987.

关肇直、张恭庆、冯德兴

[GZF] 线性泛函分析入门 [M]，上海：上海科学技术出版社，1979.

郭光灿、高山

[GuG] 爱因斯坦的幽灵 – 量子纠缠 [M]，北京：北京理工大学出版社，2009.

何大韧、刘宗华、汪秉宏

[HLW] 复杂系统与复杂网络 [M]，北京：高等教育出版社，2009.

Morris W.Hirsch, Stephen Smale and Robert L.Devaney

[HSD] *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* [M], Elsevier (USA), 2004.

K.Hoffman and R.Kunze

[HoK] *Linear Algebra* (Second Edition)[M], Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

John Horgan

[Hor] 科学的终结（孙雍君、张武军译）[M]，北京：清华大学出版社，2017.

华罗庚

[Hua] 数论导引[M], 科学出版社，北京，1979.

H.Iseri

[Ise] *Smarandache Manifolds* [M], American Research Press, Rehoboth, NM,2002.

靳德明

[Jin] 现代生物学 [M]，北京：高等教育出版社，2009.

M.Kaku

[Kak] 平行宇宙 (武义生、包新周译) [M]，重庆出版集团，2008.

L.Kuciuk and M.Antholy

[KuA] An Introduction to Smarandache Geometries, *JP Journal of Geometry and Topology*, 5(1), 2005,77-81.

John M.Lee

[Lee] *Introduction to Topological Manifolds* [M], Springer-Verlag New York, Inc., 2000.

梁素娟、金望久

[LiJ] 听南怀瑾讲禅 [M]，北京：民主与建设出版社，2008.

林语堂

[Lin] 老子的智慧 [M]，北京：群言出版社，2010.

刘连寿

[Liu] 理论物理基础教程 [M]，北京：高等教育出版社，2003.

刘彦佩

[Liu1] 图的可嵌入性理论 [M]，北京：科学出版社，1994.

[Liu2] *Introductory Map Theory* [M], Kapa & Omega, Glendale, AZ, USA, 2010.

陆锦川

[Luj1] 仿佛皙老 – 太极格解道德经 [M]，北京：团结出版社，2004.

[Luj2] 本如当来 – 仿佛如是说金刚经 [M]，北京：团结出版社，2004.

陆君安、刘慧、陈娟

[LLC] 复杂动态网络的同步 [M]，北京：高等教育出版社，2016.

陆征一、王稳地

[LuW] 生物数学前沿 [M]，北京：科学出版社，2008.

S.Lynch

[Lyn] *Dynamical System with Applications using Maple*™ (Second Edition)[M], Birkhäuser Boston, LLC, 2010.

马天

[Mat] 从数学观点看物理世界 – 基本粒子与统一场论 [M]，北京：科学出版社，2014.

L.F.Mao（毛林繁）

[Mao1] On automorphism groups of maps, surfaces and Smarandache geometries[J], *Scientia Magna*, Vol.1(2005), No.2,55-73.

[Mao2] Mathematics of the 21st century expected by physics, in *Selected Papers on Mathematical Combinatorics* [M], World Academic Union, 2006.

[Mao3] On algebraic multi-group spaces[J], *Scientia Magna*, Vol.2,No.1(2006), 64-70.

[Mao4] On multi-metric spaces[J], *Scientia Magna*, Vol.2,No.1(2006), 87-94.

[Mao5] On algebraic multi-vector spaces[J], *Scientia Magna*, Vol.2,No.2(2006), 1-6.

[Mao6] On algebraic multi-ring spaces[J], *Scientia Magna*, Vol.2,No.2(2006), 48-54.

[Mao8] Combinatorial speculation and combinatorial conjecture for mathematics[J], *International J.Math. Combin.* Vol.1(2007), No.1, 1-19.

[Mao9] An introduction to Smarandache multi-spaces and mathematical combinatorics[J], *Scientia Magna*, Vol.3, No.1(2007), 54-80.

[Mao10] Geometrical theory on combinatorial manifolds[J], *JP J.Geometry and Topology*, Vol.7, No.1(2007),65-114.

[Mao11] Curvature equations on combinatorial manifolds with applications to theoretical physics[J], *International J.Math.Combin.*, Vol.1(2008), No.1, 16-35.

[Mao12] Combinatorially Riemannian Submanifolds[J], *International J.Math.Combin.*, Vol.2(2008), No.1, 23-45.

[Mao13] Extending homomorphism theorem to multi-systems[J], *International J.Math. Combin.*, Vol.3(2008), 1-27.

[Mao14] Action of multi-groups on finite multi-sets[J], *International J.Math. Combin.*, Vol.3(2008), 111-121.

[Mao15] Topological multi-groups and multi-fields[J], *International J.Math. Combin.*, Vol.1 (2009), 08-17.

[Mao16] Euclidean pseudo-geometry on $\mathbb{R}^n$[J], *International J.Math. Combin.*, Vol.1 (2009), 90-95.

[Mao17] Combinatorial fields – An introduction[J], *International J. Math.Combin.*, Vol.3 (2009), 1-22.

[Mao18] Relativity in combinatorial gravitational fields[J], *Progress in Physics*, Vol.3,2010, 39-50.

[Mao19] A combinatorial decomposition of Euclidean spaces R^n with contribution to visibility[J], *International J. Math. Combin.*, Vol.1, 2010, 47-64.

[Mao20] Labeling, covering and decomposing of graphs – Smarandache's notion in graph theory[J], *International J. Math.Combin.*, Vol.3, 2010, 108-124.

[Mao21] *Automorphism Groups of Maps, Surfaces and Smarandache Geometries* [M], First edition published by American Research Press in 2005, Second edition is a graduate textbook in mathematics, published by The Education Publisher Inc., USA, 2011.

[Mao22] *Smarandache Multi-Space Theory* [M], First edition published by Hexis, Phoenix in 2006, Second edition is a graduate textbook in mathematics, published by The Education Publisher Inc., USA, 2011.

[Mao23] *Combinatorial Geometry with Applications to Field Theory* [M], First edition published by InfoQuest in 2009, Second edition is a graduate textbook in mathematics, published by The Education Publisher Inc., USA, 2011.

[Mao24] Graph structure of manifolds with listing[J], *International J.Contemp.Math. Science*, Vol.5,2011, No.2, 71-85.

[Mao25] A generalization of Seifert-Van Kampen theorem for fundamental groups[J], *Far East Journal of Math.Sciences*, Vol.61 No.2 (2012), 141-160.

[Mao26] Non-solvable spaces of linear equation systems[J], *International J. Math.Combin.*, Vol.2, 2012, 9-23.

[Mao27] Global stability of non-solvable ordinary differential equations with applications[J], *International J. Math.Combin.*, Vol.1, 2013, 1-37.

[Mao28] Non-solvable equation systems with graphs embedded in $\mathbb{R}^n$[J], *Proceedings of the First International Conference on Smarandache Multispace and Multistructure*, The Education Publisher Inc. July, 2013.

[Mao29] A topological model for ecologically industrial systems[J], *International J.Math. Combin.*, Vol.1(2014), 109-117.

[Mao30] Geometry on G^L system of homogenous polynomials[J], *International J. Contemp. Math. Science*, Vol. 9, 6(2014), 287 - 308.

[Mao31] Mathematics on non-mathematics – A combinatorial contribution [J], *International J.Math. Combin.*, Vol.3(2014), 1-34.

[Mao32] Geometry on non-solvable equations – A review on contradictory systems[J], Reported at the International Conference on Geometry and its Applications,

Jardpour University, October 16-18, 2014, Also appeared in *International J. Math.Combin.*, Vol.4, 2014, 18-38.

[Mao33] Extended Banach G-flow spaces on differential equations with applications[J], *Electronic J.Mathematical Analysis and Applications*, Vol.3, No.2(2015), 59-91.

[Mao34] A new understanding of particles by G-flow interpretation of differential equation[J], *Progress in Physics*, Vol.11, 3 (2015), 193-201.

[Mao35] Cauchy problem on non-solvable system of first order partial differential equations with applications[J], *Methods and Applications of Analysis*, Vol. 22, 2（2015）, 171 – 200.

[Mao36] A review on natural reality with physical equations[J], *Progress in Physics*, Vol.11, 3 (2015),276-282.

[Mao37] Mathematics after CC conjecture – Combinatorial notions and achievements[J], *International J. Math.Combin.*, Vol.2, 2015, 1-31.

[Mao38] Mathematics with natural reality – Action flows[J], *Bull.Cal.Math.Soc.*, Vol.107, 6(2015), 443-474.

[Mao39] Labeled graph – a mathematical element[J], *International J. Math. Combin.*, Vol.3, 2016, 27-56.

[Mao40] Biological n-system with global stability[J], *Bull.Cal.Math.Soc.*, Vol.108, 6(2016), 403-430.

[Mao41] Mathematical combinatorics with natural reality[J], *International J. Math. Combin.*, Vol.2, 2017, 11-33.

[Mao42] Hilbert flow spaces with operators over topological graphs[J], *International J. Math. Combin.*, Vol.4, 2017, 19-45.

[Mao43] Complex system with flows and synchronization[J], *Bull. Cal. Math. Soc.*, Vol.109, 6(2017), 461 – 484.

[Mao44] Mathematical 4th Crisis: to reality[J], *International J.Math. Combin.*, Vol.3 (2018), 147-158.

[Mao45] *Mathematical Reality —My Philosophy on Mathematics with Reality*, The Education Publisher Inc., USA, 2018

[Mao46] Harmonic flow’s dynamics on animals in microscopic level with balance recovery[J], *International J.Math. Combin.*, Vol.1(2019), 1-44.

[Mao47] Science’s dilemma –a review on science with applications[J], *Progress in Physics*, Vol.15, 2(2019), 78-85.

[Mao48] A new understanding on the asymmetry of matter-antimatter[J], *Progress in Physics*, Vol.15, 3(2019), 78-85.

[Mao49] Graphs, networks and natural reality – From intuitive abstracting to theory[J], *International J.Math. Combin.*, Vol.4(2019), 1-18.

[Mao50] Mathematical elements on natural reality[J], *Bull. Cal. Math. Soc.*, Vol.111, 6(2019), 597 – 618.

[Mao51] Dynamic network with e-index applications[J]，*International J.Math.Combin.*, Vol.4 (2020), 1-35.

[Mao52] Reality or mathematical formality – Einstein’s general relativity on multi-fields[J], *Chinese J.Math.Sci.*, Vol.1, No.1(2021), 1-16.

[Mao53] Reality with Smarandachely denied axiom[J]，*International J.Math. Combin.*, Vol.3(2021), 1-19.

[Mao54] Economic logic in the carbon neutrality with refection on humans civilization[J], *International J.Math. Combin.*, Vol.4(2021), 75-89.

[Mao55] Disentangling Smarandache Multispace and Multisystem with Information Decoding[J], *International J.Math. Combin.*, Vol.1(2022), 1-16.

L.F.Mao and Y.P.Liu（毛林繁、刘彦佩）

[MaL1] New automorphism groups identity of trees, *Chinese Advance in Mathematics*, 113-117, 5(2002).

[MaL2] Group action approach for enumerating maps on surfaces, *J. Applied Math. & Computing*, Vol.13, No.1-2,201-215.

[MaL3] A new approach for enumerating maps on orientable surfaces, *Australasian J. Combinatorics*, Vol.30(2004), 247-259.

L.F.Mao and F.Tian（毛林繁、田丰）

[MaT1] A combinatorial refinement of Hurwitz theorem on Riemann surfaces, *Collection papers in the Symposia of 2004 Postdoctoral Forum on Frontal & Interdisciplinary Sciences of Chinese Academy of Sciences*, 75-89, December 2004.

[MaT2] On oriented 2-factorable graphs, *J.Applied Math. & Computing*, Vol.17, No.1-2. 25-38.

L.F.Mao, Y.P.Liu and F.Tian（毛林繁、刘彦佩、田丰）

[MLT] Automorphisms of maps with a given underlying graph and their application to enumeration, *Acta.Math.Sinica*, Vol.21, 2(2005), 225-236.

L.F.Mao, Y.P.Liu and E.L.Wei（毛林繁、刘彦佩、魏二玲）

[MLW] The semi-arc automorphism group of a graph with application to map enumeration, *Graphs and Combinatorics*, Vol.22, No.1(2006)93-101.

W.S.Massey

[Mas1] *Algebraic topology: An introduction* [M], Springer-Verlag, New York, etc. (1977).

[Mas2] Singular Homology Theory, Springer-Verlag, New York, etc.(1980).

Alain Mazure and Vincent Le Brun

[MaL] 物质、暗物质和反物质（罗舒译）[M]，合肥：中国科学技术大学出版社，2018.

苗东升

[Mia] 系统科学原理 [M]，北京：中国人民大学出版社，1990.

B.Mohar and C.Thomassen

[MoT] *Graphs on Surfaces* [M], The Johns Hopkins University Press, London, 2001.

B.P.Mull

[Mul] Enumerating the orientable 2-cell imbeddings of complete bipartite graphs [J], *J.Graph Theory*, vol 30, 2(1999),77-90.

B.P.Mull,R.G.Rieper and A.T.White

[MRW] Enumeration 2-cell imbeddings of connected graphs [J],*Proc.Amer.Math.Soc.*, 103 (1988), 321 330.

J.D.Murray

[Mur] *Mathematical Biology I: An introduction* [M], Springer-Verlag New York, 2002.

Y.Nambu

[Nam] 夸克：基本粒子物理前沿（陈宏芳译）[M]，合肥：中国科学技术大学出版社，2013.

R.Nedela and M.Škoviera

[NeS] Regular maps from voltage assignments and exponent groups [J], *Europ. J. Combinatorics*, 18(1997), 807-823.

Isaac Newton

[New1] 自然哲学的数学原理（赵振江译）[M]，北京：商务印书馆，2006.

[New2] 自然哲学之数学原理（王克迪译）[M]，北京：北京大学出版社，2006.

聂灵沼、丁石孙

[NiD] 代数学引论 [M]，北京：高等教育出版社，1994.

John A.Peacock

[Pea] *Cosmological Physics* [M], Cambridge University Press, 1999.

L.M.Pecora and T.L. Carrol

[PeC] Master stability functions for synchronized coupled systems [J], *Physical Review Letters*, 80(1998), 2109-2112.

P.Petersen

[Pet] *Riemannian Geometry* (Second Edition)[M], Springer Science + Business Media, Ltc, 2006.

Joseph Polchinski

[Pol] *String Theory* (Vol.I and Vol.II)[M], Cambridge University Press, 1998.

L.S.Pontrjagin

[Pon1] *Topological Groups* [M], 2nd ed, Gordon and Breach, New York, 1966.

[Pon2] Über stetige algebraische Körper, *Ann. of Math.*, 33(1932), 163-174.

丘维声

[Qiu] 解析几何 [M]，北京：北京大学出版社，1988.

Quang Ho-Kim and Pham Xuan Yem

[QuP] *Elementary Particles and Their Interactions: Conceptions and Phenomena* [M], Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

M.B.Robinson, K.R.Bland, G.B.Cleaver and J.R.Dittmann

[RBBD] A Simple Introduction to Particle Physics(I)- Foundations and the Standard Model [M], *arXiv: hep-th/0810.3328v1*, 18 Oct/2008.

任廷革

[Ren1] 任应秋讲《黄帝内经》（素问）[M]，北京：中国中医药出版社，2014.

[Ren2] 任应秋讲《黄帝内经》（灵枢经）[M]，北京：中国中医药出版社，2014.

Joseph J.Rotman

[Rot] *An Introduction to Algebraic Topology* [M], Springer-Verlag New York Inc. 1988.

F.Sauvigny

[Sau] *Partial Differential Equations* (Vol.1 and Vol.2)[M], Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

John Scott

[Sco] 社会网络分析法（刘军译）[M]，重庆：重庆大学出版社，2016.

尚玉昌

[Sha] 动物行为学 [M]，北京：北京大学出版社，2014.

F.Smarandache

[Sma1] *A Unifying Field in Logics. Neutrosopy: Neturosophic Probability, Set, and Logic* [M], American research Press, Rehoboth, 1999.

[Sma2] Mixed non-Euclidean geometries [J], *eprint arXiv: math/0010119*, 10/2000.

[Sma3] A new form of matter – unmatter, composed of particles and anti-particles[J], *Progess in Physics*, Vol.1(2005), 9-11.

[Sma4] NeutroGeometry & antigeometry are alternatives and generalizations of the non-Euclidean geometries[J], *Neutrosophic Sets and Systems*, Vol. 46 (2021), 456-476.

[Sma5] Mathematics for everything with combinatorics on nature – A report on the promoter Dr.Linfan Mao of mathematical combinatorics, *International J.Math. Combin.*, Vol.1,2016, 130-133.

F.Smarandache, V.Christianto, Fu Yuhua, R.Khrapko and J.Hutchison

[SCF] *Unfolding the Labyrinth: Open Problems in Physics, Mathematics, Astrophysics and Other Areas of Science* [M], Hexis, Phoenix, 2006.

F.Smarandache and D.Rabounski

[SmR] Unmatter entities inside nuclei, predicted by the Brightsen nucleon cluster model[J], *Progress in Physics*, Vol.1(2006), 14-18.

F.Smarandache, Dan Valeriu Voinea and Elena Rodica Opran

[SVO] *Neutrosophy, Paradoxism and Communication*, Editura Sitech Craiova, România, 2014.

L.Smonlin

[Smo] 物理学的困惑（李泳译）[M]，长沙：湖南科学技术出版社，2008.

J.Stillwell

[Sti] *Classical Topology and Combinatorial Group Theory* [M], Springer-Verlag New York Inc., (1980).

G.Svetlichny

[Sve] *Preparation of Gauge Theory* [J], *arXiv: math-hp/9902027v3*, 12 Mar/1999.

Jacques Tassin

[Tas] 植物在想什么（范思晨译）[M]，海口：海南出版社，2018.

M.Tegmark

[Teg] 平行宇宙，见J.D.Barrow, P.C.W.Davies 和C.L.Harper编：宇宙极问：量子、信息和宇宙（朱芸慧、罗璇、雷奕安译），257-295，长沙：湖南科学技术出版社，2009.

Bo Thidè

[Thb] *Electromagnetic Field Theory* [M], Upsilon Books, Uppsala, Sweden, 1997.

W.Thirring

[Thw] *Classical Mathematical Physics and Field Theories* (Third Edition)[M], Springer - Verlag New York, Inc., 1992.

V.S.Varadarajan

[Var] *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations* [M], Springer-Verlag New York Inc., (1984).

W.B.Vasantha Kandasamy

[Vas] *Bialgebraic Structures and Smarandache Bialgebraic Structures* [M], American Research Press, 2003.

W.B.Vasantha Kandasamy and F.Smarandache

[VaS1] *Basic Neutrosophic Algebraic Structures and Their Applications to Fuzzy and Neutrosophic Models* [M], Hexis, Church Rock, 2004.

[VaS2] *N-Algebraic Structures and S-N-Algebraic Structures* [M], HEXIS, Phoenix, Arizona, 2005.

Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz

[WaS] Collective dynamics of ‘small-world’ networks, *Nature*, Vol.393, 4(1998), 440-442.

王孺童

[Wrt] 金刚经.心经释义 [M]，北京：中华书局，2018.

王天明

[Wtm] 简明量子场论 [M]，北京大学出版社，2008.

C.Von Westenholz

[Wes] *Differential Forms in Mathematical Physics* (Revised edition)[M], North-Holland Publishing Company, 1981.

A.T.White

[Whi] *Graphs of Group on Surfaces-Interactions and Models* [M], Elsevier Science B.V. 2001.

吴时敏

[Wus] 广义相对论教程 [M]，北京：北京师范大学出版社，1998.

徐明曜

[Xum] 有限群导引（上册）[M]，北京：科学出版社，1987.

肖振军、吕才典

[XiL] 粒子物理学导论 [M]，北京：科学出版社，2016.

谢普

[Xie] 山海经 [M]，北京：应急管理出版社，2020.

闫茂德、高昂、胡延苏

[YGH] 现代控制论，北京：机械工业出版社，2016.

杨倩

[Yan] 动物组织学与胚胎学 [M]，北京：中国农业大学出版社，2018.

尤承业

[You] 基础拓扑学讲义 [M]，北京：北京大学出版社，1997.

袁增伟、毕军

[YuB] 产业生态学 [M]，北京：科学出版社，2010.

张志聪

[Zha] 黄帝内经集注 [M]，哈尔滨：北方文艺出版社，2007.

周伯壎

[Zho] 高等代数 [M]，北京：人民教育出版社，1966.

周衍柏

[Zhy] 理论力学教程 [M]，北京：高等教育出版社，1986.

祝华英

[Zhu] 黄帝内经十二经脉解秘与应用 [M]，北京：中国古籍出版社，2017.

索 引

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

T

W

X

Y

Z



毛林繁. 工学博士、数学博士后、教授级高级工程师，国际数学组合研究院（AMCA，美国）院长、首席科学家，远瓴数据复杂系统研究院（YLDACS，北京）院长，国际中智科学会（NSIA，美国）荣誉院士，两份数学学术期刊主编，北京建筑大学兼职教授、研究生导师，兴趣集中在Smarandache重叠空间或系统与数学组合学，包括数学、理论物理、复杂系统和网络等，是集多学科为一身的学者，发表论文120余篇、8部专著和多部文集，曾获美国Albert Nelson Marquis Who's Who颁发的“数学与工程”终生成就奖。

摘 要: 把握一件事物的根本在于认知事物变化中的因果关系。万物组合，蕴含在盲人摸象寓言中那位觉者的话语中，是人在对事物局部认知的情形下把握事物的一种哲学思想。本书以万物组合为理念，以对事物定量认知为主线，由幼儿提出宇宙极问起，阐释在万物组合下系统认知事物的方法，包括参照系、相对性原理、系统与同步、非均匀系统与不可解方程组、复杂网络等认知方法，并在此基础上构建事物组合真实的流元模型，在人与自然和谐共生的思想下评述科学在人类文明中的作用，是对数学科学与哲学一次系统地回顾与反思，适合于那些从事数学与应用数学、系统科学、复杂系统与复杂网络，以及科学哲学等方向学习与研究的人员参考。

Abstract. Holding on a thing is essentially to recognize the cause and effect in its evolution. The combinatorial notion implied in words of the sophist in the fable of the blind men with an elephant, is a philosophic notion recognizing things with only the local knowing. Under this notion, this book surveys the quantitative knowing of things, starts with the universal questions raised by children, explains the understanding of things including the reference frame, relativity, system with synchronization, non-harmonious system with non-solvable equations, complex network, etc., and the role of science under the harmonious coexistence of humans with the nature, which is a systematic review on mathematical science and philosophy, suitable for researchers in mathematics, systems, physics and science's philosophy.

